实用垂棱锥三角

胡景先

SHI YONG CHUI LENG ZHUI SAN JIAO

内 容 簡 介

本书是工厂实用数学读物。书中拟出垂棱锥空间角的关系式二十六个，对于带有三角棱、槽或楔形、楔槽的机械零件，棱锥形模具，车刀或铣刀以及多面体等的空间角，和一些机械零件或刀具在万能工具钳或分度头上应作的加工转角以及球体的球心角，均可依书中的关系式比较迅速准确的求出。

书中对棱锥和垂棱锥中的有关概念以及关系式的建立与应用实例，分别作了介绍。并在实例中采用三角函数对数计算方法。

本书供工厂技术人员使用，对工具铣工、磨工也有较大的实用价值。还可作为有关专业技术学校师生的参考资料。

实用垂棱锥三角

胡 景 先

河南人民出版社出版
周口镇印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米　32开本　$4\frac{3}{4}$印张　60千字

1979年10月第1版　1979年10月第1次印刷

印数1—3,500册

统一书号　10105·22　定价0.40元

前　言

在工厂的生产实践中，时常会见到一些具有三个方向空间角的各种零件，如棱锥体和槽棱锥体，楔形体和楔槽形体，三角槽形体和多面体，凸模和凹模，具有前、后角的刀具等．这些具有三向空间角的零件，大都是产品中的关键件或工具中的关键件。在这些零件上，通过由已知的空间角或有关棱边来进行计算求出另外需要的空间角，也就成为生产中经常要遇到的问题．工人同志们和现场技术人员在遇到这类问题时，往往是由平面三角算起，再逐步推演到立体中去的方法来解决．实践说明，这种计算经常会是不自觉的重复．在不少的综合性问题中，这种计算方法更为繁杂．本人经过多年来结合现场生产实践，对一般立体零件中的三角计算方法，作了较为系统的整理，证明在一定的立体形态下，空间角与空间角、空间角与有关棱边之间存在着数学计算关系．本书除向读者证明和介绍这些关系式外并介绍许多生产实例．由于书中的计算形式，概归纳为由垂棱锥中的角与角或角与边的关系式来进行解题，所以书名取为《实用垂棱锥三角》．

本书内容共分五章．第一章是说明有关棱锥与垂棱锥的分类、定义、要素和性质的．第二、三、四章则是矩形（或正方形）、直角三角形和任意三角形为底的垂棱锥的三角公式的由来、证明和例题解．第五章则是比较复杂的一些综合性例题解．书前附有公式集录，书后附有三角函数表和三角函数对数表，备索引或查用．

本书在写作和整稿过程中，曾得到开封拖拉机厂工具技术组

许化平、李庚祥、林玉芳等同志的积极协助，在此特致谢意.

本书虽经几年的写作和整理，但由于自己学识菲薄，水平所限，书中不妥之处还会存在，希望读者批评指正.

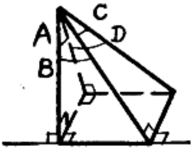
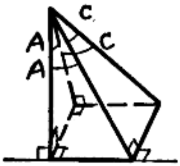
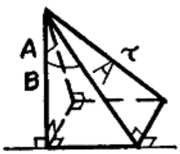
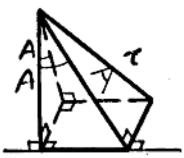
作　　者

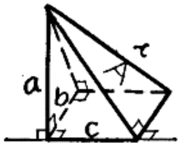
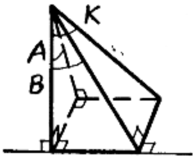
一九七八年十月

目　　录

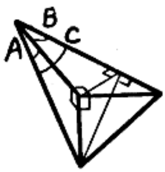
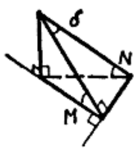
公 式 集 录

一　矩底垂棱锥和正方底垂棱锥

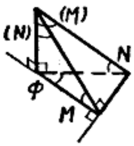
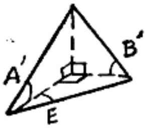
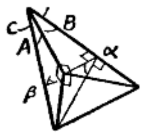
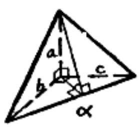
图　　例	关　系　式	序　次
	$\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cos B$ $(\operatorname{tg}D=\operatorname{tg}B\cos A)$ $\sin C=\sin A\cos D$ $(\sin D=\sin B\cos C)$	公式 1 公式 2
	$\operatorname{tg}C=\sin A$　$(C<45^\circ)$	公式 3
	$\cos\tau=-\sin A\sin B$ $(180^\circ>\tau>90^\circ)$	公式 4
	$\cos\tau=-\sin^2 A$ $(180^\circ>\tau>90^\circ)$	公式 5

	$\operatorname{tg}\tau=-\frac{a}{b\cdot c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $(180°>\tau>90°)$	公式 6
	$\operatorname{tg}K=\sqrt{\operatorname{tg}^2A+\operatorname{tg}^2B}$	公式 7

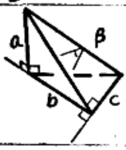
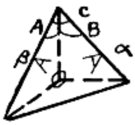
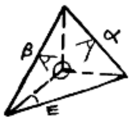
二　三垂线三棱锥和三线正交三棱锥

图　　例	关　系　式	序　次
	$\cos C=\cos A\cos B$	公式 8
	$\sin N=\sin M\cos\delta$	公式 9

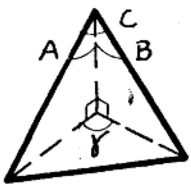
（续表）

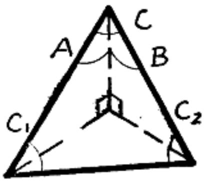
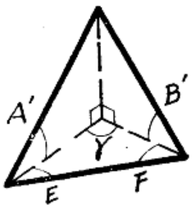
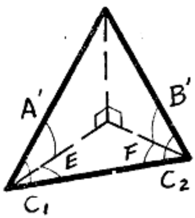
	$\mathrm{tg}N=\mathrm{tg}M\cos\phi$ $[\mathrm{tg}(N)=\mathrm{tg}(M)\cdot\cos\phi]$	公式10
	$\mathrm{tg}E=\dfrac{\mathrm{tg}A'}{\mathrm{tg}B'}$	公式11
	$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}A}{\sin B}$ $\left(\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\mathrm{tg}B}{\sin A}\right)$ $\sin\alpha=\dfrac{\sin A}{\sin C}$ $\left(\sin\beta=\dfrac{\sin B}{\sin C}\right)$ $\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}C}$ $\left(\cos\beta=\dfrac{\mathrm{tg}A}{\mathrm{tg}C}\right)$	公式12 公式13 公式14
	$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{a}{b\cdot c}\sqrt{b^2+c^2}$	公式15

（续表）

	$\text{tg}\gamma=\sqrt{\text{tg}^2A'+\text{tg}^2B'}$	公式16
	$\text{tg}\beta=\frac{b}{a\cdot c}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$	公式17
	$\cos A=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ $\left(\cos B=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)$ $\cos C=\text{ctg}\alpha\,\text{ctg}\beta$	公式18 公式19
	$\text{tg}E=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$	公式20

三　任意三角形底垂棱锥

图　　例	关　系　式	序　次
	$\cos\gamma=\frac{\cos C-\cos A\cos B}{\sin A\sin B}$ $\left(\cos\alpha=\frac{\cos A-\cos B\cos C}{\sin B\sin C}\right)$ $\left(\cos\beta=\frac{\cos B-\cos C\cos A}{\sin C\sin A}\right)$	公式21

	$\mathrm{ctg}C_1=\frac{\cos B}{\cos A\sin C}-\mathrm{ctg}C$ $\left(\mathrm{ctg}C_2=\frac{\cos A}{\cos B\sin C}-\mathrm{ctg}C\right)$	公式22
	$\mathrm{ctg}E=\frac{\mathrm{ctg}A'\mathrm{tg}B'}{\sin\gamma}-\mathrm{ctg}\gamma$ $\left(\mathrm{ctg}F=\frac{\mathrm{ctg}B'\mathrm{tg}A'}{\sin\gamma}-\mathrm{ctg}\gamma\right)$	公式23
	$\frac{\mathrm{tg}A'}{\sin E}=\frac{\mathrm{tg}B'}{\sin F}$ $\frac{\sin A'}{\sin C_1}=\frac{\sin B'}{\sin C_2}$ $\frac{\mathrm{tg}E}{\mathrm{tg}C_1}=\frac{\mathrm{tg}F}{\mathrm{tg}C_2}$	公式24 公式25 公式26

三角函数对数计算说明

为了简便三角函数的乘除运算，在本书内采用了三角函数对数计算．凡是可以采用的地方都采用了．然而由于三角函数的象限值存在“－”（负）号，因而它的计算式也就同时会有“－”号．对于这样有“－”号的三角函数计算式，如何进行对数计算，仅举二例加以说明．

例 1 在 $\mathrm{ctg}y=\mathrm{ctg}(-34°)\cdot\cos 74°$ 的计算式中，y 和 $(-34°)$ 在同一象限内，试求 y．

解 $(-34°)$ 应在第四象限，故 y 亦在第四象限．

$\because\quad \mathrm{ctg}(-34°)=-\mathrm{ctg}34°,$

$$\therefore\quad \mathrm{ctg}y=\mathrm{ctg}(-34°)\cdot\cos74° =-\mathrm{ctg}34°\cos74°.$$

由于等号后的“－”号，是说明 y 的象限位置性质的，而对于“－”号以后的三角函数的计算值并无影响．所以，我们在这里可将符号“－”改为符号“⊖”来保留 y 的这一性质。并可把符号“⊖”看作隔开符号，对等号两端仍然取其对数进行运算．故前式可改写为

$$\mathrm{ctg}y=\ominus\mathrm{ctg}34°\cos74°.$$

$$\begin{aligned}\lg\mathrm{ctg}y&=\ominus\lg(\mathrm{ctg}34°\cos74°)\\&=\ominus(\lg\mathrm{ctg}34°+\lg\cos74°)\\&=\ominus(0.1710+\bar{1}.4403)\\&=\ominus(\bar{1}.6113).\end{aligned}$$

$\therefore\quad y=\ominus(67°47').\qquad\qquad \because\quad y$ 在第四象限，

$\therefore\quad y=-67°47'.$

例 2 $\cos\tau=-\sin^2 60°$，求 τ 在大于90°和小于 180° 范围内的值.

解 原式 $\cos\tau=-\sin^2 60°$ 等号后边的"$-$"号可改写为"$\ominus$"号来代替，则有

$$\cos\tau=\ominus\sin^2 60°.$$

$$\begin{aligned}\lg\cos\tau&=\ominus\lg\sin^2 60°\\&=\ominus 2\lg\sin 60°\\&=\ominus(2\times\bar{1}.9375)\\&=\ominus(\bar{1}.8750).\end{aligned}$$

$\therefore\quad \tau=\ominus(41°25').\qquad\qquad \because\quad 180°>\tau>90°,$

$\therefore\quad \tau=138°35'.$

第一章　概　　说

一　棱锥的类别

在工业生产中，各类棱锥形体构件的应用是很广泛的．仅就较常见和实用的棱锥作如下分类：

- 棱锥
  - 垂棱锥
    - 矩底垂棱锥
    - 正方底垂棱锥
    - 三线正交三棱锥
    - 三垂线三棱锥
    - 任意三角形底垂棱锥
  - 正棱锥
    - 正方棱锥
    - 正矩棱锥
    - 正三棱锥
    - 正多棱锥

除以上形体外，尚有以等边三（多）角形为底和以任意多角形为底的垂棱锥，以及以任何凸多角形为底而锥顶在空间任意一点的棱锥．这些棱锥在目前的工厂生产中较少见到．

二　棱锥的定义和要素

1.棱锥的定义：在一个多面体中有一个面是凸多角形，而其余的面是有一个共同顶点的三角形，这样的多面体就叫做棱锥．

2.棱锥的要素：

①　底面：底面的多角形为凸多角形．可以为三角形，四角形或多角形．

②　锥面（侧面）：只能是三角形或直角三角形．

③ 底边：既是底面多角形的边，又是锥面三角形的底边。

④ 锥棱（侧棱、棱边）：两个相邻锥面的交线。

⑤ 锥顶：各锥面的共同顶点或各锥棱的同一交点。

⑥ 面角：各锥面三角形的顶角。

⑦ 锥面底角：各锥面三角形的底角。

⑧ 底面角：底面三（多）角形的各角。

⑨ 锥棱（棱边）二面角：二个相邻锥面所相交的内夹角。

⑩ 锥顶角：组成锥顶的二个对角锥棱的夹角。在四棱锥中有二个锥顶角，在三棱锥中则没有锥顶角。

⑪ 面锥角：二个底边相平行的锥面在锥顶的夹角。在矩底或正方底四棱锥中有二个面锥角，没有平行底边的棱锥和三棱锥则没有面锥角。

三　垂棱锥的定义和性质

1.垂棱锥的定义：在棱锥中有一个锥棱垂直于底面时，则这个锥棱叫做垂棱，含有垂棱的棱锥叫做垂棱锥（图1）。

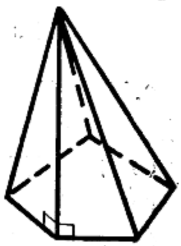


图 1

2.垂棱锥的性质：垂棱锥是一般任意棱锥的特殊形式（就象直角三角形是一般任意三角形的特殊形式一样）。因而垂棱锥具有棱锥定义和要素的内容，并且还具有如下特性。

① 垂棱仅有一条。

② 垂棱垂直于底面，垂足交于底面凸多角形的一个角顶。

③ 组成垂棱的二个锥面垂直于底面，这二个锥面叫垂面。

④ 垂棱的二面角等于垂棱在垂足的底面角。

⑤ 垂面为直角三角形。

四　矩底垂棱锥和正方底垂棱锥的定义和性质

1.矩底垂棱锥和正方底垂棱锥的定义：以矩形或正方形为底面并具有一个垂棱的棱锥就叫做矩底垂棱锥（图 2 ）或正方底垂棱锥（图 3 ）。

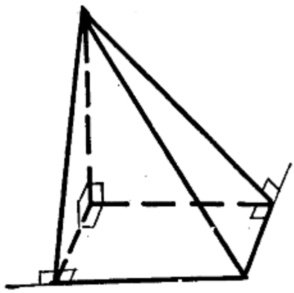


图 2

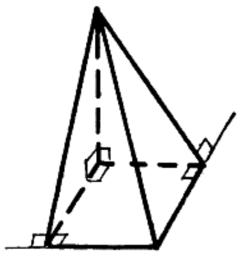


图 3

2.矩底垂棱锥和正方底垂棱锥的性质：矩底或正方底垂棱锥具有垂棱锥的所有性质，而且还具有下面特性。

① 底面是矩形或正方形。

② 垂棱的垂足交于底面的直角顶。

③ 垂棱的二面角为直角。

④ 组成直角顶的三条线是正交线。

⑤ 四个锥面中有二个垂面和二个斜（锥）面。

⑥ 二个垂面和底面是三个正交面。

⑦ 四个锥面均为直角三角形。

⑧ 和垂棱相邻的二个锥棱的二面角也各为直角。

⑨ 和垂棱相对的斜锥棱的二面角大于90°，小于180°。

⑩ 正方底垂棱锥中的斜（锥）面的面角恒小于45°。

⑪ 有二个锥顶角. 具有垂棱的锥顶角叫主锥顶角.

⑫ 有二个面锥角.

五 三线正交三棱锥的定义和性质

1.三线正交三棱锥的定义: 三线正交三棱锥(图4)是由三个直角三角形所组成, 并且是三个直角顶交于一点的垂棱三棱锥. 这样的三棱锥中具有三条相互正交的线, 所以叫做三线正交三棱锥.

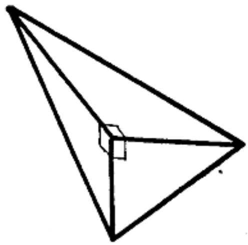


图 4

2.三线正交三棱锥的性质:

① 任一直角三角形均可作为底面.

② 任二个直角三角形均可作为垂面.

③ 三个直角三角形面相互正交.

④ 三个直角边相互正交.

⑤ 任一直角边均可作为垂棱.

⑥ 任一垂棱的二面角均为直角.

⑦ 直角顶外的任一角顶, 均可作为锥顶.

⑧ 任一锥顶有二个正交面和一个第三锥面.

⑨ 第三锥面为锐角三角形.

⑩ 第三锥面的三边的二面角都各为锐角.

⑪ 三线正交三棱锥是矩形体或正方体有关顶点连线的三棱锥体(图5), 所以它又是矩形体或正方体的一部分.

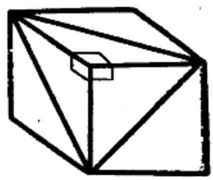


图 5

六 三垂线三棱锥的定义和性质

1.三垂线三棱锥的定义：三垂线三棱锥（图6）是由四个直角三角形所围成并且是垂棱的垂足交于底面直角三角形锐角顶的垂棱三棱锥。这样的三棱锥中具有三条依次相垂直的线（$AB\perp BE$；$BE\perp ED$），含有三垂线定理的性质，所以叫做三垂线三棱锥。

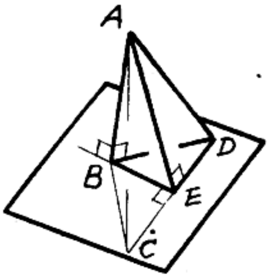


图 6

2.三垂线三棱锥的性质：

① 有二个锥顶，以A为锥顶时，AB为垂棱，$\text{Rt}\triangle BED$为底面；以D为锥顶时，DE为垂棱，$\text{Rt}\triangle EBA$为底面。

② 有二个垂棱，垂足各交于其底面直角三角形的锐角顶。

③ 垂棱的二面角等于垂足的底面角。

④ 有三条依次相垂直的线。

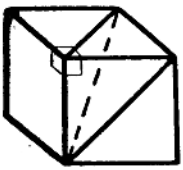


图 7

⑤ 二个锥顶各有二个正交面和一个第三锥面。

⑥ 二个锥顶共有一个斜棱（AD）。

⑦ 锥顶与底面直角顶相连的锥棱其二面角为直角（AE和BD的二面角）。

⑧ 三垂线三棱锥也是长方体或正方体有关顶点连线的三棱锥体（图7），所以它又是长方体或正方体的一部分。

⑨ 三垂线三棱锥是三线正交三棱锥的一部分，图8中的$P—FEC$三垂线三棱锥，明显是$P—ECD$三线正交三棱锥的一部分.PE是由锥顶P点到二个棱锥底面直角顶$\angle FEC$与$\angle DEC$