财经数学基础

CAI JING SHU XUE JI CHU

（下）

齐 毅 张富举 主编

中国商业出版社

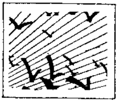
图书在版编目(CIP)数据

财经数学基础(下册)/齐毅等主编。-北京:中国商业出版社
1998.6
国内贸易部部编高等商科教材
ISBN 7-5044-3688-7

Ⅰ.财… Ⅱ.齐… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.F
224.0
中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13618 号

责任编辑:刘洪涛
特约编辑:陈学庸

中国商业出版社出版发行
(100053 北京广安门内报国寺1号)
新华书店总店北京发行所经销
北京北商印刷厂印刷
850×1168 毫米 32 开 11 印张 612 千字
1998 年 6 月第 1 版 1998 年 6 月第 1 次印刷
定价:30.00 元(上、下册)
* * * *
(如有印装质量问题可更换)



编审说明

为适应我国社会主义市场经济的建立与发展和深化高等教育改革的需要，我司委托全国商科学科建设指导组陆续编写了部编系列高等商科教材。

本书是系列高等商科教材之一。现经审定，同意作为普通高等商业、财经院校有关专业的专业课教材或专业基础课教材，也可作为成人高校同层次的函授、自学考试以及在职培训用的教材。

本书在编写和出版发行过程中，曾得到有关院校、部门以及编审者的大力支持，在此谨致谢忱。为了提高本教材的质量，热诚希望读者提出宝贵意见。以便进一步修订和完善。

国内贸易部教育司

1998 年 3 月

前 言

《财经数学基础》，是财经、商业院校经济管理类专业的一门重要基础课程。在我国建立社会主义市场经济的过程中，在当今世界所处知识经济时代，学习财经数学、掌握财经数学的基本内容，是对财经类专业学生的基本要求；它对于提高学生的文化素质，培养分析问题、解决问题的能力，为学习其他课程作好知识上的准备，有着非常重要的作用。

按照国内贸易部教育司和全国商科学科建设指导组关于高等商科教材建设规划，我们部分高等商科院校的教师编写了这套《财经数学基础(上、下册)》。上册编入微积分和概率论，下册编入线性代数和线性规划等基本内容。这套教材，适用于财经类本、专科学生使用，也适于同层次的成人教育、函授教育之用。

这套教材在编写过程中，一、在内容上，我们本着必须、够用的原则，精心安排，结构合理，科学求新。增加了常用经济数学模型，减掉了一些定理的繁琐论证。二、在框架上采用“大节”、“多目”，以便于教者对教材内容的灵活选用。三、在各章后面都有大量的练习题，通过这些习题的演练，有助于学生对基础知识的理解、把握和深化，有助于学生动手能力的培养。

本书由齐毅副教授、张富举副教授、郭金锥副教授任主编，由齐毅、国春光负责全书的结构设计、总纂。具体的编写分工是，上册：郭金锥第 1、8 章；宿金勇第 2、3 章；万会芳第 4 章；宣林第 5 章；刘芳第 6、7 章。下册：张富举第 1、2 章；黄传喜第 3、4、5 章；齐

毅第6章;国春光第7章;赵景悦第8、9章。

在本书的编写过程中曾参考了国内出版的同类教材,并得到各有关院校和学科组领导在人力和资料上的大力支持与帮助,在此一并致以谢意。本书在使用中,有不妥之处,恳请批评指正。

编　者

1998年3月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertor

目　录

线 性 代 数

线 性 规 划

线性代数

第一章

行列式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具．本章从二阶、三阶行列式出发，引出 n 阶行列式的概念，进而讨论 n 阶行列式的基本性质及其计算方法，最后介绍用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1　行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式是在研究二元、三元线性方程组的解时引出的一种数学符号．

对于二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

采用加减消元法，消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

同法消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

因此，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组（1.1）有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了便于记忆这个表达式，引进下面的记号.

定义 1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式，它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中 a_{ij}（$i=1, 2$; $j=1, 2$）称为二阶行列式的元素，横排的称为行，纵排的称为列. 可用下面的对角线展开法则记忆：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$- \qquad +$$

即实线（称为主对角线）连结的两个元素的乘积减去虚线（称为次对角线）连结的两个元素的乘积.

例如 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4-(-1)\times 3 = 11$

根据定义，（1.2）式中两个分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

分母记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

称为方程组（1.1）的系数行列式.

于是，当 $D\neq0$ 时，方程组（1.1）的唯一解可以表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}\qquad x_2=\frac{D_2}{D}\tag{1.3}$$

【例1】 解二元线性方程组：

$$\begin{cases}2x_1+x_2=-1\\x_1-3x_2=4\end{cases}$$

解：因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1\\1&-3\end{vmatrix}=-7\neq0$$

所以方程组有唯一解.

求得

$$D_1=\begin{vmatrix}-1&1\\4&-3\end{vmatrix}=-1,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}=9$$

由（1.3）得方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-1}{-7}=\frac{1}{7}\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{9}{-7}=-\frac{9}{7}$$

通过同样的讨论，三元线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

的解，为方便记忆，也可以由相应的三阶行列式简化表示.

定义 1.2

记号 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 称为三阶行列式. 它表示代数和：

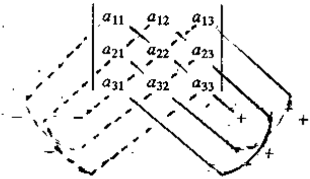
$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$

即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\tag{1.5}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.erton

三阶行列式含有三行、三列共 9 个元素，它表示 6 个项的代数和（又称三阶行列式的展开式）. 可用下面的对角线法则记忆.



实线上三个元素的乘积构成的三项都冠以正号，虚线上三个元素的乘积构成的三项都冠以负号.

例如

$$A=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\times3\times(-2)+3\times1\times2+5\times1\times(-4)$$

$$-5\times3\times2-2\times1\times1-3\times(-4)\times(-2)=-82$$

对于三元线性方程组（1.4），$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 称为方程组（1.4）的系数行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

其中 D_1，D_2，D_3 是把 D 中第 1、2、3 列分别换成常数项 b_1，b_2，b_3 得到的行列式.

用加减消元法可以验证：当系数行列式 $D\neq0$ 时，方程组（1.4）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}\qquad x_2=\frac{D_2}{D}\qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

【例 2】解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1\\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4\end{cases}$$

解：这里

$$D = \begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix} = 28 \neq 0,$$ 故方程组有唯一解.

又

$$D_1 = \begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix} = 13, \quad D_2 = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix} = 47, \quad D_3 = \begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix} = 21$$

因此，方程组的解为

$$x_1 = \frac{13}{28} \qquad x_2 = \frac{47}{28} \qquad x_3 = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，需要先介绍下面的预备知识.

二、排列与逆序

定义 1.3　由自然数 1，2，3，…，n 共 n 个数码组成的一个不重复的有序数组，称为一个 n 级排列.

例如　1234 和 2134 都是四级排列；25413 和 23415 都是五级排列.

由 n 个数码 1，2，…，n 组成的 n 级排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$. 所有这些排列中只有一个排列 $123\cdots n$ 是按自然顺序排列的，称之为自然序排列.

定义 1.4　在一个 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中，如果有较大的数 j_t 排在较小的数 j_s 的前面，则 $j_t j_s$ 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数，记作　$N(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

逆序数是奇数的排列称为奇排列，是偶数的排列称为偶排列.

例如，在排列25413中，2后面有1个数字比2小，5后面有3个数字比5小，4后面有2个数字比4小，故

$$N(25413)=1+3+2=6$$

同法可求得 $N(23415)=3$

排列25413是偶排列，排列23415是奇排列. 因 $N(12\cdots n)=0$，故自然序排列是偶排列.

例：写出由1，2，3这三个数码构成的所有三级排列，并确定它们的奇偶性.

解：由1，2，3这三个数码构成的三级排列共有3！=6个，其排列情况如下

排列	逆序数	排列的奇偶数
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

其中偶排列有3个：123，231，312.

奇排列有3个：132，213，321.

三、n 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

从中可以发现：

(1) 它的每一项都是不同行、不同列的三个元素的乘积，每

一项除符号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1j_2j_3$ 为三级排列；

(2) 当 $j_1j_2j_3$ 取遍了三级排列（共6个）时，就得到三阶行列式的所有项（每项冠以的符号除外）共 $3!=6$ 个项；

(3) 每一项的符号是：当这一项中元素的行标按自然顺序排列时，如果对应的列标构成的排列为偶排列时冠以"+"号，为奇排列时冠以"−"号.

综上所述，作为三阶行列式的展开式中的一般项可以表示为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

因而，三阶行列式可简写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中"$\sum$"表示对所有的三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

根据三阶行列式的内在规律，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 由 n^2 个元素 a_{ij}（$i, j=1, 2, \cdots, n$）排成 n 行 n 列，构成的记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示一个数值. 此数值是所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和. 各项的符号是：当这一项的行标按自然顺序排列后，如果对应的列标构成的 n 级排列是偶排列则冠以正号，是奇排列则冠以负号. 其一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，得到代数和中的所有项，共有 $n!$ 个项.

n 阶行列式可简记为 $D=|a_{ij}|$，用"$\sum$"表示对 $j_1j_2\cdots j_n$

所有的 n 级排列求和，则 n 阶行列式可简写成

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

由上述定义可知：当 $n=2$ 时即二阶行列式，当 $n=3$ 时即三阶行列式．一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$．

【例 3】 判断 $a_{34}a_{21}a_{12}a_{43}$ 和 $a_{41}a_{32}a_{12}a_{23}$ 是否能成为四阶行列式 $|a_{ij}|$ 的项？

解：将 $a_{34}a_{21}a_{12}a_{43}$ 中的行标按自然数顺序排列则得

$$a_{34}a_{21}a_{12}a_{43}=a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$

其行标与列标均是四级排列，说明是取自四阶行列式不同的行、不同的列的四个元素的乘积．依行列式的定义，$a_{34}a_{21}a_{12}a_{43}$ 可成为四阶行列式的一项．

同法可得 $a_{41}a_{32}a_{12}a_{23}=a_{12}a_{23}a_{32}a_{41}$，其列标排列为 2321，不是四级排列，表明有两个元素取自第 2 列，这不符合行列式定义．故 $a_{41}a_{32}a_{12}a_{23}$ 不可能成为四阶行列式的项．

根据定义来计算 n 阶行列式，当 n 较大时是非常麻烦的．但有一些特殊的行列式，可以根据定义来计算．

【例 4】 计算下三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（主对角线上方的元素全为 0）

解：行列式 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

D 中一定有许多项为 0，现在考察有哪些项可能不为 0．

一般项中的第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，但第一项只有 a_{11}

可能不为 0，因而 $j_1=1$；因为行列式的项是由不同行、不同列的元素构成的，故将第一行，第一列划去，不再取其中的元素．所以第二个元素 a_{2j_2} 只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$；如此推下去可得 $j_3=3, j_4=4, \cdots\cdots, j_n=n$．这样 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不为 0，其他的项均为 0．列标是自然序排列，有 $N(12\cdots n)=0$．因此，这一项前面应冠以正号．于是得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，可得上三角形行列式（主对角线下方的元素全为 0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，有对角形行列式（主对角线外的元素全为 0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即　上（下）三角形行列式（统称三角形行列式）、对角形行列式都等于主对角线上元素的乘积．

【例 5】 计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertor