学校理工科参考丛书

·胡海清编·

线性代数解题分析

高等学校理工科参考丛书

胡海清编

线性代数解题分析

湖南科学技术出版社

线性代数解题分析

胡 海 清 编

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年2月第1版 1985年6月第2次印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：11.125 字数：254,000
印数：20,201—48,300
统一书号：13204·91 定价：1.80元

前　　言

随着科学技术、生产的迅速发展和电子计算机的日益普及，越来越多的学科及实际问题要涉及线性代数知识．因此，线性代数已成为理工科大学生一门必修的基础课．而在学习后继的专业课程中，又常常感到原来学的线性代数掌握不牢且不敷应用．这对工科学生来说，反映更为突出．原因是该课程的课时较紧，教材较简，内容较抽象而实例较少，解题偏重计算而轻视论证，以致“食而不化”．类似的情况对于正在业余补学或复习这门学科的各行各业人员也常有发生．即使是数学、力学、物理等理科学生，在初学的时候也往往觉得困难．

这一普遍存在的问题，有点象中学生学习平面几何那样，书中基本定理并不多，但几何题却千变万化。有的难度颇高，令人大伤脑筋．对于这一情况，关键是如何使学员能由浅入深、扎扎实实地掌握线性代数的基本理论和基本方法．要象对待其它数学科目一样，高度重视解题训练，深刻地理解概念，准确地抓住关键，清晰地理清脉络，透彻地把握实质．

为了提高学员的解题能力，不但应提供略高于课本题目的若干典型范例，细致交代解题方法，而且要在启发学员在分清主要题型、学会常用解法的基础上，进而能举一反三，达到熟练的程度．本书为此先大致列举该章节有关知识条目，作为解题的逻辑根据，然后对范例逐步详解剖析，有时作些适当的小结或概括，有时加些按语或注记．有相当数量的题目提供了几种解法，借以扩大眼界，开阔思路．

本书以各类全日制及业余大学理工科学生为主要对象。但全书题目也包括了数学专业线性代数的主要基本内容。因此，也可供数学专业教学参考。全书共容纳各种类型题解约530道。这些题目的安排顺序不尽合理，读者可根据实际情况，予以参考。

书后还附有适合各专业特点的考试题、自我测验题共95道，可供读者自我检查、复习之用。

在书稿编写过程中，曾得到许多老师的指导和帮助。在此，表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，实践经验不足，错误之处一定不少，敬请读者批评指正。

编　者

1983年6月

目　　录

浅谈线性代数的学习与应用

年

什么是线性代数？为什么要学习线性代数？怎样学习线性代数？这些问题，是每个初学者所关心的。下面就谈谈这几个问题，供读者参考。

一、线性代数的地位和意义

线性代数基本上是讨论矩阵理论与和矩阵结合的有限维向量空间及其线性变换理论的一门学科。它的主要理论成熟于十九世纪，而其第一块基石，二、三元线性方程组的解法，则早在两千年前，即见于我国古代数学名著《九章算术》，这使我们引以自豪。

由于线性代数在数学、力学、物理学和技术科学中有各种重要应用，因而它现在还在各种代数分支中占居首要地位。

不仅如此，该学科所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法，以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化人们的数学训练，增益科学智能都是非常有用的。

时至今日，多种专业人员都需要学些线性代数，还出于一个重要原因：随着科学技术的发展，我们不仅要研究单个量之间的关系，还要更进一步研究多个变量之间的关系。各种实际问题（不少是多元非线性的）大多数情况下，可以线性化，而由于电子计算机科学的进展，线性化了的问题又可计算出来。线性代数正是解决这些问题的有力工具。所以这门学科身价十倍，正葆其美妙之青春。

二、线性代数的特点

读者已往熟悉初等代数，很多人又学了解析几何与微分积分，但初接触线性代数，仍感困难，问题何在呢？原来，它奇峰突起，数学中有几对矛盾在这门学科中更为尖锐突出。

1.具体与抽象. 线性代数运用所谓公理化的研究方法，即把数学对象归类，从不同质的具体事物或过程中抽取共同的量的关系，作为最基本的公理、性质（定义），再从这里出发，采取统一的观点与方法，进行演绎推理等等，揭示和研究其新的性质。例如向量空间这个概念，就是从大量实例中抽象出来的。

又如（某集合内给定的）代数运算，说到底，是指一种法则，按此法则，对于该集合内任意二元素，均有唯一确定的元素与它们对应。

就是这样，线性代数显得新概念多，且与我们的直觉有一定距离。

可以这样说，抽象程度越高，则概括程度越强，适用范围就越广，但也就不易很快理解深透。

上述两例，作为定义都别开生面，不同于我们在初等数学中所习惯和熟悉的东西。我们必须从具体（实例）中去把握它，并且飞跃到理性认识水平。

2.特殊与一般. 就我们研究问题来说，或者说就我们的认识来看，总是由认识个别和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。数学更不例外。对于解析几何中的二次曲线、二次曲面的标准形研究问题，是我们大家所熟知的问题，而且有它明显的几何直观意义。对于这样一个特殊问题，我们怎样抽象到 n 维空间的一个一般问题呢？这在线性代数理论，就产生了有关二次型的研究。在二次型的研究方法中，我们采用了解析

几何中二次曲线、二次曲面化标准形的一些具体的直观的思想并将它移植到我们更一般的 n 维抽象空间上来。

二、三阶行列式，二、三维向量及现实空间……，都很容易掌握，它们有直观的几何意义。那么，一旦提出n阶行列式，n 维向量及其空间等，为什么就不易弄清楚呢？一方面，它不具体。另一方面，要吃透它的一些性质，要用完全归纳法。而我们在初等数学中常常只进行不完全归纳就“认准了”，这未必是对的。例如，二、三阶行列式有用“沙流氏”法则（即按斜线相乘，再加、减）来展开，但它对 n 阶行列式并不适用。

3.计算与论证。计算是按一定公式、法则机械地进行的。多数人容易学会；而探索一个论证要不断进行分析综合，弄不好便走错路。人们常感头痛。线性代数中大量需要论证，而且用到刚学过的比较抽象的概念，如线性相关、线性无关，虽然定义并不复杂，初学者仍觉难于掌握和运用。

即以线性代数的计算而论，如行列式求值、矩阵的初等变换等，法则虽然只几条，运用之妙，却存乎一心。其方法之好坏，具有很强的技巧性。

4.此外，不同教本采用不同体系，如线性方程组、行列式、矩阵…，各书出现先后不同，起的作用就不一般，这也给初学者阅读参考书时增加了困难。

这样看来，线性代数除具有高等数学的共性之外，其“个性”比较鲜明，我们应当很好地认识并找到对付的办法。

三、线性代数（基础部份）的体系与内在联系

现行教材比较常见的安排是：行列式、线性方程组、矩阵、向量空间、线性变换、二次型。或把二次型放在线性空间前面，在线性变换之后讲λ-矩阵、欧氏空间。还有把行列式放在矩阵后面的。也有在矩阵运算、二次型之后，接矩阵的标准形（可

包括特征值、λ-矩阵、约当标准形)，如本书．又有把矩阵标准形放在二次型前的．甚至有先从向量空间入手的，花样不少．然而，万变不离其宗，不管是按那个体系去归纳问题，安排内容，线性代数本身始终是围绕两条主线（好比铁路的两条钢轨）去解决问题的．一条是向量空间及其上的线性变换的概念和理论；另一条就是矩阵的理论．而这两个方面之间有一个联系的桥梁．这个桥梁就是“基”．在选定一组“基”下，线性变换就和矩阵之间一一对应．这样就把这两者之间的研究统一起来了．它们之间是相辅相成的．

我们认为，应当先把一种体系搞清楚，以后再参阅其他书籍，以扩大眼界、增长见识．

这些安排，既体现知识的发展与知识的由浅入深，也是各书作者对不同教学途径的尝试．我们应透过现象，抓住实质性的联系．

事实上，既然线性代数是在线性空间中研究线性变换的一门学科，线性空间就是一个最基本的概念，而线性变换则是线性空间中元素间的一种最基本的联系．线性变换的数量表示是矩阵，矩阵是线性代数最重要的部份．它贯串于各方面，因而，线性代数也叫矩阵代数．行列式是研究线性方程组的工具之一，而线性方程组是线性代数研究对象的具体模型．抓住了这些关系，纲举目张，整个线索就更清楚而具体了．

四、学习线性代数的具体要求、重点和难点

1．行列式：

① 掌握 n 阶行列式的概念与性质；

② 会运用行列式性质降阶和三角化并能综合运用，熟练地计算数字行列式，并初步掌握计算字母行列式的方法；

③ 掌握克莱姆法则，并会用它们来解“整”的线性方程组．

重点是行列式性质与计算。难点是n阶字母行列式的计算。

2.线性方程组。此处研究一般线性方程组，引入矩阵作为工具。

① 切实理解消去法和矩阵的初等变换的关系，熟悉高斯消去法；

② 理解和掌握矩阵的秩，会用初等变换及行列式来求秩；

③ 牢固掌握线性方程组有解的判定定理；

④ 正确理解和掌握齐次及非齐次方程组解的结构。

重点是矩阵的初等变换、线性方程组的解法及有解的判定法。难点是解的结构理论。

3.矩阵（此处指矩阵代数）：

① 熟练掌握矩阵的代数运算及性质；

② 掌握可逆矩阵的概念及其判别条件；

③ 掌握矩阵乘积行列与秩的定理；

④ 掌握初等矩阵的概念及其与初等变换的关系，初等矩阵与可逆矩阵的关系及用初等变换求逆阵的理论与方法。

重点是矩阵的乘积运算及求逆阵。

4.对称矩阵与二次型：

① 掌握二次型的概念及二次型与对称矩阵之间的一一对应关系；

② 掌握二次型经非退化线性变换后仍为二次型，且二者合同；

③ 理解二次型的标准形及掌握化二次型为标准形的方法（配方法、合同法。至于正交法应在特征值及欧氏空间之后才好讲）；

④ 理解复数域上、实数域上二次型的标准形唯一性及意义；

⑤ 掌握正定二次型的概念，并掌握其判别法。

重点是化二次型为标准形和正定二次型的性质。难点是惯性定理及正交法。

5.线性空间：

① 正确理解和掌握向量空间概念、性质；

② 理解和掌握线性空间的子空间的概念和方法及其交与和的概念；

③ 掌握向量的线性相关等概念及性质，并能较熟练地判断向量的线性相关性；

④ 理解和掌握向量空间的基与维数的概念，基的求法和维数的确定，子空间直和的判别定理；

⑤ 理解和掌握向量坐标的概念及其变换公式，过渡矩阵的概念及性质。

重点是线性空间的概念及向量的线性关系，基与维数。难点是线性空间的定义，向量间的线性关系。

6.线性变换。主要寻求适当的基，使线性变换的矩阵表达式最简单。

① 深刻理解线性变换的概念，掌握它的运算及简单性质；

② 掌握线性变换矩阵表示的意义和方法；

③ 深刻理解矩阵的相似、特征值、特征向量的概念，并掌握求矩阵特征多项式，特征值、特征向量的理论步骤和方法以及可对角化的条件；

④ 掌握λ-矩阵、初等因子、约当标准形的概念及有关求法（注：③、④两条通常列入“矩阵的标准形”或“λ-矩阵”等章）。

重点是寻求适当的基，使线性变换的表示矩阵最简（包括上述相似、特征值、特征向量、可对角化矩阵等内容）。难点是

线性变换矩阵表示的证明，特征值、特征向量有关定理、约当标准形。

7.欧氏空间：

① 深刻理解内积与欧氏空间的概念，向量长、夹角、距离及其求法；

② 理解度量矩阵的概念及性质；

③ 掌握标准正交基概念及求法，明白其作用；

④ 理解和掌握正交变换与正交矩阵的概念、性质及其关系。

重点是欧氏空间定义、标准正交基。难点是正交变换与正交矩阵的关系。

五、线性代数学习方法举要

针对上述矛盾的特殊性，可否采取下述方法，请读者考虑。

1.攻克“抽象化”堡垒。凡概念均经过抽象，只是程度不同罢了。对付的办法，首先是具体化。如线性空间、线性变换，书上已有大量例子，自己再想些实例，认识就深入了。很多概念都有其具体的几何背景（有不少是三维空间中“借来”的），这就给我们以驰骋想象和“按图索骥”的好机会。

其次，概念都有严格定义。要弄清概念，关键在于吃透对定义的确切的叙述。这有两个方面。一是书本的陈述是谨严语句，要一字一句地“抠”。二是要有自己简明生动的描述。概念这东西，经常是差之毫厘，失之千里。例如行列式与矩阵，外形差不多，但一个是数，一个是表，即使在一阶情形也有本质区别。要掌握一个概念。还要懂得它的反面应怎样叙述、理解，例如线性相关与无关，只知一面并非真知。

最后，检验是否正确掌握概念的标准是会用。即用抽象过的概念和理论，来解具体问题，哪怕是很简单的问题。例如零

向量单独组成向量空间吗？缺了零向量能形成向量空间吗？对初学者都是一种考验。

此外，教本上常从具体到抽象来安排教材，对抽象的东西又常给予比较具体的表现形式，如借助基底、坐标来表示向量，用矩阵来表示线性变换等等。这些地方我们亦应很好领会。

2.占领“一般性”阵地。数学中由特殊到一般的发展，是人类对不同领域的数与形的认识的深化与发展，仍然是现实的数量关系与空间形式的反映。例如n维向量，就是为了描述具有n个自由度的物理系统的状态而引入的。

教材由特殊到一般，对概念来说，是由若干特殊情况，通过（不完全）归纳而得出一般性定义的。对法则公式定理来说，则用完全归纳法得到证明（例如克莱姆法则，乃至范德蒙行列式的计算等等）。

教材处理由一般到特殊，对概念来说，是增加限制条件（如由矩阵到方阵），对法则公式定理，则用演绎推理而得。这些做法，我们应当心领神会。

其次，一般性，也即共性、整体性。比如为什么矩阵比行列式用途广？因为它是从一般性（即未知元个数与方程个数不相等）方程组引出的。有了矩阵，对问题的论述更简明，更易揭露问题的本质与整体。又如基础解系，是全部解的核心，抓住了它就掌握了全部解。所以一般化是很有必要，很有好处的。

再次，由特殊到一般，是一种推广、拓广，要从实质上加以把握。例如矩阵的加法与实数的加法同样有交换律、结合律、（对数乘的）分配律。因为矩阵的加法虽涉及$m\times n$对数，但只是“量”的增多，并无“质”的改变。矩阵的乘法为什么又无交换律呢？因为这种乘法已与两个实数的乘法有“质”的差异了。又如n维欧氏空间，关键在于定义了内积，从而具有度量性质，

而不在于维数高而已．再如n维向量（即线性）空间的结构，是齐次线性方程组解的结构的推广，这从两者表面名称来看关系并不明显，而在于实质。

3.增强论证能力．对于公理化体系，我们要使自己能适应它，要经过较严格的磨炼，以具备这种在已有概念和定理的基础上，根据定理的条件，进行演绎推理的能力．这有赖于搞清每个定理的来源、背景、地位和作用，本身的思路和方法，通过认真的模仿达到真正的创造．听课看书都要搞清道理，不能光记结论．要会分析，不能光会方法．要多问几个为什么，不要停留在表面。

4.掌握全局和局部的关系．不同教本体系虽不同，但却不外乎前面所讲的两条主线．至于某章、某节究竟是如何安排的？为什么要这样，也必须有较清醒的认识．例如“行列式”一章含克莱姆法则，为什么不放到“线性方程组”那一章内？原因是后者主要已不是研究“整齐”方程组了．又如“矩阵”一章，其实主要是矩阵的代数运算，并非包罗矩阵的一切知识，象矩阵及其初等变换乃至秩数，常在“线性方程组”中讲过了．二次型与对称矩阵紧密相连，为何有的书将二次型放到最后才讲？原因是其中正交变换要用到特征向量、欧氏空间（正交）的概念．再如矩阵的等价变换，有一般的，也有对称阵的合同、正交变换，还有一般方阵的相似变换等，这些变换除了保秩以外，分别还有哪些是不变量？这些都可作综合的比较，弄清关系。至于λ-矩阵，是常数矩阵的推广，其中正方λ-矩阵，也有行列式，伴随阵（初等λ-矩阵的）逆阵等，而一般λ-矩阵有子块、子式等概念，都有初等变换，本身又具有很多新的性质，一直到约当标准形，步步深入。

总之，脉络要理清楚，注意新旧知识间的联系，可把同类

知识归纳、总结、列表；可把容易混淆的概念进行对比研究；可把各章、节之间的联系画成“关系图”，…，方法是多种多样的。希望读者多多动脑动手，以创造的精神来进行学习。

六、线性代数应用举例

线性代数在理论上，具有较高的概括性与抽象性，已如上述。它的内容、观点和方法应用也很广。不过，对于线性代数的应用，要讲得较全面、准确，是有困难的。因此，这里只略举几点，以见一斑。

拿矩阵来说吧，它是高等数学各分支不可缺少的工具，矩阵方法在实际问题中也是非常有力的武器。按线性变换的观点，微分算子D，积分算子$\int_a^x$，都是一种线性变换。利用线性变换的有关运算，常微分方程（组）的问题就变成矩阵方程了。有些偏微分方程组可用差分法变成线性方程组用矩阵求解。在电路设计与分析中，在研究力学体系微小振动时，少不了矩阵。在规划论、对策论、排队论和数理统计等运筹学科和随机类学科中，应用矩阵更为普遍。在其它边缘学科，如控制理论、信息论，以及经济社会学科中，矩阵也不乏其应用。

再看二次型，它是由解析几何中二次曲线、二次曲面化标准形的问题提出的，虽在本学科中并不居重要地位，却也应用于很多方面。如概率统计中的正态分布，数、理、力学中很广泛的一类极值问题，网络问题中求等效网络…。正定二次型的定理可给出热力学中系统平衡的稳定条件，半正定二次型与概率论的协方差矩阵对应…。这些例子，挂一漏万，不及备载。

懂得应用，善于应用，与学好线性代数理论是互相促进的，这里就不赘述了。