高等学校教学参考书

偏微分方程概论

陈恕行 编

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u)\right)+\gamma u=f$$

人民教育出版社

高等学校教学参考书

偏微分方程概论

陈恕行 编

人民教育出版社

本书是为数学专业学偏微分方程的高年级学生及研究生编写的一本教学参考书，也可供有关专业教师参考．内容包括偏微分方程的经典理论、广义函数与Fourier变换、椭圆型方程、对称双曲组与正对称组、拟微分算子五章．

本书介绍了近代偏微分方程理论的一些最重要的结果与常用方法，并为接触该领域的最新成果提供了必要的准备知识．

高等学校教学参考书

偏微分方程概论

陈恕行　编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张11.5　字数 272,000

1981 年 1 月第 1 版　1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—11,800

书号 13012·0559　定价 1.05 元

序

为了给数学专业学偏微分方程这一方向的研究生和高年级同学提供一本有关偏微分方程基础知识的教材或参考书，我们尝试编写了这本书．希望能帮助读者在已经熟悉大学数学物理方程课程内容的基础上，能较快地了解近代偏微分方程理论的一些最重要的结果与常用的方法，并为接触该领域中最新成果提供必要的准备．

本书共分五章、第一章叙述偏微分方程经典理论中的一些内容，这些内容对于偏微分方程理论来说是极为重要的，但在大学数学物理方程的课程中又常常因时间所限而不能列入；第二章叙述广义函数理论，围绕着广义函数在偏微分方程中的应用选择题材，介绍广义函数理论中的一些基本内容，这一章也是以后几章的基础；第三章介绍椭圆型方程的泛函方法，着重指出线性椭圆型方程解的光滑性与两择性；第四章介绍对称双曲组与正对称型方程组；第五章介绍拟微分算子及其一些应用．后三章内容基本上是独立的，读者可以根据需要选择部分内容进行学习．为了帮助读者掌握这些内容，我们在每一章中都选择了一定数量的习题，供读者进行练习．

为了使读者便于阅读本书，我们仅要求读者具备一般大学课程中数学物理方程与泛函分析方面的知识．其它的专门知识，例如线性拓扑空间、抽象函数，微分流形等则尽可能地避免涉及，必要时，也将其中某些概念或结果用读者熟悉的语言重作说明与证明．当然，这也在一定程度上限制了本书的取材与内容的展开．

由于偏微分方程内容浩瀚,发展迅速，工具繁多,而本书篇幅有限,加以作者知识浅薄,所以偏微分方程领域中很多重要的内容在本书中并未涉及,例如非线性方程的研究几乎未曾遇到,又如椭圆型方程的特征值问题、抛物型方程、一般双曲型方程以及一般线性偏微分方程理论中一些重要的结果均未曾涉及，只能在此表示歉意.

书后列举了一些参考书目与论文目录，可供读者进一步钻研参考. 这些文献主要是按本书的取材来源来排列的，读者可能熟悉其它一些内容精辟、叙述清楚的偏微分方程专著与文章,但因为与本书取材关系较小,就不在那里列举了.

本书曾作为复旦大学 1978—1979 年偏微分方程专业研究生教材试用过,以后又作了进一步的修改与补充.谷超豪老师帮助我选定了教材的内容,并鼓励和帮助我编写成此书,本书的第四章是参照了他编的正对称型方程组讲义而写的. 在本书编写过程中也得到了数学系领导与同志们的大力支持. 洪家兴、是加鸿和周昌裕等同志均协助阅读了部分原稿,提出了许多宝贵的意见,洪家兴同志还帮助选配了部分习题. 对此，编者均表示衷心的感谢. 由于作者水平的限制,又缺乏足够的教学实践,在书中肯定还有许多缺点,希望同志们、读者们进一步提出宝贵的批评意见.

编　　者

目 录

第一章　偏微分方程的经典理论

§1　偏微分方程的一般概念

1. 概念、记号　含有未知函数的偏导数的关系式称为偏微分方程；如果关系式不止一个，就称为偏微分方程组．例如：

i) $a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=0$,

ii) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u$,

iii) $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$,

iv) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$,

v) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u$,

vi) $(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0$,

vii) $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}+a(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\end{cases}$

viii) $F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}u, \right)=0.$

等等．我们所研究的偏微分方程(组)，有的在物理、力学中有重要的应用，如 iii), iv), v), vii)； 有的在几何学或其它数学分支中有特殊的意义，如 vi)； 其它一些方程(组)，其形式更为一般，在偏微

分方程理论的研究中往往也是重要的.

在方程(组)中出现的最高阶导数的阶，称为该偏微分方程(组)的阶. 在上例中，i)，ii)，vii)是一阶的，iii)——iv)为二阶的，viii)的阶为$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

若有一个函数u(在方程组的情形是一组函数)在指定的区域中连续，且具有方程(组)中所出现的一切导数，且将它代入有关的方程式时使此式化为恒等式，则称此函数u为解，或古典解. 除了古典解外我们还将讨论广义解，它是古典解概念的推广，如何拓广解的意义将根据不同场合而定.

如果一个偏微分方程(组)关于所有的未知函数及其导数来说都是线性的，则称为线性偏微分方程(组)，否则，称为非线性偏微分方程(组)；在非线性方程(组)中，如果对未知函数的最高阶导数来说是线性的，那末就称为拟线性偏微分方程(组). 在上例中 i)，iii)，iv)，v)为线性的，vi)，vii)为拟线性的，ii)为非线性，viii)在一般情形下也是非线性的.

线性方程(组)最重要的性质是成立迭加原理：若u_1, u_2是某方程的解，则对任意的常数λ_1, λ_2来说，$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2$也是该方程的解. 这个性质在求解或讨论解的性质时极为重要. 在一定的条件下，我们可以根据已知的解的序列$\{u_n\}$，构造级数形式的解，或根据已知的含参数的解族来构造积分形式的解.

迭加原理对非线性方程不再成立，因而它的求解更困难些，但对于拟线性方程来说，由于它的非线性程度较弱，在处理问题时往往比一般的非线性方程容易些.

为了今后书写简明起见，我们引入以下的记号，以后使用时不再说明.

若我们在空间R^n的某区域Ω上讨论问题，R^n的坐标为$x_1, \cdots,$

x_n，则简记$(x_1, \cdots, x_n)$为x，记$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$为$\partial_i u$或$p_i$. 记$(p_1, \cdots, p_n)$为$p$. 又对于高阶导数，引入重指标$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，记$\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}u$为$\partial^\alpha u$，则上例中 viii)可以简记为

$$F(x, u, p, \cdots, \partial^\alpha u)=0.$$

利用这个记号可以将一般的非线性偏微分方程组写成

$$F_i(x, u_1, \cdots, u_m, \cdots, \partial^{\alpha(i,j)}u_j)=0 \qquad (i=1, \cdots, n).$$

这是包含n个方程的方程组，其中含有m个未知函数. 当$n>m$时称为超定方程组，当$n<m$时称为欠定方程组，$n=m$时称为确定方程组.

2. 与常微分方程的比较 对偏微分方程的研究一般总是与它的解相联系的，例如讨论解的性质、解的结构、求解方法等. 我们知道，对于一个n阶常微分方程来说，它的解的全体(除去可能的一些“奇异”解外)依赖于n个任意常数；然而对于偏微分方程来说，情形就要复杂得多.

一个偏微分方程的解可能是很多的，与常微分方程的解依赖于若干任意常数相比，它的自由度往往更大. 我们举两个例子说明之.

例 1
$$u_{xy}=f(x, y). \tag{1.1}$$

它的解可以写成

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi, \eta)d\xi d\eta+w(x)+v(y), \tag{1.2}$$

其中$w(x)$, $v(y)$为两个任意的连续可微函数.

例 2
$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=\alpha u, \tag{1.3}$$

这是α次齐次函数所满足的 Euler 关系式，对于任一α次齐

次函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它满足

$$u(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^{\alpha} u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1.4}$$

将它关于 t 求导数并令 $t=1$ 即得知 u 满足所给的方程. 但是在(1.4)式中，取 $t=\dfrac{1}{x_n}$，可得

$$u(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_n^{\alpha} u\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right)$$

于是 u 可以用一个依赖于 $n-1$ 个变元的函数 $w(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$ 写成

$$u = x_n^{\alpha} w\left(\frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

的形式，这说明(1.3)的解可以自由到依赖于一个含 $n-1$ 个变元的函数.

偏微分方程的求解之复杂性还在于，它的解一般来说很难用通解形式表出，即使对于线性方程也是如此. 我们往往更多地研究偏微分方程在一些特定条件下的解，这样一些用来帮助决定特解的条件称为定解条件. 在讨论常微分方程的特解时也要利用定解条件，那时的定解条件往往是在给定区间(有限或无限)的两端对未知函数的值或其他性质加以某种限制；而在偏微分方程的情形，由于自变量在高维空间中变化，其变化的区域更复杂，因此在区域边界上给出的定解条件，也必然有更多的形式. 我们一般称给定在区域边界上的定解条件为边界条件. 在某些情况下，出现在方程中的某个自变量可以赋予"时间"的意义，(例如前面列举的iv)，v)，从方程的来源可知 t 表示时间)，而 $t=t_0$ 的超平面又恰为所考虑区域边界的一部分，则将 $t=t_0$ 超平面上给出的边界条件称为初始条件.

近代偏微分方程理论的研究发现了一些奇特的现象，虽然许多常见的偏微分方程在不考虑定解条件时，解的自由度很大，但也有许多偏微分方程竟连一个解也不存在，即使在一点的任意小的

邻域中也是如此. 1957 年 Hans Lewy 就给出了一个这样的例子. 他所构造的方程是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f,$$

他证明了, 对很多无限次可微的函数 f, 在原点邻域不存在解 u①.

因此, 对于偏微分方程的研究方法将与常微分方程有很大的不同, 从而形成了两个独立的数学分支. 尽管如此, 常微分方程理论的成果与方法对于偏微分方程仍是很重要的, 我们在今后的讨论中将看到这一点.

习　题

1. 试求下列偏微分方程的通解.

1) 若 $f(x,y)$ 为已知函数, $u(x,y)$ 满足的方程是

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

2) $u_{xx}-a^2u_{yy}=0$, (a 为常数),

3) $u_y+uu_x=0$.

2. 设 f 为其变元的任意函数, 试作出一个偏微分方程以下列形式的解为其通解:

1) $u=f(x^2-y)$,

2) $u=yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$,

3) 隐函数形式: $f(x^2+y^2,u)=0$.

§2　一阶拟线性方程的几何理论

现在我们着重从几何的观点讨论一阶拟线性偏微分方程的求

① H. Lewy, *An Example of a Smooth Linear Differential Equation without Solution*, *Ann. Math.* 66 (1957) 155—158.

解，并在下一节进一步讨论非线性方程的情形. 以下总假定在讨论中所出现的函数是实函数，它的各阶导数是连续的，而不再每次特别声明.

1. 特征线 为了使问题简明起见，我们先讨论具两个自变数 x, y 的一阶拟线性方程

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u) \tag{2.1}$$

这里 a, b, c 均为 x, y, u 的已知函数，一阶导数连续，且 $a^2+b^2\neq 0$.

若把 x, y, u 作为直角坐标系来考虑，微分方程(2.1)的解在 (x, y, u) 空间中可以用一个曲面表示，曲面在点 (x, y, u) 处的法向 $\boldsymbol{n}$ 可以用 $(u_x, u_y, -1)$ 表示，条件(2.1)就表示法向 $\boldsymbol{n}$ 与方向 (a, b, c) 正交. 于是，曲面 $u=u(x, y)$ 在点 (x, y, u) 处的切平面位置不是任意的，从它的法向与方向 (a, b, c) 正交知，该切平面必位于一个平面束中，这个平面束的轴向就是 (a, b, c)，我们称该平面束为Monge 束，称Monge 束的轴为Monge 轴，并称向量 $\boldsymbol{m}=(a, b, c)$ 为Monge 向量.

所有Monge 向量在 x, y, u 空间形成一个向量场，这个向量场的积分曲线称为特征线. 决定特征线的方程是

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y,u), \frac{dy}{ds}=b(x,y,u), \frac{du}{ds}=c(x,y,u). \tag{2.2}$$

(2.2)称为(2.1)的特征微分方程组. 特征线与方程(2.1)的解有如下的关系:

定理 1 $u=u(x, y)$ 是(2.1)的解的充分必要条件是，经过 $u=u(x, y)$ 上每一点的特征线落在该曲面上.

证明 先证明充分性，由于(2.1)式表示解曲面 $u=u(x, y)$ 在空间每点的法向与Monge向量正交，而等式(2.2)表示特征线切向就是Monge 向量的方向，所以，当特征线落在曲面 $u=u(x, y)$ 上时，就能使(2.1)成立，于是 $u=u(x, y)$ 为(2.1)的解.

再证明必要性．若 $u=u(x,y)$ 为(2.1)的解，(x_0,y_0,u_0) 为曲面上一点，我们将 $u(x,y)$ 代入(2.2)的前两式，得

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y,u(x,y)), \tag{2.3}$$

$$\frac{dy}{ds}=b(x,y,u(x,y)).$$

并以 $s=0$ 时 $x=x_0$ $y=y_0$ 作为初值解此方程组，得到 $x=x(s)$，$y=y(s)$，再代入 u 的表达式，得

$$u=u(x(s),y(s))=u(s). \tag{2.4}$$

由于

$$\frac{du}{ds}=u_x\frac{dx}{ds}+u_y\frac{dy}{ds}=au_x+bu_y=c,$$

故 $x=x(s)$，$y=y(s)$，$u=u(s)$ 为特征线，又由(2.4)式知它位于曲面 $u=u(x,y)$ 上，且过 (x_0,y_0,u_0) 点．

证毕

这个定理说明，作为方程(2.1)的解的积分曲面是由特征方程组(2.2)的解——特征线所织成的，且只可能是这样．

2．Cauchy 问题　设在 x,y,u 空间中有曲线 C：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$u=u(t)$，要寻求过曲线 C 的积分曲面，这称为 Cauchy 问题．这里假定 $x(t)$，$y(t)$，$u(t)$ 均有一阶连续导数，且 $x_t^2+y_t^2\neq0$．

我们通过 C 上每一点作一条特征线，从而得到单参数的特征线族

$$x=x(s,t),y=y(s,t),u=u(s,t) \tag{2.5}$$

根据常微分方程组的解对初始条件的连续依赖性知(2.5)中的函数关于 s,t 都是连续可导的，于是，如果利用(2.5)的前两个函数能将 s,t 用 x,y 表出，则这族曲线就形成一张曲面．为此，充分的条件是沿曲线 C 的 Jacobi 式

$$\Delta=x_sy_t-y_sx_t=ay_t-bx_t$$

不为零，它表示曲线C的切线方向与特征线方向在x,y平面上投影的夹角不为零.

于是，只要在C上$\Delta\neq0$，则u可以写成x,y的函数，由定理1知，$u=u(x,y)$满足方程(2.1)，且过曲线C，这就得到了Cauchy问题解的存在性. 又由定理1知，过曲线C的每个解都必包含过C上每点的特征线，而常微分方程组(2.2)在给定初始条件下的解是唯一的，所以过曲线C的积分曲面也是唯一的.

如果在C上$\Delta=0$处处成立，则可能问题无解. 在问题有解的情形，由于$x_t:y_t=a:b$，故可以重新选择参数（仍记为t），使$x_t=a$，$y_t=b$，而此时

$$u_t=u_x x_t+u_y y_t=au_x+bu_y=c,$$

于是曲线C本身就是特征线. 这时，过曲线C的积分曲面可以有无穷多张. 事实上，过C上任一点作曲线C'，使得沿C'的Jacobi式Δ不为零，则由前面的讨论知道存在一个过C'的积分曲面π，显然，π必含曲线C，从而它是原来的Cauchy问题的解. 但是，由于C'的作法是任意的，因此过曲线C的积分曲面π也有无穷多个，这些曲面均相会于特征线C，以C作为其分枝曲线.

于是，我们将上面的讨论总结如下：

定理2 在前面所述的Cauchy问题中，若在初始曲线C上处处有$\Delta\neq0$，则在曲线C的邻域存在唯一的解. 若沿着曲线C处处有$\Delta=0$，则或者Cauchy问题无解，或者C为特征线且Cauchy问题有无穷多个解.

注1 作为Cauchy问题的解$u=u(x,y)$，要求它在C及C的邻域中连续可微，否则，可能在某非特征线上满足$\Delta=0$，却有一个通过C的积分曲面.（参看下面的例）

注2 若在C上某一点$\Delta\neq0$，则在该点邻近均有$\Delta\neq0$，从而Cauchy问题在该点邻域可解. 若仅在C上某些点$\Delta=0$，则可能

导致更复杂的情形.

例 1 考虑微分方程

$$uu_x+u_y=1 \tag{2.6}$$

分别过空间曲线

$$C_1:\ x=t \qquad y=t \qquad u=0$$

$$C_2:\ x=\frac{1}{2}t^2,\ y=t,\quad u=t,$$

$$C_3:\ x=t^2,\quad y=2t,\ u=t,$$

的积分曲面.

解 写出对应的特征微分方程组

$$\frac{dx}{ds}=u,\ \frac{dy}{ds}=1,\quad \frac{du}{ds}=1.$$

它的解为

$$x=x_0+u_0s+\frac{s^2}{2},$$

$$y=y_0+s,$$

$$u=u_0+s.$$

因而过 C_1 的特征曲线族为

$$x=t+\frac{s^2}{2},\ y=t+s,\ u=s.$$

由于 $\Delta(s,t)=s-1$,当 $s=0$ 时不为 0,故过 C_1 有唯一的积分曲面存在. 容易通过消元法得知此解的表达式为

$$u=1-\sqrt{1+2(x-y)}.$$

对于 C_2 的情形. 特征曲线族为

$$x=\frac{1}{2}(s+t)^2,\ y=s+t,\ u=s+t.$$

此式仍旧是 C_2 的表示式,故 C_2 为特征线. 为了作出过 C_2 的积分曲面,需另作一条曲线 C_2',例如它的方程为