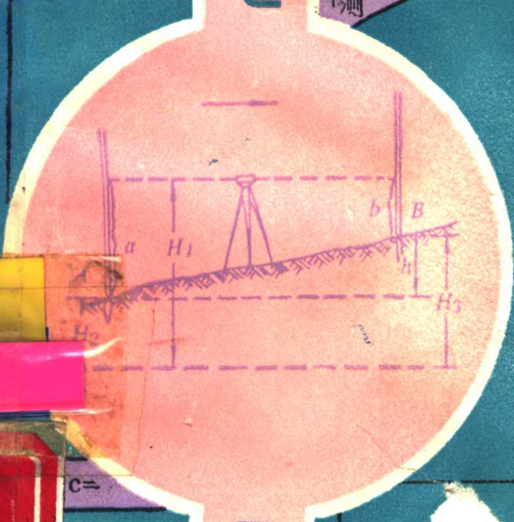
电算在测量中的应用

黄加惠　编著



TONGJI DAXUE CHUBANSHE

大学出版社

电算在测量中的应用

（测量程序设计）

黄加惠　编著

同济大学出版社

（沪）204号

内 容 提 要

测量计算，名目繁多，过程复杂。本书主要介绍测量平差的程序设计，兼顾回归分析、样条拟合的程序。在线性方程组解一章中，密切结合测量实际，选用最简便的数学模型进行高斯约化和逆矩阵计算，并且还给出稀疏矩阵的形成方法与答解。

为了顾及在测量平差中的特殊情况，本书还介绍正交变换和共轭斜量法的具体应用，单纯形法解“最小和”平差问题。每章均阐明计算技巧和程序编制要点，还附有实例，可作为测量工作的参考书。

责任编辑　韩志敏
封面设计　陈益平

电算在测量中的应用
（测量程序设计）
黄加惠　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
浙江上虞科技外文印刷厂排版
江苏启东市印刷三厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：5　字数：127千字
1991年11月第1版　1991年11月第1次印刷
印数：1—3000　定价：1.60
ISBN 7-5608-0866-2/O·84

目　录

第一章　电子计算机系统的组成和微机使用

电子计算机已经广泛地应用于科学计算和信息管理等方面。就计算机系统的大小可分为：巨型机、大型机、中型机、小型机和微型计算机，但这些分类没有明显的界限，也不是一成不变的。

• 巨型机：用于大型科学数据处理方面性能非常高的计算机系统。这类计算机一般都采用并行的多处理机，每秒向量运算速度一亿次以上，价格可达数百万美元。1983年我国研制成功的“银河”计算机就属这类。

• 大型机：高性能大型通用计算机系统，其价格超过一百万美元。在80年代初生产的大型机中，已采用双处理机或多处理机结构，应用向量运算技术，从而大大提高了运算速度，其运算速度可达每秒千万次以上。我国在1983年研制的“757”大型计算机，每秒向量运算为一千万次。

• 中型机：是一种通用计算机，计算速度在每秒几十万次至几百万次之间。内存由几兆字节至几十兆字节不等。例如我校计算中心的Siemens“7.536”。

• 小型机　也是一种通用计算机，常常可根据具体的专门应用进行配置。价格在2万至20万美元之间。高档小型机的字长32位，体积较小，结构简单，易于操作、便于维修等特点。小型机往往把处理器、存储器、磁盘机和电源装在一个机柜里，使用环境无特殊要求，故被广泛应用于科学计算，如实验室计算，计算机辅助设计与制造(CAD/CAM)、地震和气象的实时信息处理、地籍数据管理和图像处理等。

• 微型计算机(Microcomputer)：微型计算机的诞生和迅速

发展是七十年代计算机发展的最重大事件，被人称之为第二次计算机革命。1946 年问世的 ENIAC 被认为是第一次计算机革命的开端，它是一个庞然大物，用了 18000 支真空管，重达 30 吨，功耗 140 千瓦。而一台完整的微型计算机系统只有打字机那么大，功耗只有几瓦，运算速度比 ENIAC 快几十倍，价格低于 1 万美元。这类机器有我国的长城 0520 机、APPLE Ⅱ、TRS-80、IBM-PC、VICTOR-9000 等。

计算机也可以从其用途来分为：

• 用于科学计算和信息管理方面的通用计算机。

• 用于过程控制的专用计算机。如数控机床用的计算机。

计算机系统的硬件组成可分为计算机的基本组成和外围设备。外围设备又包含计算机的基本输入/输出设备以及各种辅助设备，辅助设备的配置一般都与计算机的专门用途或原来扩充能力有联系。下面我们作简略介绍。

§ 1-1 计算机系统的基本组成

计算机系统是由三个主要的子系统组成：处理器，也称中央处理器(CPU)、存贮器和输入/输出（I/O)。它们的关系如图 1-1。

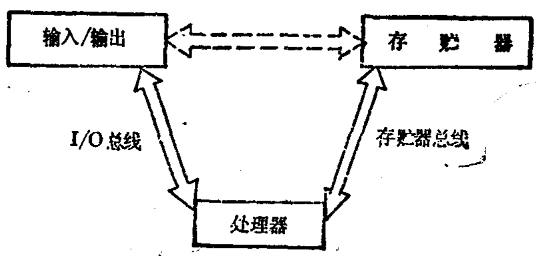


图 1-1

处理器是计算机的心脏，包含有算术逻辑运算单元、累加器（又称寄存器)、程序计数器、标志器、以及数据与地址总线等。它的性能优劣直接影响到计算机本身。随着科学技术的发展，计

算机工艺的不断改进，处理器的性能会有更大的提高。处理器的性能有如下三个主要方面：处理器的字长、处理器内部的寄存器数目和时钟频率。处理器的字长反映了外理器内部的执行部件可以同时处理二进制的数目和内部数据总线的位数，它直接影响计算精度、功能和速度。大型机的字长为32—64位；小型机为16—32位。对于一台字长8位的微型机，若要运算32位字长（单精度实数）的加法，则要算4次且要处理每次的进位。另外，若要将刚才加法得到的结果传送到其它设备上，则要用4个执行周期的时间。寄存器数目的多少也是处理器主要性能之一，寄存器的作用是存放计算的中间结果和某些特殊的操作。时钟脉冲发生器是处理器控制部件的主要元件，时钟脉冲是用来控制和协调整个计算机工作，直接反映了计算机的运算速度。

计算机的存贮器分为主存贮器（内存）和辅助存贮器（外存）两种，内存的特点是存取速度快，故常用来存放执行程序的指令和程序运行期间的中间数据。由于内存元件的造价较高，故内存容量是有限的。这里所讲的内存是属于读/写存贮器，也叫随机存取存贮器(Random Access Memory)，简称为RAM。它可以从存贮器中任意选择的地方取出信息（称为读数），也可以把信息重新存入到任意选择的地方去（称为写数）。除了RAM外，还有一种叫做只读存贮器(Read Only Memory)，简称ROM。这种存贮器在存入数据以后不能用简单的方法更改，在工作只能读出，不能随时写入。只读存贮器的单元结构十分简单，它的集成度很高，因此常用ROM作为固定信息（如汉字库等）和启动程序的存贮器。在只读存贮器中，还有可编程序只读存贮器(PROM)和可改写只读存贮器(EPROM)，但更改只能改写一次。

计算机的RAM存贮器是存放当时正常运行的程序代码（操作系统）和用户程序代码，以及用户程序开设的变量、数组等。RAM容量的大小，直接反映计算机的处理能力。如果主存贮器的容量不够，则要用辅助存贮器。这种技术被称为虚拟存贮技术，它能给用户提供比实际存在的主存贮器容量大得多的空间。

计算机的辅助存贮设备有磁鼓、磁盘、磁带等，其中磁盘较广泛地用于计算机系统中。磁盘是一种可以直接存取的辅助存贮设备。所谓直接存取就是指可随时存取磁盘上的任何一块信息，不必从头到尾访问而花费大量的时间。磁盘类似于唱片，但记录方式不同于唱片。唱片是以螺线形沟槽的深浅来记录声音信号，而磁盘是以一圈圈同心圆磁道的磁记录装置。磁盘有硬磁盘(Hard disk)和软磁盘(Floppy disk)之分。硬磁盘在机器工作时始终是以高速运转，因此它的存取速度较快。软磁盘就大小来分有：8英寸、$5\frac{1}{4}$英寸和$3\frac{1}{2}$英寸三种。软磁盘按记录密度又可分为单密度和双密度两种。从使用的盘面来看，有单面盘和双面盘之分。具体使用时还要依软盘驱动器的规格来选择，单面驱动器用双面盘，只能一面有效；而双面驱动器也能使用单面盘。每面的磁道数目也各不相同，有的40磁道，有的80磁道。各种磁盘机使用的磁盘容量也各不相同，有的只有100 kB(kB是千字节)左右，也有的300 kB，600 kB，最高可达1200 kB。有一点应注意的：磁盘容量完全取决于磁盘驱动器，取决于对磁盘格式化的密度不同。

磁带也是一种磁记录装置，磁带上存取数据是有序排列的，取出时也得按顺序访问，这就要占据一定的存取时间。但由于磁带的容量极大，故常被用存贮那些信息量大，顺序性强的数据。

计算机为了与外界进行数据交换，或接受外界的控制信息，必须有输入/输出设备，其中有键盘、显示器等。

§1-2 计算机系统的主要外围设备

外围设备是计算机与人联系的桥梁，计算机计算结果给人以直观地了解结果，都需要外围设备。具有外围设备的计算机，才叫做计算机系统。计算机系统的外围设备种类繁多。上节讲的键盘和显示器属于基本的外围设备。这一节还要讲打印机、绘图仪。

一、接口

计算机为了与外围设备联接，或与其他计算机或电子设备进行通讯，需要接口电路把它们各自电性能匹配起来。数据的传送有并行和串行之分。一般总是把一个字节（即一个 ASCII 字符）作为一个传送单元。并行传送是把一个字节的 8 位二进制数并排着在一个周期内发送或接收完毕。而串行接口是把一个字节的8位排成时间上的纵队，一位接一位传送，要占据 8 个周期才能完成。国际上已把这两种接口定为标准接口，并有固定的插头座，使用极为方便。并行接口的电缆插座一般用 36 芯的，这个接口是单向传输信息，一般用在打印机、绘图仪等输出设备上。串行接口常被用来作异步通讯。异步通讯可以是计算机与计算机，也可以是计算机与外围设备或其他电子仪器。这种通讯可以是短程的，也可以是远程的。串行接口 RS-232-C 电缆插座一般是 25 芯的。

二、打印机

打印机的打印方式有行式和点阵式两种。行式打印机是一行一行打印字符的印刷机。其特点是打印速度快，字迹清楚，但结构复杂 体积大，常用于中大型计算机系统。点阵式打印机是由打印头、走纸机构、色带控制线路等部分组成。点阵打字原理是靠一列钢针击打色带印在纸上而成。每一根钢针的驱动是由一块电磁铁吸合来实现。

点阵式打印机的钢针根数也有不同，一般打印 ASCII 字符用 5×7（5 列 7 行的点阵）的印字方式，打印头有 7 针的和 9 针的点阵。为了快速打印汉字，24 针的点阵打印机已得到应用。

点阵式打印机的特点是体积小，低噪声，因而广泛地用于微型计算机系统，它不仅可以完成行式打印机的所有字符打印，还可以打印汉字、图形。

三、绘图仪

绘图仪可分为幅式（平面型）和条式（滚动型）两大类。就笔头的驱动方式而言，有直线同步方式、直流伺服方式和步进马达方式三种。按照这两类分别组合，绘图仪就有很多种类。不论何种形

式的绘图仪，都是通过驱动X和Y两个方向的电机，运动笔头，在图纸上画出图来。

绘图仪的基本动作有：归零、取笔、换笔、抬笔移动、落笔移动、画一定的符号及印字等。

绘图仪的笔头移动的最小步长，称为分辨率，一般为0.1mm。绘图仪的精度主要取决于步长。

§1-3　测量程序设计概述

在上两节中，我们介绍了计算机系统的硬件组成。如果把计算机硬件比作人的躯体的话，则程序是人的逻辑思维，是行动的意向。可见，程序在整个计算机系统中有着极其重要的地位。

程序又称软件。软件有操作系统、系统软件、应用软件、用户软件等。这些软件都是由计算机的基本指令组成的、能指挥计算机完成某一动作的一系列指令集。

操作系统的版本繁多，在微型计算机系统中常用的是MS-DOS和CP/M操作系统。操作系统是管理各种软件资源，如系统处理程序，各种编译程序，应用程序、标准过程和函数、以及程序间通讯信息等等，使之软硬资源协调一致，并高效地完成各种类型的复杂的任务。

测量程序是用户软件中的一个分支，其中有天文大地测量、卫星大地测量、摄影测量、工程测量、地籍测量和土地信息管理等等的程序。本书主要是介绍测量平差程序的编写方法。测量平差包括概算（归心改正、投影改正、各类条件闭合差的验算等），近似坐标计算、误差方程式的建立、组成法方程式、法方程的答解、精度评定以及误差椭圆的表示方法等。其中法方程的系数矩阵又可分为两维数组存贮、一维数组存贮和按稀疏矩阵存贮。在通常的情况下，以高斯约化法解，在这个基础上，又介绍正交变换法和共轭斜量法直接解算误差方程式的方法。

在程序设计中，首先要考虑用户使用方便，因此在观测值输入

时，尽量与观测值手簿或记簿一致；其次，输出格式的可读性要高，输出内容齐全易读。此外，程序设计还要顾及运算速度和计算精度等问题。

§1-4 数值运算的精度问题

一、近似计算的误差积累和传播

当程序正确编出后，在通用电子计算机上实现解题运算，其结果应该是足够准确的。但是有时却不然，由于种种原因而产生误差。其中算法对误差的传播和积累有很大的影响，以及方程组本身对误差积累也是起着重大的作用。且看下面几个例题。

例一，求方程 $x^2+(\alpha+\beta)x+10^{10}=0$ 的根，这里 $\alpha=-10^{10}$，$\beta=-1$。

解：应用 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式编制程序

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

其中：$-b=-(\alpha+\beta)=10^{10}+1=(0.1+0.00000000001)\cdot 10^{11}$。如果计算机只保证十位有效数字，这时 β 这个量在上式计算中不起作用，则 $-b=-\alpha=10^{10}$。同样

$$\sqrt{b^2-4ac}\approx|b|=10^{10}$$

解得两个根是：

$$x_1=10^{10}$$

$$x_2=0$$

而原方程的精确解为

$$x^2-(10^{10}+1)x+10^{10}=0$$

分解为 $$(x-10^{10})(x-1)=0$$

故 $$x_1=10^{10},\quad x_2=1$$

出现第二个根的谬误，原因是很明显的，它是在做加法和减法运算时要“对阶”，出现大数“吃掉”小数，而使误差积累，导致最后计算 x_2 时失败。

大数"吃掉"小数，有时是许可的（如本例的 x_1），有时是不允许的（本例的 x_2），具体问题要作具体分析。在测量平差中，有时为了处理某个特殊问题，加大某观测值的权，以使该观测值的改正数趋近于零（即作为强制条件），这时就要注意大数"吃掉"小数的现象。

如果改变上例的算法，而采用韦达定理

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

则数学模型为：

$$x_1 = (-b - \mathrm{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

$$x_2 = c/ax_1$$

求得的结果是正确的。式中 $\mathrm{sign}(b)$ 是取 b 的正负号。

例二，为了说明凑整误差，给定 $f(x) = 10^7(1-\cos x)$，试以 4 位有效数字计算 $f(2°)$ 的近似值

解： 方案 1

$$\cos 2° = 0.9994$$

$$f(2°) = 10^7(1-0.9994) = 6000$$

方案 2　由于 $(1-\cos x) = 2\sin^2 x/2$

$$f(2°) = 10^7 \cdot 2 \cdot \sin^2 1° = 6125$$

两个方案得出两个结果，究竟哪个正确？先来分析误差来源；二者的凑整误差 ε 均为 $\varepsilon < 0.5 \cdot 10^{-4}$。但在方案 1 的算法中，有效数字严重损失，所以二者的相对误差是不等的。如

方案 1 的相对误差 $< \dfrac{0.5 \times 10^{-4}}{1-\cos x} \approx \dfrac{1}{12}$

方案 2 的相对误差 $< 0.5 \times 10^{-4} \dfrac{2\sin x/2}{\sin^2 x/2} \approx \dfrac{1}{175}$

显然，方案 2 的算法较接近答案。可见，在有效数字严重损失的情况下，应对公式进行处理，尽量避免减法的运算。如 x 是小角时，下列变换是恰当的

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

例三、给定三元线性方程组求解

$$Ax=b$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

经精确计算得

$$x_1=-\frac{173}{7}=-24.714$$

$$x_2=\frac{600}{7}=85.714$$

$$x_3=-\frac{450}{7}=-64.286$$

若取至三位小数来计算，即

$$A=\begin{bmatrix}0.500 & 0.333 & 0.250\\ 0.333 & 0.250 & 0.200\\ 0.250 & 0.200 & 0.167\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0.143\\ 0.333\\ 0.250\end{bmatrix}$$

解得：

$$x_1=-21.145,\quad x_2=72.063,\quad x_3=-53.125$$

与精确解比较，相对误差约达 1/6。误差的来源主要是在解算过程中有效数字的损失，本例经二次消去后，只剩下一位有效数字。

在有效数字严重损失的情况下，对右端项的计算精度要求极高。如果右端项存在误差 ε

$$b=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}+\varepsilon\\ \frac{1}{3}+\varepsilon\\ \frac{1}{4}+\varepsilon\end{bmatrix}$$

那么所得的解与原来解之差为 $\delta x_1=492\,\varepsilon$，$\delta x_2=-1860\,\varepsilon$，$\delta x_3=$

1500 ε。这就是说，右端项存在很小误差 ε 时，对答解产生很大影响，本例误差放大了一千多倍。

这个例子说明，确实有这样的方程组，它的解与方程系数密切相关，我们说这类方程组数值解是不稳定的。除了精确计算右端项外，还应改变其算法。因为算法对误差的传播和积累有很大的影响，为了减少这种影响，算法的选取是很重要的。例如：在消去法中采用选主元的技巧，会减少这种影响；有时采用数值稳定的"正交变换"的算法，可以收到很好的效果。又如在"秩亏自由网平差法"对广义逆的计算中，附加条件法、S 变换以及迭代法都是较好的算法。

二、误差分类

数值运算的误差可分为：模型误差、观测误差、方法误差和舍入误差等。

例如，钢尺的尺长方程式（即数学模型）

$$L_t = f(t)$$

按台劳级数展开：

$$L_t = f(t_0) + f'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}f''(t_0)\Delta t^2 + \cdots$$

当 $t_0 = 0$ 时，并令

$$\alpha = f'(0), \quad \beta = \frac{1}{2}f''(0), \quad \gamma = \frac{1}{6}f'''(0)$$

$$l_0 = f(0)$$

则 $$l_t = l_0 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$$

或 $$l_t = l_0 + \alpha t + \beta t^2$$

或 $$l_t = l_0 + \alpha t$$

式中：L_t 是钢尺在温度 t 时的长度；l_0 是在零度时的长度；l_t 是数学模型的长度；α、β、γ 为系数。其中 $L_t - l_t$ 称为模型误差（此处暂不考虑观测误差）。

在数学模型中系数 α、β、γ 等可以通过实验测定的，因此带来的误差，叫做观测误差。当测定后作为常系数应用，仍属于模型误

差。例如：钢尺长 $l'=30$ 米，设系数误差为

$$\delta\alpha=\pm6\cdot10^{-7},\quad \delta\beta=\pm6\cdot10^{-7}$$

按误差传播，计得 l_t 的中误差 m_l 应是

$$m_l=\{(t\delta\alpha)^2+(t^2\delta\beta)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

当 $t=25$℃ 时

$$m_l=\pm3.75\cdot10^{-6}$$

相对中误差约为$\frac{1}{7.5}$万。

如果把尺方程式改写以 $t=20$℃为标准长度（即在 $t=20$℃时来检定尺长），这时

$$l_t=l_{20}+\alpha(t-20)+\beta(t^2-20^2)$$

式中 α, β 仍是零度时的系数。当 $t=25$℃ 时计得相对误差为$\frac{1}{150\text{万}}$。可见，选用不同的数学模型有着不同的模型误差。

在测量平差中，有时为了减弱某些系统误差的影响，在数学模型中引入若干参数来进行平差，这些参数引进与否也是一种模型误差。

在解决实际问题中，有时数学模型很复杂，无法作精确的解算，就必须建立一套行之有效的近似方法，它与模型的精确解之差称为方法误差。例如，大地测量中一些椭球面上的解算公式，都是按级数展开为近似公式进行计算。又如在平差计算中，把非线性方程化为线性方程，而使条件平差与参数平差结果有差异等等，都是属于方法误差。

计算时都是有限位数进行的，所以数值解的每一步都可能产生误差，这种误差称为舍入误差。舍入误差的大小，与有效数字的位数有关，当有效数字严重损失时，舍入误差影响就大。

三、注意简化计算步骤，减少运算次数

虽然电子计算机的运算速度快，对初等函数的一次计算可在几毫秒的时间内完成，但是在一个算题内可能要重复几万次或更多次运算，因此能用更经济、更快速的子程序来完成，不但可节省

计算时间，还能减少舍入误差，这是数值计算必须遵循的原则。

对于初等函数的生成和建立最经济的数学方案，应尽量减少乘除次数，以节约用机时间，而对加减法可不必较多考虑它们的次数。此外，还应使方案灵活，使程序具备充分的普遍性，能在任何情况下，都能得到足够精确的近似值。

例一，计算 x^8 的值

如果逐个相乘要用 7 次乘法。若写成

$$x^8=((x^2)^2)^2$$

写成 $x\cdot x\Rightarrow x$ 循环三次，只要做三次乘运算即可。

例二，三角函数

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots-\frac{x^{11}}{11!}$$

若用例一的方法，可写成如下程序段：

```
10  INPUT X
20  Y=-X*X:SN=X
30  FOR I=2 TO 11 STEP 2
40  X=X*Y/(I*(I+1)):SN=SN+X
50  NEXT I
```

该程序段共做 16 次乘法。或者将上述模型改写为：

令 $y=x\cdot x$，

$$\sin x=x(1-y/2\cdot3(1-y/3\cdot4(1-\cdots(1-y/10\cdot11)))))$$

其结果是相同的。

类似地，子午线弧长公式

$$S=A\cdot\varphi-B\sin\varphi\cos\varphi-C\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$-D\sin^5\varphi\cos\varphi-E\sin^7\varphi\cos\varphi$$

令 $y=\sin^2\varphi$

$$S=A\cdot\varphi-(((E\cdot y+D)y+C)y+B)\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

只要做 7 次乘法和调用二次三角函数过程。

这类多项式在实践中经常会碰到，如高斯投影公式等等。