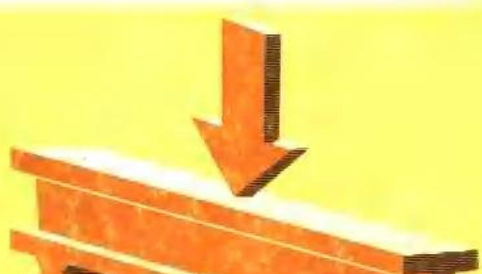
工程力学

下　　册

三十八所院校联合编写组



广西人民出版社

BW44/23

目　录

引　言

一、材料力学的任务

在静力学中，曾忽略了构件的变形，把它作为刚体来处理。实际上，构件在载荷作用下，都要发生形状和尺寸的改变；如果载荷过大，还将引起构件的破坏。因此，为了保证机械或结构物能够正常工作，一般地说，受力构件必须满足以下一些基本要求：

1.构件不能发生破坏，即构件应具有足够的强度。所谓强度，是指构件抵抗破坏的能力。例如，图1中的起重钢丝绳，若截面尺寸过小，就会因强度不足而拉断。

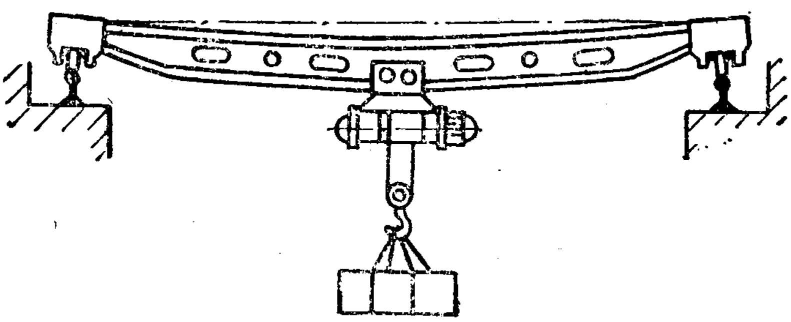


图 1

2.构件的变形不能过大，即构件应具有足够的刚度。所谓刚度，是指构件抵抗变形的能力。例如，图1中起重机的主梁，如果变形过大，就会影响起重机的正常工作。

3.对于受压的直杆，须具有足够的稳定性。实践证明，受压的直杆，随着外力的增加，有时会突然变弯，以致丧失正常工作的能力。这种现象称为丧失稳定。例如图2所示的推箱气缸，其活塞杆是一受压的直杆，若直径太小，工作时杆将被压弯，推移砂箱的动作将不能正常地完成。

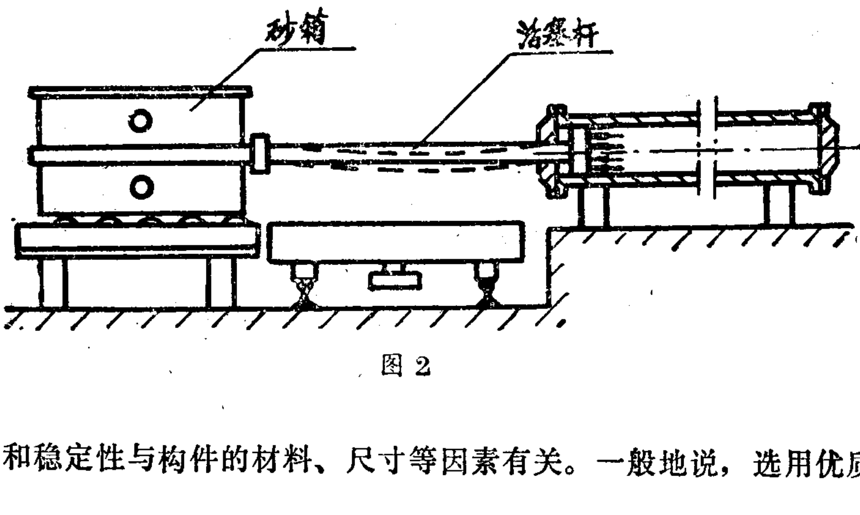


图 2

强度、刚度和稳定性与构件的材料、尺寸等因素有关。一般地说，选用优质的材料和较

大的截面尺寸，构件承受载荷的能力（简称承载能力）就比较高。然而，不适当地提高某个构件的承载能力，却会造成浪费。材料力学的任务，就是通过对有关构件的强度、刚度和稳定性问题的研究，找到构件的形状、尺寸及材料性质等因素与所受载荷之间的内在关系，从而能在既安全可靠又经济节省的前提下，为构件选定适当的材料与合理的截面形状和尺寸。

在学习材料力学理论的同时，应对材料力学试验有足够的重视。因为构件的承载能力同材料的机械性质有关，而材料的机械性质只能用试验的方法才能测定。此外，在实践中常迁到一些较复杂的问题，单凭理论分析是难于解决的，而必须配合以科学实验。因此，理论分析和实验方法在解决材料力学问题时，都是重要的。

二、基本假设

当对构件作强度、刚度或稳定性计算时，为了使分析与计算得以简化，根据材料力学研究的范畴和材料的基本性质，对材料作出以下两个基本假设：

1.均匀连续假设　假定物体内各处的性质都相同，而且材料内部没有任何空隙，即材料密实连续。根据物理学知道，组成物体的粒子之间是不连续的，同时，真实物体也并非绝对均匀的。例如，金属具有结晶的结构，晶体与晶体交接处的性质与一个晶体内的性质是有所不同的。但由于材料力学中研究的物体比起粒子或晶粒要大得多，所以，构件的力学性质，并不是指材料在微小范围内的性质（微观的性质），而是指材料总体的平均性质（宏观的性质）。根据以上理由，可以近似地认为构件的材料是均匀而连续的。

2.各向同性假设　假定材料沿各个方向的力学（机械）性质均相同，这种材料就称为各向同性材料；而木材等材料，沿不同方向的力学（机械）性质却不相同，这种材料就称为各向异性材料。工程上常用的金属材料，就其每一晶粒来讲，它的力学性质虽具有方向性，但晶粒数量极多，而晶粒的排列又是不规则的，所以按统计学的观点，即从宏观上看，对于常由于构件中包含的用的一些材料，可以认为是各向同性的。

在材料力学中所研究构件的变形，都是弹性变形。所谓弹性变形，是指在载荷卸去后能完全消失的变形。

当构件承受载荷时所产生的变形与构件原有几何尺寸相比是微小的，就称其为小变形。在材料力学中所研究的主要是小变形问题。因此，在研究构件的静力平衡时，一般就可以近似地认为：外力的作用点和方向均不随构件的变形而改变，构件的尺寸可按变形前的尺寸进行计算。这种简化的计算所造成的误差是微小的。

总而言之，在材料力学中是把构件的材料看作为均匀连续、各向同性的变形固体，而且在大多数情况下，只研究构件在弹性范围内的微小变形问题。

三、杆的基本变形形式

构件的形状是多种多样的，其中有些构件，其长度远大于横截面尺寸，这类构件称为杆。如果杆的轴线（横截面形心的连线）是直的，就称其为直杆。材料力学中主要的研究对象是直杆。

在外力作用下，杆件的变形虽然是各式各样的，但其中有四种变形是基本的，称为基本变形：

1.轴向拉伸或压缩　这种变形是由一对大小相等、方向相反、其作用线与杆轴线重合的外力所引起。在这种外力作用下，杆的长度将伸长（图3a）或缩短（图3b）。

2.扭转　这种变形是由一对转向相反、作用在两个垂直于杆轴线的平面内的力偶所引起。在这些力偶作用下，杆的任意两个横截面绕杆的轴线作相对转动（图3*c*）。

3.弯曲　这种变形是由作用线垂直于杆轴线的外力所引起。在这些外力作用下，杆的轴线由原来的直线变成了曲线（图3*d*）。

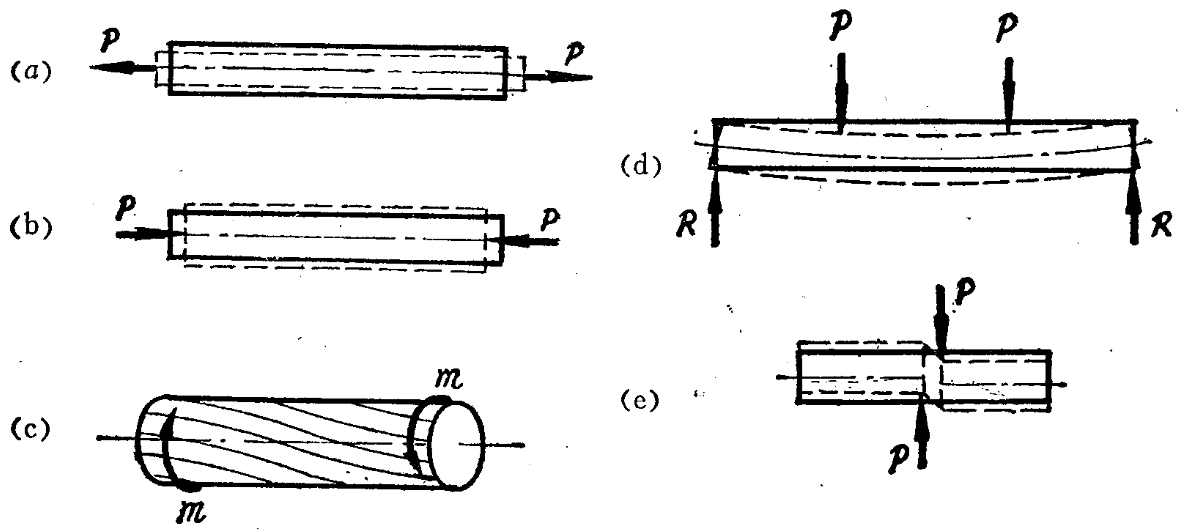


图 3

4.剪切　这种变形是由一对相距很近、方向相反的横向外力所引起。在这种外力作用下，杆的相邻截面在垂直于杆轴线的方向上发生相对错动（图3*e*）。

另外，有些杆件的变形虽比较复杂，但不外是以上四种基本变形的组合。由两种或两种以上的基本变形所组合成的变形，称为组合变形。

按照由简单到复杂的原则，下面先讨论杆在基本变形时的强度和刚度问题，然后再讨论组合变形等较复杂的问题。

第一章 轴向拉伸或压缩

1—1 概 述

机械设备中，有一些构件发生轴向拉伸或轴向压缩变形。图1—1*a*中所示起重机的斜杆BC和图1—1*b*中所示的断铁机的连杆AB，就分别是轴向拉伸和压缩的实例。而图1—1*c*及图1—1*d*分别是杆在轴向拉伸和压缩时的受力简图。本章着重讨论杆在轴向拉伸（压缩）时的强度和变形计算的问题。

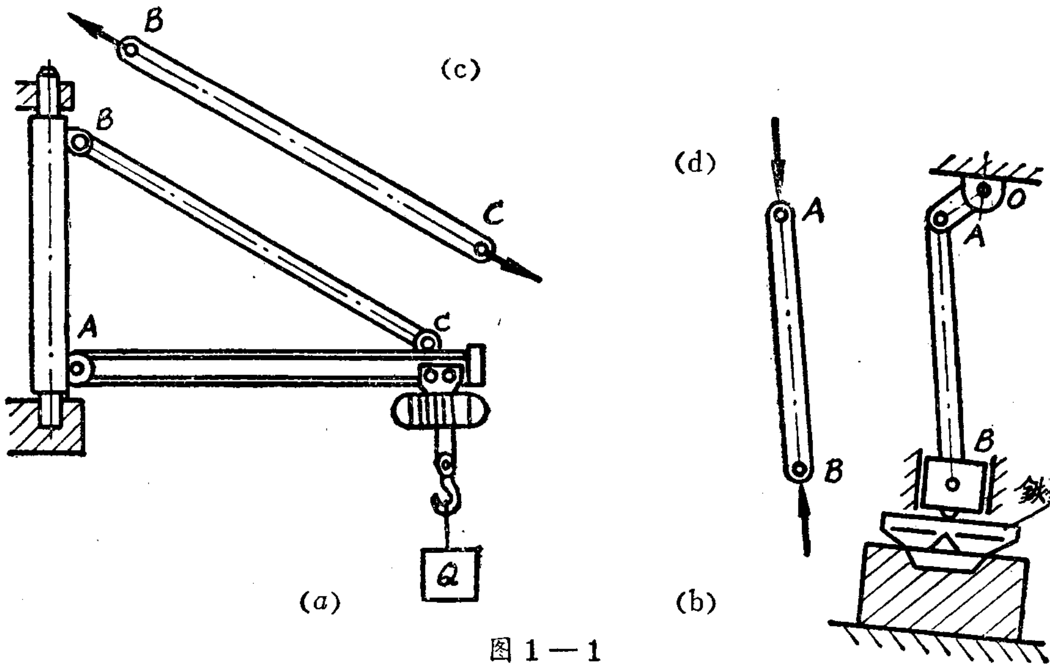


图1—1

1—2 横截面上的内力和应力

一、内力 截面法

今取图1—2*a*所示的拉杆为研究对象。杆在外力P作用下将引起伸长，这表明杆件内部质点间的相对位置有变化。与此同时，各质点间相互作用的力也将发生改变，这种力的改变量称为内力。若外力增加，内力也将随着增加。但对于材料和截面尺寸都已确定的杆来讲，内力的大小不能超过某一限度。若超过了这个限度，杆件就会破坏。因此，为了研究杆件的强度，首先应求出由外力引起的内力。

对于图1—2a所示的拉杆，欲求横截面$m—m$上的内力，可假想地沿横截面$m—m$将杆截分为两段；并取任一段（例如图1—2b所示的左段）来研究。因为杆处于平衡状态，故其左段也应保持平衡。可见，杆的$m—m$截面上必有内力存在，它也就是右段杆对左段杆的作用力。根据材料的均匀连续假设，内力在截面上是连续分布的。为简单起见，就称这个分布力的合力为内力，并以N表示（图1—2b）。因外力P与内力N为共线力系，对于左段建立平衡方程

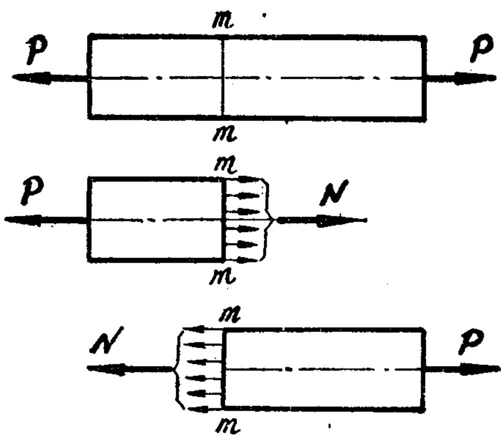


图1—2

$$\Sigma X=0 \qquad N-P=0$$

得 $$N=P$$

内力N的作用线与杆的轴线重合。这种内力称为**轴力**。

如果取横截面$m—m$的右段杆来研究，同样可得大小相等的轴力N，但其方向相反（图1—2c）。这是因为截面两侧上的内力原是一对大小相等、方向相反的作用力和反作用力。

用同样的方法可以求出轴向压缩时任一横截面上的轴力。

通常规定拉伸时的轴力为正值，压缩时的轴力为负值。

上述确定截面上内力的方法称为**截面法**。其步骤可归纳如下：

1.在需要求内力的截面处，假想地将杆截开；

2.取任一段来研究，并在截面上用内力代替另一段对这段的作用；

3.对所研究的部分建立平衡方程，求出内力。

截面法是材料力学的基本方法，非常重要，以后将经常用到。

二、横截面上的正应力

横截面上的轴力N，是该截面上分布内力的合力。仅知道轴力的大小，还不能解决杆的强度问题。例如，用同样的力拉粗细不同、材料相同的两根杆，当拉力增大时，细的杆将先被拉断。可见，对材料和内力均相同的两个杆来说，强度与杆的截面面积有关；而截面的大小直接影响着内力在截面上分布的密集程度（简称**集度**）。所以，强度与截面上各处所分布的内力的集度有关。今以图1—3所示的拉伸杆为例，进一步说明分布内力集度的概念。在横截面$m—m$上围绕某A点取一小面积ΔF，设ΔF上的内力为ΔN，ΔN的方向与ΔF垂直。则当ΔF趋近于零时，ΔN与ΔF之比的极限，就代表了A点处分布内力的集度。此集度称为**正应力**，

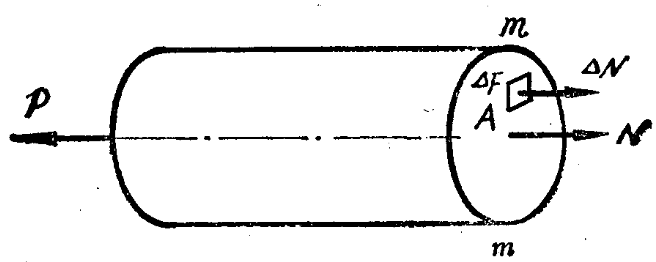


图1—3

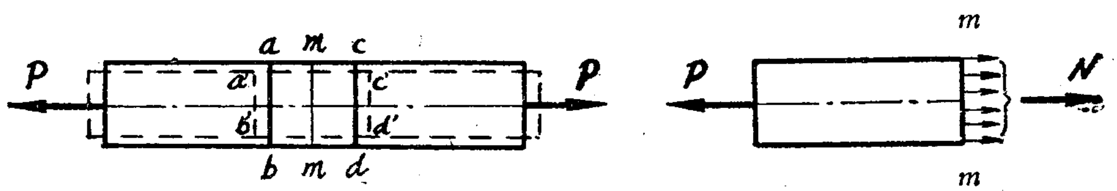
并以σ表示，即

$$\sigma = \lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{dN}{dF}$$

正应力σ是与截面垂直的。

要想根据上式求出截面上各点处的正应力，还必须知道内力在横截面上的分布规律。这一问题可以通过观察杆受力后的变形来研究解决。

如图1—4a所示的轴向受拉直杆，先在侧面上画两条与杆轴线垂直的横向线ab和cd（图1—4a）。然后加力使杆拉伸，此时可观察到横向线在杆变形后仍为直线，且平移到$a'b'$和$c'd'$的位置。根据这一现象，可以假设原为平面的横截面在杆变形后仍保持为平面，且仍与杆轴线垂直。这一假设称为平面截面假设。



(a)　　　　(b)

图1—4

由平面截面假设可知，任意两横截面间的所有纵向线段的伸长量均相同。而各纵向线段的伸长必与各自所受的拉力有关；再考虑到材料是均匀连续的，由此可以推断，横截面上的内力是均匀分布的（图1—4b），即横截面上各点处的正应力相同。如设杆的横截面面积为F，截面上的轴力为N，则可得截面上各点处的正应力为

$$\sigma = \frac{N}{F} \tag{1—1}$$

轴力N的常用单位为kg，面积F的常用单位为cm^2（或mm^2），故正应力σ的常用单位为kg/cm^2（或kg/mm^2）。

由实验证明，除了外力作用点附近的截面外，其余横截面上的正应力均可用上式进行计算。

对于轴向压缩的杆，公式（1—1）同样适用。

与轴力的符号相对应，拉应力为正，压应力为负。

三、拉（压）杆的强度条件

仅知道了杆在工作时的应力（简称工作应力），仍不能最后判断杆的强度是否足够。还必须通过试验了解材料发生破坏时的应力（简称破坏应力）σ°。显然工作应力σ必须小于破坏应力σ°，构件才不致破坏；而且为了安全可靠，还须将破坏应力σ°除以大于1的系数n，即打个折扣，得

$$[\sigma] = \frac{\sigma^\circ}{n} \tag{1—2}$$

$[\sigma]$称为材料在拉伸（压缩）时的许用应力，而系数n称为安全系数。关于材料拉（压）时的破坏应力σ°和安全系数n的确定，将在后面讨论。

为了保证拉（压）杆正常工作，应使其工作应力不超过材料在拉（压）时的许用应力，

即 $$\sigma \leqslant [\sigma] \tag{1—3}$$

或可写成

$$\frac{N}{F} \leqslant [\sigma] \tag{1—4}$$

这是对拉（压）杆进行强度计算的基本公式，称为拉(压)杆的强度条件。

在不同的情况下，根据上列强度条件可对杆进行不同形式的强度计算：

1.校核强度　在已知材料的许用应力$[\sigma]$、杆件截面尺寸和所受载荷的情况下，运用公式（1—4）校核杆件是否安全，即验算是否满足上述强度条件。

2.选择截面　在已知材料的许用应力$[\sigma]$和杆件所受载荷的情况下，运用公式（1—4）为杆件选择截面面积F。此时公式（1—4）可改写成

$$F \geqslant \frac{N}{[\sigma]}$$

3.确定许用载荷　在已知材料许用应力$[\sigma]$和杆件的截面面积或尺寸的情况下，运用公式(1—4)确定杆件能承受的最大载荷。此时可将公式(1—4)改写成计算许用轴力的计算式：

$$N \leqslant [\sigma] F$$

由许用轴力即可进而计算许用载荷。

强度条件说明了杆件的工作应力σ必须小于或等于材料的许用应力$[\sigma]$，但并不是越小越好，因为这样会浪费材料。

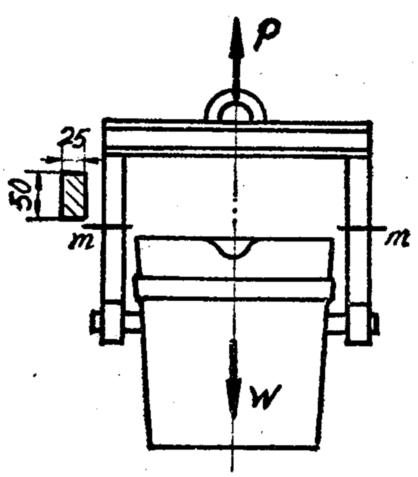
例题1—1　铁水包及其有关尺寸如图1—5a所示。包的自重为$0.8t$，最大铁水容量为$3t$。两根吊杆的材料为$A3$钢，取许用应力$[\sigma]=500kg/cm^2$。试校核吊杆的强度。

解：铁水包总重为

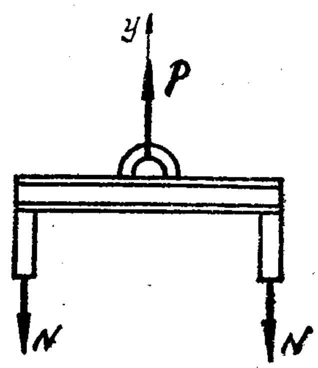
$$W=0.8+3.0=3.8\,t$$

起吊力 $$P=W=3.8\,t$$

可以认为每根吊杆均为轴向拉伸。由于受力和结构的对称性，可知两吊杆中的轴力相等。为了校核强度，应先求出截面上的轴力。用截面法，假想用一截面$m—m$将两杆同时截开，并取上面部分（图1—5b）来研究。设截面上的轴力为N，并由上部分的平衡方程



(a)



(b)

图1—5

$$\Sigma Y=0 \qquad P-2N=0$$

得
$$N=\frac{P}{2}=\frac{3.8\times1000}{2}=1900\ kg$$

由公式（1—1），可得吊杆横截面上的应力为

$$\sigma=\frac{N}{F}=\frac{1900}{2.5\times5}=152\ kg/cm^2<[\sigma]$$

可见强度条件公式（1—4）得到满足，即吊杆的强度是足够的。

例题 1—2 图 1—6a 为一气吊的结构简图。其中压缩空气的压力为 $p=5\ kg/cm^2$。气缸上下两端盖各用六只螺丁拧紧。已知螺丁材料的许用应力 $[\sigma]=650\ kg/cm^2$。试选择螺丁的直径 d。

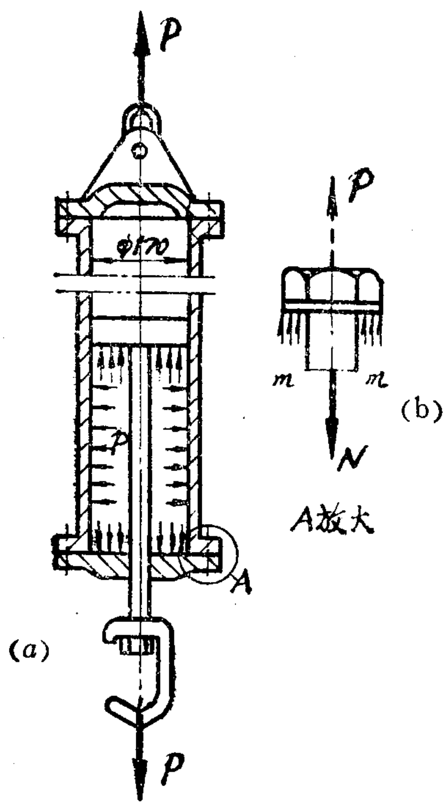


图 1—6

解：首先计算作用在气缸盖上的总压力 P。为简化计算，暂不考虑活塞杆在气缸盖上所占有的面积。由此得总压力为

$$P=pF=5\times\frac{\pi\times17^2}{4}=1140\ kg$$

这也就是气吊的总的起吊载荷 P（忽略活塞与缸体的摩擦力）。

总的力 P 由六只螺丁承担，可以认为它们均匀受力，由此得每一螺丁所受之力为

$$P_1=\frac{P}{6}=\frac{1140}{6}=190\ kg$$

为了防止漏气，端盖与缸体必须予先压紧，在压缩空气进入前，使螺丁有予拉力。在工程上常取螺栓的计算载荷 $P_2=(2.5\sim2.8)\ P_1$。现取 $P_2=2.5P_1$，则每只螺丁的计算拉力为

$$P_2=2.5\times190=475\ kg$$

用截面法，可求得螺丁任一横截面 $m—m$（图1—6b）的轴力为

$$N=P_2=475\ kg$$

按上述强度条件，可得每只螺丁所必需的截面积为

$$F=\frac{N}{[\sigma]}=\frac{475}{650}=0.73\ cm^2$$

因为 $F=\frac{\pi d^2}{4}$，故每只螺丁所必需的直径为

$$d=\sqrt{\frac{4F}{\pi}}=\sqrt{\frac{4\times0.73}{\pi}}=0.966\ cm=9.66\ mm$$

实际所用的直径应该稍大些。

查国家标准选用粗牙螺纹 $M12$，外径为 $12mm$，其内径（即最小直径）为 $d_1=10.106mm$。

例题1—3 一起重机如图 1—7a 所示。斜杆 AB 系由二根 5 号等边角钢组成，许用应力

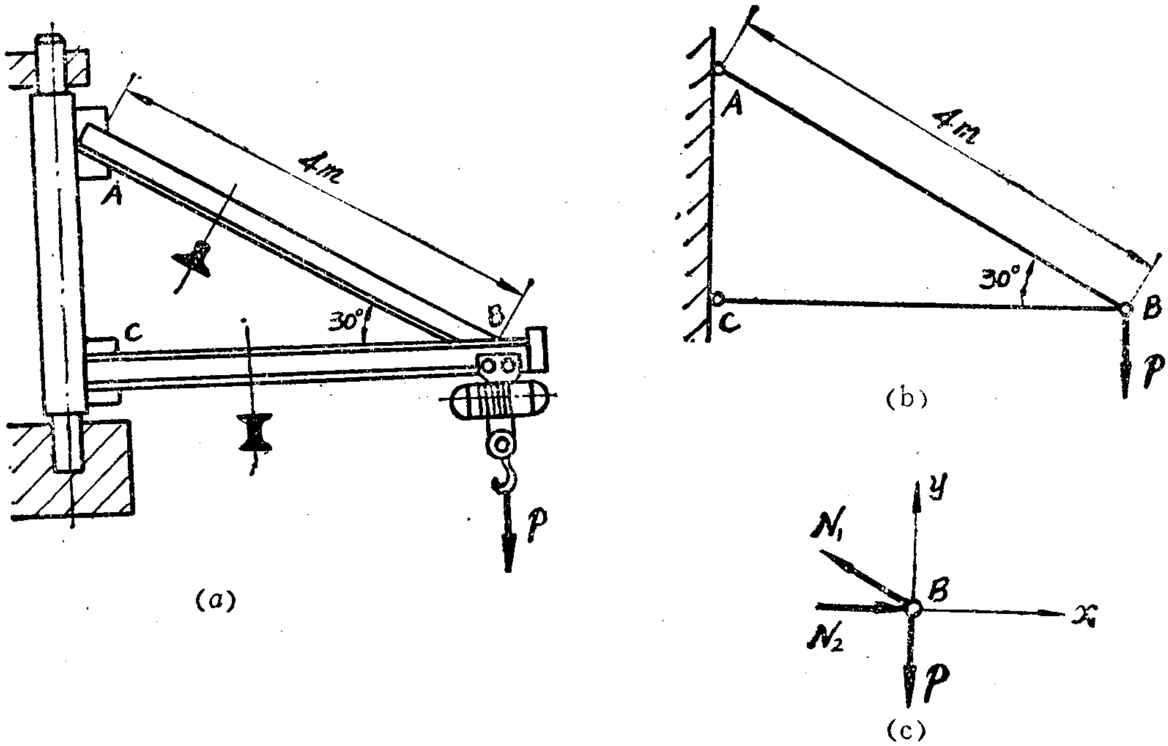


图 1—7

为〔σ〕= 1200 kg/cm^2。若已知横梁 BC 的强度足够。试按斜杆的强度确定吊车的许用载荷（包括电胡芦自重）。

解： 当电胡芦在 B 点时斜杆受力最大，故应按此位置来计算许用载荷，并设其大小为 P（图 1—7a）。

为简化计算，可忽略各杆自重，并认为杆端都是铰链联接，这样得到起重机的计算简图如图 1—7b 所示。由型钢表查得 5 号等边角钢的截面面积为 $F_1 = 4.80cm^2$，故 AB 杆横截面的总面积为 $F = 2\times 4.8 = 9.6\ cm^2$。

因为是按斜杆的强度来确定许用载荷，故先要找出斜杆受力和载荷之间的关系。为此取结点 B 为研究对象，画出其受力图如图 1—7c 所示。这里假设 AB 杆的轴力 N_1 为拉力，BC 杆的轴力 N_2 为压力。从结点 B 的平衡方程

$$\Sigma X = 0 \qquad N_2 - N_1 \cos 30^\circ = 0$$

和

$$\Sigma Y = 0 \qquad N_1 \sin 30^\circ - P = 0$$

可得 AB 杆的轴力 N_1 和许用载荷 P 之间的关系为

$$N_1 = \frac{P}{\sin 30^\circ} = 2\ P$$

由强度条件，可得 AB 杆能承受的最大轴力为

$$N_1 = [\sigma]F$$

由上述二式可得起重机的最大许用载荷为

$$P = \frac{1}{2}N_1 = \frac{1}{2}[\sigma]F = \frac{1}{2}\times 1200\times 9.6 = 5760\ kg$$

1—3 拉（压）杆的变形

杆件在轴向拉伸（或压缩）时，其纵向将伸长（或缩短），与此同时，横向尺寸也发生相应的变化。下面分别讨论这些变形。

一、纵向变形

先以拉杆为例，设其原长为 l，横向宽度为 b，如图 1—8 所示。当杆受拉力 P 作用后，长度增加到 l_1。于是纵向伸长量（简称纵向伸长）为

$$\Delta l = l_1 - l$$

对于由低碳钢、合金钢等材料制成的杆，实验表明，当杆上外力不超过某一限度时，杆的纵向伸长量 Δl 与所受外力 P 及杆的原长 l 成正比，而与杆的横截面面积 F 成反比，即

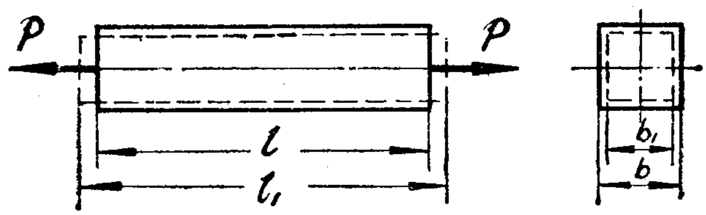


图 1—8

$$\Delta l \propto \frac{Pl}{F}$$

引入比例常数 E，并以 $P = N$ 代入，得

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \tag{1—5}$$

这一关系式称为虎克定律。常数 E 称为弹性模量，其单位与应力的单位相同。E 值随材料而异，可由实验确定。

对于受压杆，也可用上式计算其纵向缩短。由于已规定轴力 N 在拉伸时为正，而压缩时为负；故 Δl 为正值时表示伸长，负值表示缩短。

EF 称为杆的抗拉（压）刚度。从式（1—5）可以看出，对于长度相同，受力相同的杆，其抗拉（压）刚度 EF 越大，则杆的变形就越小。

以上所得的纵向变形量 Δl 随杆的原长 l 而改变，因此不能用来表明杆的纵向变形的程度。为此，需计算单位长度内的变形，并以 ε 表示，即

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{1—6}$$

ε 称为纵向线应变。与 Δl 一致，在拉伸时，ε 为正值；在压缩时，ε 为负值。显然，ε 没有单位。

若将式(1—5)改写成 $\frac{N}{F} = E\frac{\Delta l}{l}$，并因 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 和 $\sigma = \frac{N}{F}$，可得虎克定律的另一形式：

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1—7}$$

它表明当应力不超过某一限度时，正应力与纵向线应变成正比关系。

二、横向变形

实践表明，拉(压)杆在发生纵向伸长(缩短)的同时，其横向尺寸有相应的缩小(增大)。图1—8所示的拉杆，受力后横向尺寸由原来的 b 成为b_1。杆的横向缩小量为

$$\varDelta b = b_1 - b$$

与之相应的横向线应变为

$$\varepsilon' = \frac{\varDelta b}{b}$$

从此式可知，拉杆的$\varDelta b$为负，故ε'亦为负。此式同样适用于压杆，但此时$\varDelta b$（横向增大）为正，故ε'亦为正。

实验结果指出，当拉（压）杆内的应力不超过某一限度时，其横向线应变与纵向线应变之比为一常数。此比值的绝对值称为横向变形系数（又称泊松比），以μ表示，即

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

μ值的大小因材料的不同而异，可由试验确定。

考虑到杆受拉或压时，应变ε与ε'的符号恒相反，故有

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \tag{1—8a}$$

以$\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$代入上式，可得

$$\varepsilon' = -\mu\frac{\sigma}{E} \tag{1—8b}$$

即横向线应变与横截面上的正应力成正比，但符号相反。

弹性模量E和横向变形系数μ都是材料的弹性常数。表1—1中给出了一些常用材料的E、μ值。

表 1—1　常用材料的弹性模量E和横向变形系数μ的约值

材料名称	$E(10^6 kg/cm^2)$	μ
低碳钢	2.0～2.2	0.25～0.33
普通低合金钢	2.0～2.2	0.25～0.33
合金钢	1.9～2.2	0.24～0.33
灰铸铁	0.6～1.7	0.23～0.27
球墨铸铁	1.5～1.8	0.25～0.29
可锻铸铁	1.5～1.8	—
铸　钢	1.75	—
硬铝合金	0.72	0.33
铜及其合金	0.74～1.30	0.31～0.42
混凝土	0.146～0.36	0.16～0.18

例题1—4 图 1—9a示一阶梯形钢杆。已知截面面积为$F_1=F_2=5cm^2$，$F_3=10cm^2$；外力$P_1=2t$，$P_2=4t$，$P_3=8t$。杆的各段长度如图所示。如钢的弹性模量 $E=2.1\times10^6$ kg/cm^2，试求整个杆的纵向变形量。

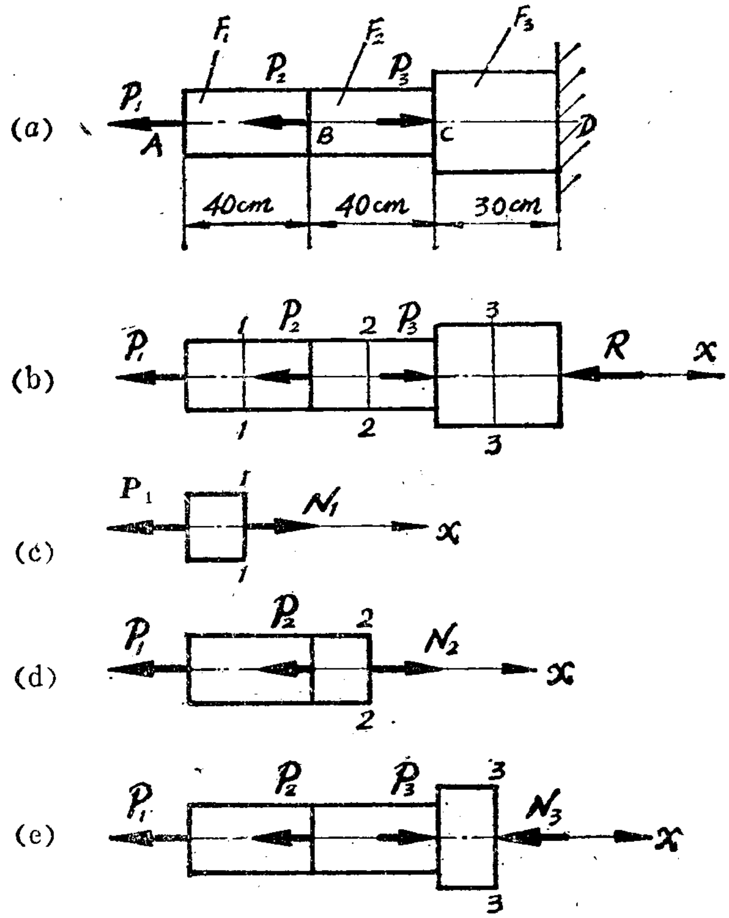


图 1—9

解：首先求出支反力R（图 1—9b）。由整个杆的平衡方程

$$\Sigma X=0 \qquad -P_1-P_2+P_3-R=0$$

得
$$R=P_3-P_1-P_2=8-2-4=2\ t$$

杆受到的外力虽多于两个，但外力作用线都与杆轴线重合，故杆的变形仍属轴向拉伸（压缩）。由于外力分别作用于A、B、C各点，故将杆分成AB、BC和CD三段，各段的横截面上有不同的轴力。为此，要分别计算各段的轴力。

先计算AB段的轴力。用截面法，在该段内用任一横截面1—1将杆截分为两段，取左段（图 1—9c）来研究。由平衡方程

$$\Sigma X=0 \qquad N_1-P_1=0$$

得
$$N_1=P_1=2\ t$$

同理，在BC段内，取任一横截面2—2以左的一段杆（图 1—9d）来研究，可得BC段各截面上的轴力为

$$N_2=P_1+P_2=2+4=6\ t$$

同理可得CD段各截面的轴力为（图1—9e）

$$N_3 = P_3 - P_2 - P_1 = 8 - 4 - 2 = 2\,t$$

以上所得的N_1、N_2和N_3均为正值，表示图中所设的轴力方向是正确的，即N_1、N_2为拉力，而N_3为压力。

既知各段的轴力，就可应用公式（1—5）计算每一段的纵向变形量。全杆总的纵向变形量Δl_{AD}即等于各段纵向变形量的代数和，即

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}$$

$$= \frac{N_1 l_{AB}}{EF_1} + \frac{N_2 l_{BC}}{EF_2} + \frac{N_3 l_{CD}}{EF_3}$$

把有关数据代入，并注意到N_3为压力，用负值代入，即得

$$\Delta l_{AD} = \frac{2000 \times 40}{2.1 \times 10^6 \times 5} + \frac{6000 \times 40}{2.1 \times 10^6 \times 5} - \frac{2000 \times 30}{2.1 \times 10^6 \times 10}$$

$$= \left(\frac{8}{10.5} + \frac{24}{10.5} - \frac{6}{21}\right) \times 10^{-2}$$

$$= \frac{58}{21} \times 10^{-2}$$

$$= 0.0276\ cm$$

计算结果为正，表明整个杆是伸长的。

例题1—5　一射压造型机机架（图1—10）有四根立柱。工作时每个立柱受力$8t$。立柱由无缝钢管制成，尺寸如图所示。设材料的$E = 2 \times 10^6 kg/cm^2$，试求立柱的正应力和纵向伸长量。

解：由截面法可以求得立柱任一横截面的轴力为

$$N = 8\,t$$

立柱横截面面积为

$$F = \frac{\pi}{4}(15.9^2 - 13.9^2) = 46.8\,cm^2,$$

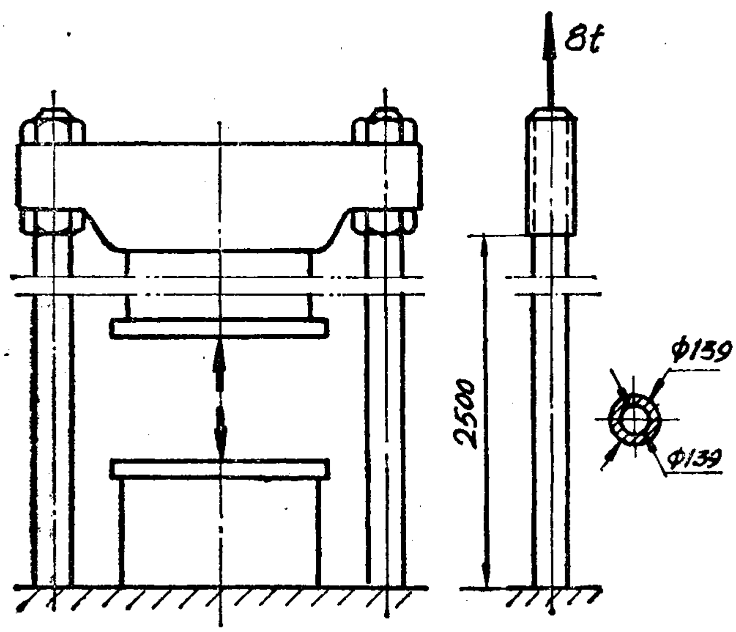


图 1—10