理想刚体静力学

LIXIANGGANGTIJINGLIXUE

赵纯恒 刘克广 编译

中国轻工业出版社

理想刚体静力学

赵纯恒　刘克广　编译

中国轻工业出版社

(京)新登字034号

内 容 提 要

本书系苏联学者V．M斯泰尔金斯基所著，是莫斯科出版社出版的英文版《理论力学高等教程》中的第一篇“理想刚体静力学”。

本书共分六章，从静力学基本概念、静力学公理开始论述，着重研究作用在刚体上的力系的等效代替和力系的简化、刚体在各种力系的作用下的平衡条件及其应用，以及刚体在力系作用下处于平衡的规律。

该书体系完整，内容编排层次分明，说理透彻，并且附有例题、习题。该书可供高等工科院校学生学习理论力学时参考，也可以作为理论力学教师的教学参考书。

理想刚体静力学
赵纯恒　刘克广　编译
*
中国轻工业出版社出版
(北京市东长安街6号)
北京市卫顺印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
*
787×1092毫米 1/32　印张：5.625　字数：119千字
1992年　8月　第1版第1次印刷
印数：1—2,000　定价：5.80元
ISBN 7-5019-1236-X/O·005

绪　论

1. 理论力学的研究对象

理论力学是研究物质最简单的运动形式的科学，即研究物体或其部分的机械运动和平衡的普遍规律。

就广义来说，物质的运动被理解为物质或物质状态的任何变化，包括热的、化学的、电磁的、原子内部的和其它过程的变化。理论力学局限于运动的最简单形式——机械运动，所谓机械运动，是指一个物体的位置相对另一物体位置随时间的变化。由于平衡状态是机械运动的特殊形式，因此理论力学也研究物体的平衡。

对各种自然现象的观察表明，并不是所讨论现象中的物体的所有现象都同样地影响其过程或最终结果。例如，试验表明，具有两个支座的梁，作用在支座上的力基本上取决于支座的位置，实际上与梁的挠度无关（如果那个挠度是较小的）。因此，当确定这些力的时候，我们可以有条件地用不可变形(理想刚体)的梁来代替实际的梁。在研究其它现象的过程中，类似的论证使我们得到物体模型的概念，如质点、点电荷等。不引入这样的简化模型，就是解译最简单的问题也将会失败。然而应当牢记在自然界中，实际上并没有理想的刚体、质点、点电荷等。所有这些概念都是使我们能够从理论上研究所探讨的现象并解答所要求的问题的抽象概念。

本教程专门用于研究经典力学。该经典力学是建立在首先由G·伽利略（1564～1642年）和I·牛顿（1642～1727年）

所精确阐述的定律之上的。在19世纪末和20世纪初，人们发现经典力学的定律并不适用于质点运动以及接近光速运动的物体。在20世纪初创立了相对论力学。相对论力学是建立在A·爱因斯坦（1879～1955年）相对论基础之上的。相对论创立了关于空间、时间、质量和能量之间关系的普遍定律。相对论力学可应用于速度接近于光速的运动的研究，并且指出没有经典力学定律的局限性。然而它并没有削弱经典力学作为一种研究速度远小于光速的宏观物体运动的实际方法的作用，这正是工程中通常所研究的运动。

2．理论力学的研究方法

像其它自然科学一样，理论力学广泛地应用抽象的方法。这种方法的应用以及人类的经验、科学技术实践和实验理论的综合，使建立一些起公理作用的一般规律成为可能。经典力学所有更深一层的定理，都可以运用逻辑论证和数学运算的方法，从这些公理推导出来。由于理论力学主要是用来处理数量关系，显然数学分析一定在其中起重要的作用。然而，尽管理论力学教程充满着数学并且只包含少量有关试验研究的参考资料，从根本上并不意味着理论力学定律和假设可以不受实验的检验。正好相反，像任何其它学科一样，理论力学定理的最终证明还是在于试验和实践。特别是理论力学的发展史证明了，只有试验和实践才能够验证假设和理论的正确性。

3．理论力学的发展史

理论力学是与实践密切相关的，而且是最古老的科学之一。尽管我们所知道的最早有关力学的手抄本属于公元前4世纪，但古建筑遗址表明，甚至更早些时期的人类就熟悉某些力学知识。

力学发展的初期主要是与静力学——研究物体平衡的科学相联系的。早在公元前 3 世纪静力学的科学基础就已经建立起来了，主要体现在伟大的希腊科学家阿基米德（大约公元前287～212年）的著作之中。他详细地阐述了杠杆平衡问题的精确解法，引入了重心的概念，发现了用他的名字命名的著明流体静力学定律等。

尽管科学家早在远古时代就对物体的运动问题感兴趣。但运动学，特别是动力学（研究与物体相互作用有关的物体运动的理论力学的分支)的创立,是在16世纪末和17世纪初。如前所述，对于力学的创立伽利略和牛顿起了重要的作用。至于力学理论的发展，阿基米德时代和牛顿时代之间间隔的近2000年的历史阶段，通常被人们认为是有关各种各样的机械运动(特别是天体运动)的大量试验材料的积累，及其数学方法系统发展的阶段。显然，发展是缓慢的。这些由N · 来布尼兹（1473～1543年)、J·开普勒（1571～1630年)，特别是 I·牛顿的前辈 G· 伽利略积累起来的试验材料所推动的数学方法的发展，及其它重大发现，为后人能够发现（以牛顿命名的）力学的普遍定律奠定了基础。并且通过精确的数学方法(微积分运算)使这些普遍定律及其结论，应用到解决实际问题之中成为可能。

在18世纪和19世纪理论力学的发展,主要是与分析法〔L·欧拉（1707～1783年)、J·达朗伯（1717～1783年)、J·L·拉格朗日(1736～1813年)、K·G·J·雅可比（1804～1851年)、W·R·哈密尔顿（1805～1865年)、J· H·波音卡尔 （1854～1912年）等人〕，以及几何法〔L· 泊桑(1777～1859)等人〕的创立和应用相联系的。

对理论力学发展作出重要贡献的俄国科学家有：M·V奥

斯托格瑞斯基（1801～1862年），P·L·彻切雪夫（1821～1894年）、S·V·卡娃列夫斯卡娅（1850～1893年）、A·M·拉普诺夫（1857～1918年）、N·E·焦耳斯基（1847～1921年），A·N·米斯切尔斯基（1859～1935年）、S·A·卡普列金（1869～1942年）、A·N·克雷洛夫(1863～1945年)、N·G·切泰也夫（1902～1959年）等人。

现代技术的进步导致一些理论力学分支的发展，如流体动力学、空气动力学、气体动力学、弹性理论、塑性理论、材料力学等。目前它们已成为独立的学科。然而，这些学科的解题方法仍然是建立在理论力学的解题方法之上的。这就是理论力学作为工科院校学生学习的基础课程之一的原因。

4．理论力学的分科

理论力学教程分为三部分，静力学、运动学和动力学。静力学研究物体的平衡定律及力系的简化法则。在运动学中，仅从几何上考虑物体的运动，而不涉及产生运动的原因。最后，动力学研究与作用在物体上并引起物体运动的力有关的物体的运动。

目　录

第一章 汇交力系

§1. 矢量代数基础

1.1. 标量和矢量

在所有的理论力学分支中，我们遇到两种量：标量和矢量。

简单地说，标量仅仅是由相对于所选定的单位系统的数量来确定的量，而且与空间任一方向无关。例如，一个物体的质量、体积、温度和能量均为标量。

简单地说，矢量不仅由它的数量，而且还由其在空间的特定方向来确定。例如，力和速度均为矢量。

矢量是一个直线段。矢量是由明确顺序的两个点来确定的：第一个点称为矢量的原点（或尾端，或作用点），而第二个点，即矢量的末端，称为矢量的终端（或顶点或终点）。在图 1.1 中，矢量是由线段表示的，并且其末端由箭头表示，箭头的方向表明矢量的方向。线段的长度（相

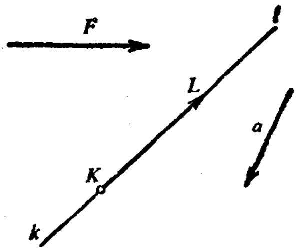

图 1.1

对于选定的标尺）表示所描述矢量的数值。矢量的数值称为矢量的模（或绝对值，或数量）。表示矢量的直线KL称为矢量的作用线。

在课文或图中，矢量是由一个（$\mathbf{a}$ 或$\mathbf{F}$）或两个（$\mathbf{KL}$）黑体字母表示。在后者情况中，第一个字母（例如矢量符号KL中的字母K）表示矢量的原点，第二个字母表示矢量的终点。矢量的模（数值或绝对值）用同样标准形式的字母表示，例如a、F、KL。

在理论力学中，我们将讨论自由矢量、滑动矢量和定矢量。所谓自由矢量即是作用点可以移动到空间任意点的矢量。滑动矢量是其作用点可以沿其作用线移动的矢量。最后，定矢量是其作用点被固定的矢量。与列举的三种矢量相对应的力学量，将在本教程中相应部分讨论。

一个定（定位）矢量是由六个独立的标量确定的。例如，这些量可能是表示矢量原点的三个坐标和表示矢量终点的三个坐标

一个自由矢量是由三个独立的标量确定的。这些量可能是矢量在直角坐标系O_x、O_y、O_z轴上的投影a_x、a_y和a_z。

一个滑动矢量是由五个标量确定的。众所周知，一条空间直线是由四个常量确定的，例如它们是由决定该直线的方程的系数a、b、p和q所确定

$$x=az+p,\quad y=bz+q,$$

作为确定滑动矢量的参数，我们可以取量值a、b、p、q。其绝对值等于矢量的模，而符号（正或负）的选择取决于在某一确定的坐标轴（例如Z轴）上，滑动矢量沿其方向是增加还是减少而确定。滑动矢量代数不同于自由矢量代数。

然而，滑动矢量和定矢量的研究，在很多情况下可以简化为自由矢量的研究。因此，我们只研究自由矢量代数。

1.2. 自由矢量的基本定义及运算规则

（a）如果两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的长度（模）相等，方向相同，而且它们的作用线平行（或重合），则此两矢量相等。矢量等式可以写成和标量等式相同的形式*

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \tag{1.1}$$

（b）为了把n个矢量相加，我们必须先画出第一个矢量，然后把第二个矢量的作用点置于第一个矢量的终点，再画第三个矢量，把它的作用点置于第二个矢量的终点，以此类推。此后，我们把第一个矢量的原点与最后一个矢量的终点连接起来，所得的矢量即为所求已知矢量的矢量和（图1.2）。在求n个矢量之和时，所指的应该是其矢量和。n个已知矢量之和$\boldsymbol{a}_\nu$（$\nu=1, 2, \cdots, n$）可以写成如下形式

$$\boldsymbol{a}={}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n, \quad \boldsymbol{a}=\sum_{\nu=1}^{n}\boldsymbol{a}_\nu \tag{1.2}$$

（c）给定两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，要从第一个矢量($\boldsymbol{a}$)减去第二个矢量($\boldsymbol{b}$)，我们必须使两个矢量作用于一点，然后作一条连接减数矢量终点和被减数矢量终点的矢量（图1.3）。这样

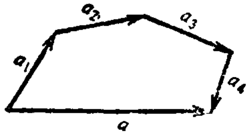

图 1.2

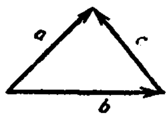

图 1.3

* 在公式、图、例题和习题中是像这样假设的：首先在每章的叙述中，其次在每章的公式（或图、或例题、或习题）中这样假设表示那些量。

得到的矢量$\boldsymbol{c}$即为矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的差

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

(d) 一个矢量乘以一个常数λ时，矢量的模与常数的绝对值相乘。如果$\lambda>0$，矢量的方向不变；如果$\lambda<0$，矢量的方向改变为反向。

(e) 一个矢量的模等于1时，称为单位矢量。每一个矢量都可以写成下面的形式

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{a}^0 \tag{1.3}$$

其中a是矢量$\boldsymbol{a}$的模，$\boldsymbol{a}^0$是其方向与矢量$\boldsymbol{a}$相同的单位矢量。

(f) 矢量$\boldsymbol{a}$在坐标轴上的投影是一个标量，等于矢量的模乘以矢量与坐标轴正方向之间夹角的余弦（图1.4）

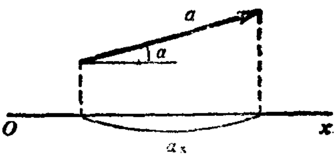

图 1.4

$$a_x=\mathrm{proj}_x\boldsymbol{a}=a\cos\alpha \tag{1.4}$$

式中a_x是矢量$\boldsymbol{a}$在Ox轴上的投影。应当指出：若$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，则$a_x>0$；

若$\alpha=\frac{\pi}{2}$则$a_x=0$；若$\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$则$a_x<0$。

(g) 若干个已知矢量的和矢量在坐标轴上的投影等于各个已知矢量在该坐标轴上投影的代数和（图1.5）

$$a_x=a_{1x}+a_{2x}+a_{3x}$$

在n个矢量$\boldsymbol{a}_\nu$ ($\nu=1,\cdots,n$) 的情况时，

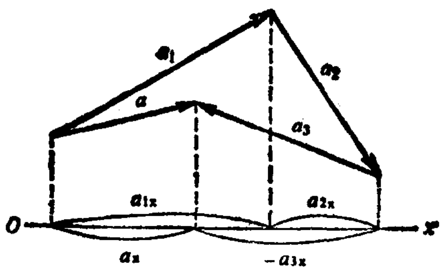

图 1.5

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + \cdots + a_{nx} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu x} \tag{1.5}$$

（h）每一个矢量都可以用下面的形式表示

$$a = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} \tag{1.6}$$

其中 a_x、a_y 和 a_z 是矢量a在笛卡儿坐标轴上的投影。$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别表示在坐标轴O_x、O_y、O_z上的单位矢量。矢量 a 的模根据下面的公式用其投影表示

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.7}$$

矢量的方向是由它与坐标轴的夹角决定

$$\cos(\widehat{a, x}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\widehat{a, y}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\widehat{a, z}) = \frac{a_z}{a} \tag{1.8}$$

（i）两个矢量 a、b 的标量积被定义为它们的模与其模之间夹角的余弦的乘积（图 1.6）

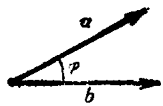

图 1.6

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = ab\cos\varphi \tag{1.9}$$

在因数互换时，标量积不变

$$(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

利用矢量因数在坐标轴上投影求得标量积的表达式如下

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z \qquad (1.10)$$

两个不为零的矢量相互垂直的条件，是它们的标量积等于零。

如果$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是不为零的矢量，即$a\neq 0, b\neq 0$，从(1.9) 式得出

$$\cos\varphi=\frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{ab} \qquad (1.11)$$

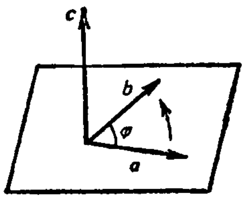

图 1.7

如果分别用由矢量 $\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$ 在坐标轴的投影表示的公式（1.10）和（1.7）来表示标量积（$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$)和矢量 a 和 b 的模，那么我们即可得到其最终表达式，因此 $\cos\varphi$ 的表达式也可以写成(1.11a)的形式

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (1.11a)$$

（j）两个已知矢量的矢量积，即模等于已知矢量的模与它们之间夹角正弦的乘积，并且垂直于已知矢量构成的平面的第三个矢量，其方向由右手螺旋法则确定。右手螺旋法则规定：从等于矢量积的第三个矢量，即$\boldsymbol{c}$矢量的终端看，从第一个矢量$\boldsymbol{a}$到第二个矢量 $\boldsymbol{b}$ 按反时针方向转动一个小角度时方向为正（图 1.7)。矢量积用方括号表示

$$\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}] \qquad (1.12)$$

即

$$c=ab\sin\varphi \qquad (1.13)$$

因数$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$互换时，矢量积的符号改变

$$[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] \tag{1.14}$$

如果两个不为零的矢量平行或者在一条直线上，则矢量积等于零（即 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$）。因此，两个矢量平行的条件是矢量积等于零。

矢量积 $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$，根据矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$ 在坐标轴上的投影表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}&=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]\\&=(a_y b_z-a_z b_y)\boldsymbol{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\boldsymbol{j}+\\&\quad(a_x b_y-a_y b_x)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1.15}$$

公式（1.15）可以改写为行列式的形式

$$\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{1.16}$$

矢量积在坐标轴上的投影是

$$\begin{aligned}c_x&=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]_x=a_y b_z-a_z b_y\\c_y&=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]_y=a_z b_x-a_x b_z\\c_z&=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]_z=a_x b_y-a_y b_x\end{aligned} \tag{1.17}$$

（k）三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$ 的标量积等于两个矢量的矢量积与第三个矢量的标量积

$$([\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{c}) \tag{1.18}$$

三个矢量的标量积是一个其绝对值等于由矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$构成的平行六面体的体积的数量。

三个矢量的标量积等于零的条件是三个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$共面，即这三个矢量平行于一个平面。

（l）已知矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$ 的矢量积，根据下列法则构成为矢量$\boldsymbol{d}$

$$\boldsymbol{d}=[\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]] \tag{1.19}$$