

数学中的 思维方法

● 刘忠智 著 ●

四川科学技术出版社

数学中的思维方法

刘忠智 著

四川科学技术出版社

一九八六年 · 成都

责任编辑：李世勋

封面设计：李 勤

技术设计：翁宜民

数 学 中 的 思 维 方 法

刘 忠 智 著

四川科学技术出版社出版

(成都盐道街三号)

四川省新华书店发行

德阳报社印刷厂印刷

统一书号：7298·220

1986年10月第1版 开本 787×1092 毫米1/32

1986年10月第1次印刷 字数 128千

印数1—4,000册 印张6.25

定 价：1.20元

序 言

著名美国数学家、教育家波利亚有一段名言：“完善的思想方法犹如北极星，使人们找到正确的道路”。他终身致力于这方面的研究，他的一系列名著《数学的发现》及《数学与猜想》等在五十年代曾经风靡美国，受到世界各国的欢迎和推崇。但是，这类书籍在我国出版翻译太少，而且不可能紧密地结合在我国当前数学教学的实际和满足现在教学改革的需要。因此，作者编写了这本与《数学与猜想》风格相近、内容结合我国数学教学实际和适应教改需要的书。这本书有以下特点：

1. 立意新颖、见解独特。本书吸取了心理学、逻辑科学中关于直觉、猜想及发散思维等方面的新成果来探讨数学思维方法的模式，作出了有益探索，得到了若干很有启发性的结果。对于数学中常见的逻辑思维方法的论述也时有创新。

2. 内容丰富，结合数学教学实际。本书取材广泛，内容涉及算术原理、几何、代数、三角及数学分析等方面，但以初等数学为主。作者还精心编选了多样有趣的练习题，这对读者培养和训练思维方法定有帮助。

3. 叙述深入浅出，详略得当。对教科书中不够重视的

方法讲得详细。其它书中常见的方法讲得较略。对较抽象的内容如反例悖论等叙述得条理清楚，娓娓动人。

最后必须指出，本书所讲的发现创造的方法模式绝不能机械理解，一旦把它们变成教条，它们就会失去创造的价值。古语云：运用之妙，存乎一心。我们相信，读者会结合自己的工作和学习来使用本书，从而提高发现创造的能力。

人类正走向研究自身思维规律的时代，思维科学正在日新月异发展。数学思维方法自有其特色，尤应深入探讨，虽然这本小书只是一个导引，但希望它的出版，小而言之会引起读者对思维科学的兴趣，大而言之会对当前的数学教学改革有所补益。

刘应明

1986.1.8 于川大

前 言

我国的教育体系是在五十年代受苏联凯洛夫教育学的影响建立起来的。虽然有它的历史功绩，但是也明显地存在弊病，过分强调基础知识忽视培养能力；强调形式逻辑思维，忽视发现创造性的思维。我们的教材中也有所体现，重知识，轻方法；重演绎，轻归纳……。这样的教育培养出的学生不少高分低能。李政道教授就批评说：“中国的留学生考试都是名列前茅，可是一做论文、一搞研究不少就做不来了”。现在，苏联学者赞科夫已经批判了凯洛夫的学说，代之以新的体系；欧美各国皮亚杰、布鲁纳等以认知心理学理论为基础的教育体系正在取代以刺激反应理论为基础的教育体系。“无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来”，面对知识迅速猛增的时代，面对新的工业革命挑战，邓小平同志高瞻远瞩，提出“三个面向”的方针，吹响了教育改革的号角。现在大家都认识到传统教育的弊端，很多人都强调，知识与智能相比，智能更为重要。

什么是智能呢？国内外心理学、教育学家对此众说纷纭、见解甚多。我在这里引证朱智贤先生之说：“智力是人的一种心理特点或个性特点，是偏于认识方面的特点。智力是一种综合的认识方面的心理特征，它主要包括：（1）感

知记忆能力，特别是观察力；（2）逻辑思维能力，它是智力的核心成分；（3）创造力，它是智力的高级表现。”至于人们常谈到的自学能力、探究能力、运算能力等等，不过是在智力的基础上经过后天努力和培养的更高层次的能力。我们把智力和各种能力统称为智能。

要培养能力、开发智力，只凭以上概念是不行的。

“力”这个词的使用不外乎是人们对本质暂时无法认识时的一种遁词。恩格斯说：“正因为我们不认识它，因为我们还弄不清这些现象的相当复杂的条件，所以我们才找“力”这个字作避难所。”（《自然辩证法》P65，人民出版社1971年版）在十九世纪人们还不知物质分子的结构时，就用化学亲和力来解释化学反应；人们不知原子的结构时，就用电力来解释电现象。因此，我们必须弄清智力的结构，国内外对此有各种理论和假说。皮亚杰认为：“结构”一词是与“系统”、“模型”等概念相关连。真正的结构主义，主要是一种方法论。我们认为要培养能力、开发智力，就应该抓住智力的核心和高级表现：逻辑思维能力和创造能力，就应该掌握这两个层次的思维的结构，或者说掌握这些思维的方法。

数学是与思维联系密切的科学。加里宁说：“数学是思维的体操。”，通过数学学习可以锻炼思维能力，反过来思维能力提高了，又能更好地学习数学。由于历史的原因，人们对数学的思维方法产生了偏见，以为欧几里得的演绎法就是数学思维的主宰。确实，数学家的论文、教科书的内容都是从定理到定理，逻辑严密形成一个完美的演绎体系。然而定理的发现，证明过程的探索，其间是花费了多少心血，绞

尽了多少脑汁，也使用了多么丰富的思维方法啊！只不过人们没有把它们记入最终结果罢了！著名的数学家、教育家波利亚正确地指出了这点，他说：“数学家的创造性工作的成果是论证推理，即证明，但是这个证明是通过合情推理（包括归纳、类比等），通过猜想而发现的。为了取得真正的成就，还必须学习合情推理；这是创造性工作赖以进行的那种推理”。“这里我向所有对数学有兴趣的人们提出：我们是应该学习证明法，但我们更要学习猜测法”。不重视合情推理，恰是传统教育的弊端。如果人们只会从演绎到演绎，从大前提到小前提，他们就永远不会发现超过大前提的新真理。所以杨振宁教授结合自己学习演绎法和归纳法的经历建议我国学校多开一点归纳性的课程。现实情况是我们的不少学生发现、创造能力甚低，他们十分需要思维方法的训练；我们的中、小学数学教师也特别需要思维方法的介绍。

鉴于此，本书搜集了与数学有关的各种思维方法，先作一般介绍，再以数学例题说明，后配以练习以求巩固掌握。例题由浅入深，只有少数涉及高等数学内容，文化水平稍低的读者可以跳过它们，并不妨碍对主要内容的理解。练习题分 A、B、C 三组编排。A 组为一般思维训练，只需具有初中知识水平；B 组结合知识进行思维方法训练，只需初等数学知识水平；C 组在思维方法的难度和所用数学知识水平都比较高些。读者可根据需要选用。练习题后面给出答案和评注供参考。希望读者在练习时，应该深究思维过程，深究用了那些思维方法，这样才有所收益。

在本书的编写过程中，我的老师四川大学数学系刘应明教授给予了很多帮助。他对本书提出了若干宝贵的意见，并

为之撰写了序言，作者在此表示衷心的感谢。

由于笔者才疏学浅，本书仅作引玉之砖，不妥之处，望读者同行多加指正。

刘忠智

1985年12月

目 录

第一章 必备的形式逻辑常识

第一节 几种思维形式	1
一、概念	1
二、判断	3
三、推理	4
四、证明	5
第二节 形式逻辑的思维规律	6
一、同一律	6
二、矛盾律	7
三、排中律	7
四、充足理由律	9
练习 1—1	9

第二章 基本的逻辑思维方法

第一节 抽象	12
一、抽象的概念及方式	12
二、抽象的类型	15
三、抽象分析法的应用	16
第二节 概括	19

一、概括的概述和实例	19
二、概括的方式	20
练习 2—1	21
第三节 比较和分类	22
一、比较的模式及实例	22
二、分类的概述及原则	25
第四节 类比	27
一、类比的概述及模式	27
二、数学中类比推理的实例	28
三、类比的种类	33
四、类比的局限	33
练习 2—2	35
第五节 归纳	38
一、归纳的概述和模式	39
二、不完全归纳法	40
三、归纳的技巧——穆勒五法	42
四、完全归纳法	45
五、数学归纳法	48
第六节 演绎	51
一、演绎法概述及模式	51
二、演绎与归纳的关系	52
练习 2—3	53
第七节 分析与综合	56
一、分析与综合的概述及实例	56
二、数学中的分析法与综合法	58
三、分析法与综合法的优劣	62

四、分析法与综合法的综合使用	63
练习 2—4	65
第八节 证明	68
一、证明的概述和分类	69
二、反证法的概述及实例	69
三、同一法的概述及实例	73
练习 2—5	75
第九节 反驳	76
一、反例的构造及作用	76
二、悖论的实例及作用	80
练习 2—6	87
第十节 本章综述	91
 第三章 创造性的思维形式和方法	
第一节 直觉思维	94
一、直觉的概述	94
二、利用直觉发现解题思路的实例及模式	95
三、数学发现过程中的直觉模式及实例	99
四、直觉产生的心理条件	103
第二节 想象与猜测	104
一、空间想象及实例	105
二、数学中猜想的模式与实例	108
练习 3—1	117
第三节 发散思维与收敛思维	121
一、发散思维的三个品质特征	121
二、实现发散思维的四种机智	122

三、数学中发散思维的综合训练	137
四、重大发现与发散思维	145
五、收敛思维的概述	147
练习 3—2	148
练习题答案及评注	153

第一章 必备的形式逻辑常识

逻辑对于科学家，有如比例和透视规律对于画家一样重要。

——爱因斯坦

形式逻辑是一门研究思维的形式及其规律的科学。“逻辑”是古希腊文“*logic*”一字的音译。这门科学早在古希腊就由亚里士多德奠定了基础。它在数学中有广泛的应用，由于这方面书籍甚多，本书只简略地讲一些必备知识。

第一节 几种思维形式

形式逻辑研究的思维形式有下述几种，即概念，判断、推理、证明。

一、概念

概念是反映客观对象或现象的共同本质属性的思维形式。数学中就有很多概念，如三角形、正方形、方程、实数等等。这些概念就反映了一类客观事物的本质属性。

概念有两个方面，即内涵和外延。内涵是指概念所反映的事物的本质属性的总和。外延是指具有概念所反映的本质属性的一切事物。

比如“菱形”这个概念的内涵是“平行四边形”和“邻边相等”，而它的外延就是指一切菱形（包括正方形）的平面图形。通常我们可以用集合的韦恩图来表示概念的外延。

概念与概念之间有以下各种关系：

1. 种属关系 如概念 A 的外延包含概念 B 的外延，则把 A 叫 B 的种概念，把 B 叫 A 的属概念（或类概念），简称属（或简称类）， A 、 B 两者关系就是种属（或类）关系。

如矩形和正方形，前者外延包含后者。矩形与正方形就是种属关系，如图1—1。

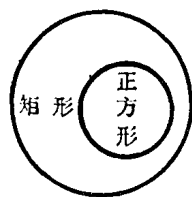


图1—1

2. 交叉关系 如概念 A 与 B 的外延有一部分重合，则概念 A 与 B 的关系是交叉关系。

如菱形与矩形它们的外延有一部分重合，就是正方形部分，这两者的关系是交叉关系，如图1—2。

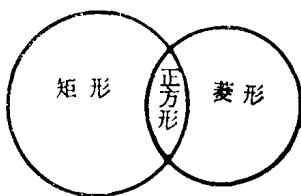


图1—2

3. 对立（对比）关系 如 A 、 B 两概念外延完全不同，但它们外延之和小于邻近种概念的外延，则 A 、 B 两概念是对立关系。

如质数与合数其外延各不相同，但两者外延之和小于邻近的种概念自然数的外延，它们就是对立（或对比）关系，

如图 1—3。

4. 矛盾关系(对抗关系) 如 A 、 B 两概念外延完全不同, 但它们外延之和等于邻近种概念的外延, 则 A 、 B 两概念是矛盾关系。

如奇数与偶数其外延各不相同, 但它们外延之和等于整数的外延。它们就是矛盾关系, 如图 1—4。

怎样给概念下定义呢?

一种方法是揭示概念的内涵, 这称为内涵定义法。如定义等腰三角形为两边相等的三角形就叫等腰三角形。这种方法的一般公式是:

被定义的概念 = 邻近的种概念 + 属差(类特征)

如上, 等腰三角形(被定义的概念)是两边相等(属差)的三角形(邻近的种概念)。

另一种方法是列举概念的外延, 这称为外延定义法。如定义实数为有理数和无理数统称实数。这种方法的一般公式是:

被定义的概念 = 所有邻近的属概念之和。

还有其它一些定义法, 此处暂略。

二、判断

判断是肯定对象具有或否定对象具有某种属性的思维形式。数学中又称为命题。

如, “凡对顶角都相等” 就是一个命题。命题不一定都

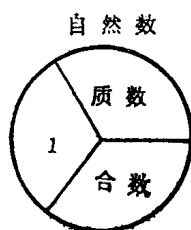


图1—3

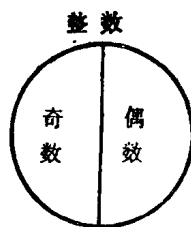


图1—4

正确。正确者为真命题，错误者为假命题。

在数学中常用以下种类的判断。

简单判断有：

1. 全称肯定判断 所有 S 都是 P 。如，所有的矩形都是平行四边形。

2. 全称否定判断 所有 S 都不是 P 。如，所有的钝角都不相等。

3. 特称肯定判断 有些 S 是 P 。如，有些三角形是钝角三角形。

4. 特称否定判断 有些 S 不是 P 。如，有些矩形不是正方形。

复合判断中则有假言判断：若 A ，则 B 。

如三角形中两角相等，则角所对的边相等。

总之这些判断（命题）是由条件和结论两部分组成。在上例中， A 则为条件， B 则为结论。

数学中的命题还有四种形式：原命题、逆命题、否命题、逆否命题，以及它们相互间的关系等，其内容在此从略。

三、推理

推理是思维形式的一种。它是用两个或两个以上的判断获得一个新判断的逻辑方法。这几个判断叫前提，新的判断叫结论。（又称断案）。

推理的逻辑基础是充足理由律。推理的方法有多种，我们将在下一章详述。