廖晓昕 著

稳定性的数学理论及应用

国家自然科学基金资助项目

华中师范大学出版社

廖晓昕 著

稳定性的数学理论及应用

华中师范大学出版社

稳定性的数学理论及应用

廖晓昕 著

*

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所发行

华中师范大学印刷厂印刷

开本 850×1168　1/82　印张 18　字数 479 千

1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷

ISBN 7-5622-0137-4/O·18

印数：1—2100　　定价：3.75元

ABSTRACT

The stability theory, an important branch of ordinary differential equations, has wide application in science and technology, Having accomplished important research achievements in this branch, the author presents a systematic and complete account of the stability theory of ordinary differential equations and their applications. This book consists of twelve chapters. From chapters one to four, the author uses the K–class function, the Dini–differential quotient etc. to introduce the classical stability theory of Lyapunov and its various generalizations. Chapters five and six describe the practical methods of determining the stability of linear systems with constant coefficients and the iteration analytic method for determining stability. Chapters seven to nine deal with the global stability of non-linear systems with separatting variables, the partial stability and the necessary and sufficient conditions for absolute stability of Lurie control systems. Chapters ten to twelve discuss the stability of Large-scale systems, ecosystems and interval dynamic systems.

The book contains recent works of the author, These works were either published in chinese or western science journais, or were presented at important national and international conferences, where they were highly commended, They were also reviewed in the American "Mathematical Review" , the Russian "РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ МАТЕМАТИКА" . "Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete" of west

Germany and in the American "Cambridge Science Abstracts". The book, therefore, offers well-critiqued research. It provides the reader with information about the recent developments in this branch at home and abroad and helps him to understand current research in this field.

The book can be used as a coursebook or as a reference by teachers, research workers, postgraduates and undergraduates of mathematics, mechanics, cybernetics, automation and radio subjects.

序　言

运动稳定性问题的重要性是众所周知的。任何一个实际系统（如控制系统、电力系统、生态系统、化工系统等等），总是在各种偶然的或持续的干扰下运动或工作的。承受这种干扰之后，系统能否稳妥地保持预定的运动或工作状况，这是首先要考虑的性能，这就是稳定性。何况，严格地说，描述系统的数学模型，大部分都是近似的，这或者由于测量误差和计算的舍入误差所致，或者为使问题理想化，不得不忽略某些次要因素。近似的数学模型能否如实地反映客观实际的动态，在某种意义上说，也是一个稳定性的问题。

上世纪俄国天才数学家李雅普诺夫首创的运动稳定性的一般理论，越来越吸引着全世界数学家的注意和工程师们的广泛赞赏，特别是力学、控制、信息、系统等方面的学者对李雅普诺夫稳定性理论和方法更感兴趣。稳定性理论和方法不断在发展，尤其是本世纪30年代以来，由于科学技术的日新月异，特别是自动控制、空间技术、大系统理论、生物数学等等的出现，使稳定性理论发展更快，新的课题、方法不断涌现。常微分方程中的李雅普诺夫稳定性理论业已推广到了用差分方程、微分差分方程、微分积分方程、泛函微分方程、随机微分方程、偏微分方程、微分包含等数学模型描述的各种动力系统。无怪乎国际上不仅是一些重要的纯粹数学学术刊物，而且许多权威性的力学、控制论、网络系统、生物数学、信息科学、计算机科学方面的学术刊物及国际会议论文集也常常刊载稳定性方面的优秀论文。

我是从1978年科学的春天到来以后，才开始系统地学习稳定性理论的。非常感谢很多前辈专家和同行朋友，给予我长期的教益与鼓励；也非常感谢华中师大领导，让我有幸在这个方向稳定地、持续地工作近十年，先后担任过两届高等学校微分方程教师

进修班稳定性理论课的讲授，并指导研究生。从而有机会了解这个领域的动态和进展，接触若干信息，和他们一起开展一些研究工作。

本书是根据我为研究生上课的部分讲稿及我们自己的一些研究工作而写成的。全书共分为12章。1—4章，通过实例和几何图形详尽地介绍了各种稳定性的定义及蕴涵关系，利用K类函数、Dini导数等近代工具，介绍了Ляпунов稳定性的基本定理、逆定理及各种推广；以Cauchy矩阵为纲，介绍了线性方程组稳定性的基本理论。这四章是基本内容。可作为数学系本科生选修课教材及常微分方程专业的研究生前阶段教材。

定常线性系统的稳定性，理论上可化为代数中的矩阵问题而彻底解决，但计算冗繁。对于实用的简便判据，力学、工程及控制论工作者更感兴趣。因此，在第5章，我们详尽地介绍了矩阵、线性控制系统稳定性的代数、几何判据。好些内容取材于我们近来的工作。

第6—7章分别介绍了稳定性的迭代分析及分离变量的非线性系统的全局稳定性，绝大部分是介绍我们自己的工作。

第8章介绍了部分变元的稳定性的基本理论，大部分取材于苏联近期的工作。

第9章讨论了Lurie直接、间接系统绝对稳定性，除了经典的Popov方法、二次型加积分项的V函数外，还叙述了我们关于绝对稳定的充要条件及各种新的充分条件。

第10—11章先后阐述了大系统、生态系统的稳定性及关联稳定性的基本理论和方法。

最后一章介绍了目前国际上刚刚开始但讨论很热烈的区间动力系统的稳定性，及我们在这个领域的工作。

本书的出版，得到了华中师大校领导、出版社许多同志的鼓励和帮助。卞松元同志为本书绘图；研究生肖会敏、吴卫华、张维、黄志刚、王鹏国、肖冬梅、刘碧玉、阮仕贵、肖殿荒等同学

在阅读本书的手稿时，分别提出宝贵建议，并代为做了校对工作，在此一并致意。

限于作者知识水平和能力，加之时间仓促，对本书中必然存在的缺点和错误，衷心地希望和欢迎读者批评指正。

廖晓昕

1938年3月于武昌桂子山

作 者 介 绍

廖晓昕，男，1938年生于湖南新化。1963年武汉大学数学系毕业。华中师范大学教授、研究生导师；《微分方程年刊》、《数学杂志》、《系统工程与决策》编委；武汉市数学学会微分方程专业委员会副主任；美国《数学评论》评论员；美国数学会会员、美国工业与应用数学会会员。

在《中国科学》、《国际控制论》等刊物上发表了稳定性及计算数学方面的论文四十余篇；多次荣获国家教委科技进步奖及省市自然科学优秀论文奖；并被载入《世界数学家人名录》和《国际名人录》。

内容简介

稳定性理论是微分方程中的重要分支，在科学技术领域中有十分广泛的应用。本书作者以他自己在该分支的重要研究成果，按现代方法，系统、完整地介绍了常微分方程稳定性理论及应用。全书共分12章。前4章用K类函数、Dini导数等现代工具介绍了经典的李雅普诺夫稳定性理论；第5—6章分别介绍了常系数线性系统稳定性的各种实用方法及稳定性的迭代分析法；7—9章先后介绍了分离变量的非线性系统的全局稳定性、部分变元的稳定性、控制系统的绝对稳定性；10—12章依次讨论了大系统、生态系统、区间动力系统的稳定性。全书有作者近年来的很多的科研成果，这些成果或是在国内外重要学术刊物上发表，或是在重大的国际国内学术会议上宣读，得到了国内外同行专家的好评。美国《数学评论》、苏联《数学文摘》、西德的《数学摘要》、美国《剑桥科学文摘》及我国国家科委的《科学技术成果》公报共30多次摘要介绍他的成果。因此，本书是一本有特色的专著。阅读本书可使读者了解该分支国内外的研究动态，达到该分支的研究前沿阵地。

本书可供数学、力学、控制论、自动化、无线电专业的大学生、研究生、教师及科研工作者阅读或参考。

目　　录

第一章　稳定性的定义例子及辅助函数

§ 1.1 引　　言

稳定性概念，最早源于力学。一个刚体或一个力学系统具有某一平衡状态，在有微小的干扰力作用下，这种平衡状态或者几乎保持，或者受到破坏，这就是稳定与不稳定的雏型。

但是，人们普遍认为，稳定性一般理论和方法的形成，是始于俄国天才数学家 A. M. Ляпунов 的博士论文“обшая задача об устойчивости двежения”[1] 这一奠基性的工作。

运动系统稳定性的研究是自然科学与工程技术中，人们普遍关心的问题。因为一个实际运动或工作的系统，总不可避免有各种干扰，干扰的后果如何，是不能不考虑的，从而稳定性有其普遍的意义。经典的例子如天体运行的稳定性，旋转流体所构成的星球的稳定性，近代技术中如火箭、人造地球卫星飞行的稳定性，以及控制系统、电力系统、生态系统的稳定性等等。[4]

本世纪30年代以来，由于科学技术日新月异的发展，特别是自动控制、空间技术、大系统理论、生物数学等的出现，稳定性理论得到了蓬勃的发展，引起了自然科学工作者和工程技术人员的更加广泛的兴趣。

美国著名数学家 Lasalle 早在60年代就说过[6]：“稳定性理论在吸引着全世界数学家的注意，而且 Ляпунов 直接法现在得到了工程师们的广泛赞尝”，“稳定性理论在美国正迅速地变成训练控制论方面的工程师们的一个标准部分”。

我国著各科学家钱学森、宋健在工程控制论[5]中说过：“对于控制系统的第一个要求是稳定性，从物理意义上说，就是要求控制系统能稳妥地保持预定的工作状态，在各种不利因素的影响

下不至于摇摆不定，不听指挥。……” 这些都说明稳定性的重要意义。

现在，Ляпунов 在常微分方程中建立的稳定性理论已推广到了差分方程、微分差分方程、泛函微分方程、随机微分方程、偏微分方程及一般抽象动力系统中去了。

稳定性理论所研究的内容，简单通俗地说就是对于用一般或特殊的微分方程所描述的动力系统建立判别方法，以判明哪些实际运动系统受干扰与不受干扰的运动状态相差甚微；哪些则相反，特别为设计稳定的动力系统，避免不稳定的事故发生，提供一整套数学理论和方法，这就是稳定性理论这门学科的意义和内容。

§ 1.2 几种稳定性的定义

考虑用微分方程组描述的一般非自治系统：

$$\frac{dy}{dt}=g(t,y). \tag{1.0}$$

记 $I=[I,+\infty)$，$\Omega\subset R^n$，Ω 为含原点的 R^n 空间的 n 维开子集，这里，g 在 $I\times\Omega\to R^n$ 连续，简记为 $g\in c[I\times\Omega,R^n]$，$I\times\Omega$、$R^n$ 分别为 g 的定义域和值域，保证方程解的唯一性。

$$y\triangleq\mathrm{col}(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

$$g(t,y)\triangleq\mathrm{col}(g_1(t,y),\cdots,g_n(t,y)).$$

设 $\overline{y}=\varphi(t)$ 是 (1.0) 式的一个未受扰动的解，$y=\varphi(t)$ 是 (1.0) 式的任意一个未被扰动的解，作变换：

$$x=y-\varphi(t),$$

则 (1.0) 化为

$$\frac{dx}{dt}=g(t,x+\varphi(t))-g(t,\varphi(t))\triangleq f(t,x), \tag{1.1}$$

故 (1.0) 式的解 $\overline{y}=\varphi(t)$ 对应着 (1.1) 式的平凡解 $x=0$.

因此，不失一般性，今后，只研究 (1.1) 式的平凡解的稳