线性经济模型及其数学方法

胡显佑　龚德恩　编著

中国人民大学出版社

（京）新登字 156 号

图书在版编目（CIP）数据

线性经济模型及其数学方法/胡显佑，龚德恩编著
北京：中国人民大学出版社，1995.5
ISBN 7-300-01993-5/O·34
Ⅰ.线…
Ⅱ.①胡… ②龚…
Ⅲ.经济数学-线性模型-数学方法
Ⅳ.F224.0
中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 02230 号

线性经济模型及其数学方法
胡显佑 龚德恩编著

出 版：中国人民大学出版社
（北京海淀路 175 号 邮码 100872）
发 行：新华书店总店北京发行所
印 刷：中国人民大学出版社印刷厂

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：11.25
1995 年 5 月第 1 版 1995 年 5 月第 1 次印刷
字数：274 000 册数：1-3 000

定价：11.90 元

前　言

随着我国经济建设的迅速发展，在经济管理工作中人们越来越重视经济分析的数量化，管理和决策的科学化。这使数学理论和方法逐步渗入到经济学和管理科学的各个领域。尽管有些人对此仍有不同看法，但数学方法在经济学和管理科学中的重要性已为人们所公认。

基于这一共识，近十几年来我国许多高等财经院校加强了经济数学基础的教学。有的专业还设置了计量经济学、数理经济学、运筹学等选修课程，取得了很大的成绩。但是，在长期的教学实践中，许多本科生和研究生仍反映看不懂涉及到经济数学模型及其数理分析的文献资料，特别是国外期刊杂志上的论文，因而不能对有关问题进行深入的探讨和研究。学生们总是感觉已学到的数学知识闲置太多，而需要的数学方法又学得太少。究其原因，主要是经济学和管理科学中涉及的一些数学理论和方法，往往在整个数学学科中并不占重要地位，但在经济学和管理科学的某些领域却有着重要的应用。我们的学生尽管已学习了必要的数学基础，但又缺乏这一部分的理论准备，不能不说这是极大的遗憾。因此，我们编写了这本教材，介绍经济管理的理论研究和应用方面常用的数学方法和模型。

在经济管理的定量化研究中，一般总是根据经济理论和实际数据建立相应的经济数学模型。对有关模型的分析往往涉及到数

学学科的各个分支，我们不可能在一本教材中包罗万象地叙述所有的有关内容。考虑到线性经济模型是理论研究和实际应用中最为常见的数学模型，以及本书篇幅和实际教学时数的限制，我们在本书中仅介绍线性经济模型中的数学方法和常用模型。由于国内已出版了多种计量经济学教材，本书不再涉及这部分内容。

本书共分八章。第一章矩阵理论介绍了线性经济模型中常见的对角占优矩阵、非负矩阵、M-矩阵等有关概念和性质。第二章投入产出分析介绍了矩阵理论在静态投入产出模型的数理分析中的应用。第三章线性不等式组与线性规划，主要介绍线性不等式组的相容性理论和线性规划的对偶理论。作为这些数学理论的应用，在第四、五章中介绍了几个著名的线性经济模型及大道定理。为了研究动态经济模型，第六章和第七章分别介绍了线性常系数微分方程组和差分方程组理论。第八章则讨论了几个著名的动态经济模型。为了便于读者阅读，书后的附录总结了本书所需要的数学基础。一般，只要具备微积分和线性代数基础的读者都可顺利地阅读本书。书中较难的章节标以“*”号，初学者可先跳过，并且不影响与后面内容的衔接。本书可作为数量经济和管理专业高年级或研究生的教材。也可供从事经济理论、管理和应用数学等专业的教师、研究人员参考。

在编写本书的过程中，我们得到中国人民大学出版社的大力支持，在此深表谢意。由于目前国内出版的这类教材和专著极少，我们初次尝试编写的这本教材可能存在不妥之处，恳请读者不吝指正。

作者

于中国人民大学

数 学 符 号

一、集合

$X=\{x|x$ 所具有的性质$\}$:具有某性质的所有 x 的集合。

$x\in X$:x 属于集合 X(x 是集合 X 的元素)。

$x\notin X$:x 不属于集合 X。

$\varnothing$:空集。

R:实数集。

$X\subseteq Y$:集合 X 被集合 Y 包含(X 是 Y 的子集合)。

$X=Y$:集合 X 与 Y 相等。即 $X\subseteq Y$ 且 $X\supseteq Y$。

$X\cup Y$:集合 X 与 Y 的并集。

$X\cap Y$:集合 X 与 Y 的交集。

$X+Y$:集合 X 与 Y 的向量和的集合。即

$$X+Y=\{x+y|x\in X,y\in Y\}$$

$X-Y$:集合 X 与 Y 的向量差的集合,即

$$X-Y=\{x-y|x\in X,y\in Y\}$$

$X\backslash Y$:所有属于 X 而不属于 Y 的元素的集合,即

$$X\backslash Y=\{x|x\in X,\text{但 } x\notin Y\}$$

$\mathrm{int}X$:集合 X 的所有内点的集合。

$\mathrm{cl}X$:集合 X 的闭包。

二、向量

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$:n 维列向量。

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$:n 维行向量。

$\|x\|$:向量 x 的范数。

$d(x,y)$:x 与 y 的距离。

R^n:n 维实向量空间(或 n 维欧氏空间)。

R^n_+：n 维非负向量的集合。

$e^i \in R^n$：第 i 个分量为 1，其余分量均为零的单位向量，即 $e^i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T \in R^n$。

对于 $x^1 \in R^n$，$x^2 \in R^n$，x^1、x^2 表示 R^n 中的不同向量，即 $x^1 = (x_1^1,x_2^1,\cdots,x_n^1)^T$，$x^2 = (x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2)^T$。

对于 $x \in R^n$，$y \in R^n$：

$x \geqq y$　表示 $x_i \geqslant y_i (i=1,2,\cdots,n)$。

$x \geqslant y$　表示 $x_i \geq y_i (i=1,2,\cdots,n)$，其中至少有一个是严格不等式。

$x > y$　表示 $x_i > y_i (i=1,2,\cdots,n)$。

应注意：如果 a，b 是两个实数，则 $a \geqslant b$ 与 $a \geqq b$ 则没有区别。

三、矩阵

$A=(a_{ij})_{m\times n}$：$m\times n$ 矩阵，其中位于第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij}。

$A^T=(a_{ij})^T{}_{m\times n}$：矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的转置矩阵。

$\|A\|$：矩阵 A 的范数，其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$。

$\det A$：矩阵 A 的行列式，其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$。

$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$：主对角线上元素依次为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的 n 阶对角矩阵。

I：单位矩阵。

$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ i_1 i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}$：位于 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列的元素所构成的 A 的 k 阶主子阵，其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$。

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{m\times n}$

$A \geqq B$　表示 $a_{ij} \geq b_{ij} (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

$A \geqslant B$　表示 $a_{ij} \geq b_{ij} (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，且其中至少有一个是严格不等式。

$A > B$　表示 $a_{ij} > b_{ij} (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

四、其他

inf：求下确界。

sup：求上确界。

$\sum\limits_{i\neq j} b_{ij}$：表示和数 $\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} b_{ij}=b_{1j}+\cdots+b_{j-1\,j}+b_{j+1\,j}+\cdots+b_{nj}$

$(1\leqslant j\leqslant n)$

$\sum\limits_{j\neq i} b_{ij}$：表示和数 $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} b_{ij}=b_{i1}+\cdots+b_{i\,i-1}+b_{i\,i+1}+\cdots+b_{in}$

$(1\leqslant i\leqslant n)$

$\exp A$：矩阵指数，即

$$\exp A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots$$

a/b：a 除以 b，即 $a/b=\dfrac{a}{b}$。

目　录

第一章　矩阵理论

在经济学所研究的数学模型中，应用最广的是线性经济模型。这类模型往往涉及到一些特殊形式的矩阵，这些矩阵的性质在分析静态和动态经济数学模型的相容性、稳定性等性质时，起着重要的作用。

我们将在本章中系统地讨论矩阵范数、对角占优矩阵、非负矩阵、M-矩阵以及本原矩阵的基本性质，并研究矩阵特征值的估计问题。

§1.1　矩阵的范数和极限

一、向量和矩阵的范数

定义 1.1.1　设 x 是实 n 维向量空间 R^n 中的向量，对应于 x 的一个非负实数 $\|x\|$，如果满足以下三个条件：

(1) 当 $x\neq 0$ 时，$\|x\|>0$，当 $x=0$ 时，$\|x\|=0$；

(2) 对任意常数 $\alpha\in R$，有 $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$；

(3) 对任意 $x,y\in R^n$，有

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \qquad \text{(三角不等式)}$$

则称 $\|x\|$ 为向量 x 的范数。

向量范数的概念是“长度”概念的推广，但向量范数不是唯一的。

例　对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$，定义

$$\|x\|_2=\sqrt{x^Tx}=(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$$

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

不难证明，它们确实满足定义 1.1.1 中的三个条件，因此它们都是 R^n 上的范数。

一般，对于任意实数 $p(p\geqslant 1)$，可以证明

$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

是 R^n 上的范数。而范数 $\|x\|_1$，$\|x\|_2$ 显然是 $p=1,2$ 时的特殊情况。

同时，我们可以证明

$$\|x\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|x\|_p$$

实际上，对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，有

$$\|x\|_\infty=\max_i|x_i|=|x_{i_0}|\neq 0$$

而
$$\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$=|x_{i_0}|\cdot(\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{|x_{i_0}|})^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.1}$$

因为　$|x_{i_0}|^p\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\leqslant n\,|x_{i_0}|^p$，所以

$$1\leqslant(\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{|x_{i_0}|^p})^{\frac{1}{p}}\leqslant n^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.2}$$

注意到 $\lim\limits_{p\to\infty}n^{\frac{1}{p}}=1$，所以在(1.1.2)中，令 $p\to\infty$ 可得

$$\lim_{p\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|^p}{|x_{i_0}|^p})^{\frac{1}{p}}=1$$

由(1.1.1)得到

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=|x_{i_0}|=\|x\|_\infty$$

上面的例子说明在 R^n 上可以定义各种各样的范数。向量范数实际上是定义在 R^n 上的一种特殊的非负实值函数。可以证明,向量范数是 R^n 上的连续函数(证明略)。

定理 1.1.1 对于 R^n 上定义的任意两种范数 $\|x\|_a$, $\|x\|_b$,存在与 x 无关的正常数 M_1 和 M_2,使得对任意的 $x\in R^n$,有

$$M_1\|x\|_b\leqslant\|x\|_a\leqslant M_2\|x\|_b \tag{1.1.3}$$

证明 令 $S=\{x\,|\,x^Tx=1\}$,则 S 是 R^n 中的有界闭集。当 $x\neq 0$ 时,连续函数 $\|x\|_a/\|x\|_b$ 在 S 上有最大值和最小值。记

$$M_1=\min_{x\in S}\{\|x\|_a/\|x\|_b\}=\|x^1\|_a/\|x^1\|_b,x^1\in S$$

$$M_2=\max_{x\in S}\{\|x\|_a/\|x\|_b\}=\|x^2\|_a/\|x^2\|_b,x^2\in S$$

则对任意的 $x\in S$,有

$$M_1\leqslant\frac{\|x\|_a}{\|x\|_b}\leqslant M_2$$

即 $$M_1\|x\|_b\leqslant\|x\|_a\leqslant M_2\|x\|_b$$

由于对任意的 $x\in R^n(x\neq 0)$,有 $x^Tx>0$,所以

$$\frac{x}{\sqrt{x^Tx}}\in S$$

因此上述结果对任意的 $x\in R^n$ 也成立。 ■

满足不等式(1.1.3)的两种范数称为是等价的。因此,定理 1.1.1 也可以叙述为:R^n 上的不同范数都是等价的。不难看出,如果一种范数具有某种性质,则与它等价的范数也一定有这一性质。所以,以后向量的范数常记作 $\|\cdot\|$,而不指明它是哪一种范数。

定义 1.1.2 对任意的 n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $\|A\|$ 是对应于 A 的一个非负实数,并满足以下四个条件。

(1) 当 $A\neq 0$ 时,有 $\|A\|>0$;当 $A=0$ 时,有 $\|A\|=0$。

(2) 对任意常数 $\alpha\in R$,有 $\|\alpha A\|=|\alpha|\cdot\|A\|$。

(3) 对任意 n 阶方阵 B，$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$。

(4) 对任意 n 阶方阵 B，$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$。

则称 $\|A\|$ 为对应于方阵 A 的一种范数。

矩阵范数 $\|A\|$ 也可以看作是定义在 $R^{n\times n}$ 上的特殊非负实值函数。与向量范数类似，我们也可以定义各种各样的矩阵范数。可以证明：矩阵范数是 $R^{n\times n}$ 上的连续函数。

由于矩阵范数总是与向量范数联系在一起使用；所以还把满足条件

(5) $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|, x\in R^n$

的矩阵范数 $\|A\|$，称为与向量范数 $\|\cdot\|$ 相容。

注意到，条件(5)相当于 $\|Ax\| / \|x\| \leqslant \|A\|$。所以我们可以把 $\|Ax\| / \|x\|$ 的最大值定义为 A 的(与向量范数 $\|\cdot\|$ 相容的)范数 $\|A\|$，即

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{1.1.4}$$

如果记 $y=\dfrac{x}{\|x\|}$，则 $\|y\|=1$。所以(1.1.4)也等价于

$$\|A\| = \max_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

可以证明，这样定义的矩阵范数满足条件(1)—(5)。我们称它为从属于该向量的范数。

现在，我们可以引入矩阵范数，使之从属于前面例题中的三种向量范数。

定理 1.1.2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}, x\in R^n$，则

(1) 对于 $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，从属于 $\|x\|_1$ 的矩阵范数为：

$$\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\}$$

(2) 对于 $\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$，从属于 $\|x\|_2$ 的矩阵范数

为：$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}$，其中 λ_1 是矩阵 A^TA 的最大特征值。

(3) 对于 $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$，从属于 $\|x\|_\infty$ 的矩阵范数为：

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$$

证明

(1) 令 $\lambda=\max\limits_{j}\{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|\}=\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{it}|$，则对于任意的 $x\in R^n$，有

$$\|Ax\|_1=\sum_{i=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ik}|\cdot|x_k|$$

$$\leqslant\lambda\sum_{k=1}^{n}|x_k|=\lambda\|x\|_1 \tag{1.1.5}$$

即 $\|Ax\|_1/\|x\|_1\leqslant\lambda$

因此有 $\|A\|_1=\max\limits_{x\neq0}\{\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\}\leqslant\lambda$

设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，其中 $A_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是矩阵 A 的第 j 列，则 $\lambda=\|A_t\|_1$。而对于单位向量 $e_t=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T\in R^n$，有

$$\|Ae_t\|_1=\|A_t\|_1=\lambda=\lambda\|e_t\|_1 \tag{1.1.6}$$

由(1.1.5)和(1.1.6)可得

$$\|A\|_1\leqslant\lambda=\frac{\|Ae_t\|_1}{\|e_t\|_1}$$

$$\leqslant\max_{x\neq0}\{\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\}=\|A\|_1$$

因此，$\|A\|_1=\lambda=\max\limits_{j}\{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|\}$ 是从属于 $\|x\|_1$ 的矩阵范数。

(2) 对任意的 $x\in R^n$，$x\neq0$，有

$$(\|Ax\|_2)^2=(Ax)^T(Ax)=x^T(A^TA)x \tag{1.1.7}$$

显然，A^TA 是对称的非负定矩阵，因此其特征值为非负实数。设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant0$ 为 A^TA 的全部特征值。则存在正交矩阵 P，使得

$$P^T(A^TA)P=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

记 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，其中 P 的第 j 列 $P_j(j=1,2,\cdots,n)$是 A^TA 的对应于 λ_j 的标准正交特征向量，即$(A^TA)P_j=\lambda_jP_j$。于是，向量 x 可以表为

$$x=\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\cdots+\alpha_nP_n \tag{1.1.8}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是 x 在基底 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 下的坐标。所以，$\|x\|_2=(\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i)^2)^{\frac{1}{2}}$。由(1.1.8)有

$$A^TAx=\alpha_1\lambda_1P_1+\alpha_2\lambda_2P_2+\cdots+\alpha_n\lambda_nP_n$$

所以
$$\begin{aligned}(\|Ax\|_2)^2&=x^T(A^TAx)\\&=\lambda_1(\alpha_1)^2+\lambda_2(\alpha_2)^2+\cdots+\lambda_n(\alpha_n)^2\end{aligned}$$

由此可得

$$\sqrt{\lambda_n}\,\|x\|_2\leqslant\|Ax\|_2\leqslant\sqrt{\lambda_1}\,\|x\|_2$$

即
$$\|Ax\|_2/\|x\|_2\leqslant\sqrt{\lambda_1}$$

对于向量 $x=P_1$，有 $\|AP_1\|_2/\|P_1\|_2=\sqrt{\lambda_1}$，所以

$$\|A\|_2=\max\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}=\sqrt{\lambda_1}$$

(3)的证明与(1)类似，不再赘述。 ■

定义 1.1.3 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$称为矩阵 A 的谱半径。即谱半径表示 A 的特征值的绝对值的最大值。

定理 1.1.3 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的谱半径不大于 A 的任何一种范数，即有 $\rho(A)\leqslant\|A\|$。

证明 设 λ 是 A 的任一特征值，对应的一个特征向量为 $x(x\neq0)$，则 $Ax=\lambda x$。定义 $n\times n$ 矩阵 $B=(x,0,\cdots,0)$，则

$$AB=A(x,0,\cdots,0)=\lambda(x,0,\cdots,0)=\lambda B$$

而 $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$，即 $\|\lambda B\|=|\lambda|\cdot\|B\|\leqslant\|A\|\cdot$

$\|B\|$。因为 $B\neq 0$,所以 $\|B\|>0$。两边除以 $\|B\|$,得 $|\lambda|\leqslant\|A\|$。由 λ 的任意性,得 $\rho(A)\leqslant\|A\|$。 ■

向量范数和矩阵范数的概念和有关性质还可以推广到其元素是复数的情形。有兴趣的读者可参考〔1〕。

二、 向量和矩阵的极限

定义 1.1.4 给定 R^n 中的向量序列 $\{x^{(k)}\}$,其中 $x^{(k)}=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$。如果每个分量序列 $\{x_i^{(k)}\}$ 当 $k\to\infty$ 时都有极限 x_i。即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时,称向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 为向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 的极限。或称 $x^{(k)}$ 收敛于 x,记作

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x \qquad 或\ x^{(k)}\to x(k\to\infty)$$

由向量极限的概念,还可以导出向量级数及其收敛的概念。

设 $\{x^{(k)}\}$ 为 R^n 中的向量序列,则

$$x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(k)}+\cdots \tag{1.1.9}$$

称为 R^n 中的向量无穷级数。如果其部分和序列

$$y^{(k)}=x^{(1)}+x^{(2)}+\cdots+x^{(k)}$$

当 $k\to\infty$ 时极限存在,则称向量无穷级数(1.1.9)收敛。否则,称向量无穷级数(1.1.9)发散。

如果部分和 $y^{(k)}\to y(k\to\infty)$,则称 y 为向量级数(1.1.9)的和,记作

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}x^{(k)}$$

定理 1.1.4 R^n 中的向量序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 x 的充分必要条件是对任意一种范数 $\|\cdot\|$,序列 $\{\|x^{(k)}-x\|\}$ 收敛于零。

证明 由定理 1.1.1,R^n 上的不同范数是等价的,所以只需对一种范数进行证明。为了方便,可取 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$。

充分性。设 $\|x^{(k)}-x\|_\infty\to 0 \quad (k\to\infty)$,即

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(k)}-x_i|\to 0 \quad (k\to\infty)$$