非线性网络与系统

上海铁道学院　林圭年　编著　·　中国铁道出版社

内 容 简 介

本书介绍非线性电路与系统方面的基本理论，并结合近年来的研究动向介绍一些新的研究成果。全书共分六章：电路元件及其分类；网络与系统的伏特拉级数分析法；器件造型；多端元件的各种参数；元件在电路理论方面的性质；非线性电阻电路。每章末附有习题。

本书可供学习过工科大学《电路理论》和《信号与线性系统》课程的高年级学生和研究生作为非线性电路与系统方面的教学参考书或教材。也可供电气工程、电信、电子和自动控制专业的广大教师、科技工作者和工程技术人员作参考。

非线性网络与系统
上海铁道学院　林圭年　编著
中国铁道出版社出版
责任编辑　倪嘉寒　封面设计　刘景山
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
河北省永清县印刷厂印
开本：787×1092毫米 $\frac{1}{32}$　印张：14.5 字数：363 千
1 9 8 7 年 8 月　第 1 版 第 1 次印刷
印数· 0001— 3,500册　定价：2.45元

前　言

线性电路和非线性电路是电路中的两大领域。严格地说，物理世界的一切电路都是非线性的。线性电路只是非线性电路在一定条件下的近似，或者可以认为是非线性电路的一种特殊情形。但是在电路理论一百多年的发展历史中，人们研究的重点一直是在线性电路领域。到本世纪的五、六十年代，传统的 RLC 电路的重大问题都已基本解决。随着电子技术（特别是集成电路技术）的发展，线性电路理论中发展出了一些新的分支，如有源电路、开关电容电路、故障诊断等等。同时，随着电子计算机的广泛应用，电路的机辅分析和设计也成为电路理论中一个热门的分支。

与此相比，非线性电路理论的发展是比较迟缓的。原因之一是非线性电路的研究比线性电路更为复杂和困难，但更主要的是与生产技术发展的需求有关。在 RLC 电路中虽然也有非线性问题，如磁饱和现象、气体放电管的非线性特性等，但是相对地属于局部和次要的问题。因此当时非线性电路理论没有占据很重要的地位。

但是自从电子器件得到广泛应用以来，情况就大不相同了。电子电路中有大量不容忽视的非线性现象。从最简单的二极管整流电路，到较为复杂的振荡器、触发器、逆变器、谐波和次谐波发生器等，都是利用了电子器件的非线性性质才制成的。并且，新的电子器件还在不断地出现，许多新器件的性能用传统的电路理论已经无法解释。面对这种情况，我们不仅需要研究每一种新的器件，而且更重要的是必须建立一套非线性电路理论体系。这一体系应该既能容纳传统的电路理论，又能阐明以前无法解释的现象，并且能够从理论上对于电路的功能极限和应用可能性作出预测和指导。

非线性电路理论体系包括器件造型、电路分析和综合、故障诊断等各个领域。目前在以上每一个领域都有大量的问题有待解决。以电路分析而言，虽然目前借助于电子计算机可以求出非线性电路对于给定参数和给定初始条件的数值解，但是人们对于非线性电路的定性了解却还很不够。而定性的理论研究往往比在特定条件下求出一组具体解答更为重要。举一个简单的例子，如果一个电路模型是无解的，那么用电子计算机进行数值求解不仅是浪费时间，甚至可能得到谬误的解答，因此我们必须研究电路的解的存在性问题。

近年来国际上关于非线性电路理论的研究相当活跃。例如，在网络与系统方面具有国际声望的IEEE Transactions on Circuits and systems杂志曾于1983年 8 月和 9 月连续二期出版了非线性电路专刊。每年一度的电路与系统国际学术报告会（ISCAS）也都把非线性电路理论列为重要的专题。国内虽然也有不少单位在开展非线性电路理论方面的教学与研究工作，但在已经出版的教材和书刊中，非线性电路理论近年来的发展尚未得到充分的介绍。本书的目的就是试图结合当前国际上的研究动向来介绍非线性电路理论的某些进展，以弥补这一方面的不足。

本书第一章介绍电路元件的基本概念以及关于电路元件的一种系列分类方法。这种分类方法既与传统的电路元件分类方法兼容，又从更高的观点认识了各类电路元件之间的关系，并且能够为已经出现和将来可能出现的新元件在元件表中找到适当的位置。

第二章介绍非线性电路与系统分析中的一种新的工具——伏特拉级数的基本概念以及以它为基础的非线性电路的频域分析法。这一方法既适用于集中参数电路，也适用于分布参数电路；既适用于非线性电路，也适用于其他非线性物理系统。

第三章叙述器件造型的基本方法——黑箱法和物理法。重点介绍在模型验证和模型结构方面的一些研究成果。采用的方法以伏特拉级数理论为依据，这些结果也能适用于电路以外的其他物理系统。

第四章介绍多端和多口电路元件的各种表示方法，包括线性元件的各种频域参数、统一表示法、以及非线性元件的小信号表示法和位函数表示法。这些内容多半是第五章和第六章的准备知识。

第五章对于线性电路中的互易性、无源性、无耗性等重要概念进行重新评价，并指出传统概念应用于非线性电路时可能产生的矛盾，进一步并提出适用于非线性电路的新概念，同时还举出这些电路理论性质的某些应用。

第六章针对非线性电阻电路讨论电路方程的列写，电路的位函数及其应用，解的存在性和唯一性以及电路的电流、电压增益等问题。

非线性动态电路的研究目前正处于蓬勃发展的阶段，有许多新的实验结果（如分支现象和浑沌现象），但是还有待于建立严格的理论来进行解释并进一步加以利用，所以本书没有专门就非线性动态电路列出章节。另外，由于电路的计算机辅助分析和设计已经形成一门相对独立的学科，所以本书也不涉及电路的数值求解方法。

电路与系统有着不可分割的联系。电路（或称网络）本身就是一种典型的物理系统。由于它易于在实验室实现和观察分析，它又往往被用来模拟其它的物理系统。分析电路和分析系统所用的方法和理论很多是相互通用的，如人们熟悉的拉普拉斯变换方法、状态空间理论等。本书以讨论非线性电路为主，同时也涉及一般的非线性系统，因而定名为“非线性网络与系统”。

书中征引了不少近年发表的文献资料，但同时也注意到顾及国内学生学习的连贯性。学习过工科大学《电路理论》和《信号与线性系统》课程的学生一般可以不太困难地接受本书的内容。因此，本书可以用作与电路及系统有关各专业的高年级学生和研究生的课外读物、教学参考书或者教材。如果采用作为研究生教材，大体可用60学时授完。同时本书对于电路与系统领域的教师和工程技术人员也有参考价值。

在数学基础方面，阅读本书只要求读者具备线性代数和拉普拉斯变换的基本知识。

以美国加州大学伯克利分校蔡少棠（Leon O. Chua）教授为首的学派在当代非线性电路理论的研究方面有重大的建树。本书的编写得到了蔡教授的关心和帮助，在蔡教授的同意和支持下，书中部分材料取自他的讲学内容。对此，编者谨表示衷心的感谢。

清华大学肖达川教授审阅了书稿并提出宝贵的修改意见，北方交通大学朱钟霖副教授自始至终关心和鼓励本书的编写工作，并且担任了本书的主审，谨向他们表示诚挚的谢意。

由于水平所限，书中不当和错误之处恳望读者提出批评指正。

上海铁道学院　林圭年

1986.4

目　录

第一章　电路元件及其分类

本章首先介绍电路元件和器件的联系和区别。从容许信号偶和赋定关系的概念出发，介绍电路元件的系统分类方法。这种分类方法使人们能够清楚地认识现有的和以后可能出现的电路元件的性质和作用。除了传统的电路元件以外，还将引出变类器、忆阻器和高阶元件等概念。最后阐述如何把复杂元件分解为一些简单的基本元件的组合，这对网络综合和器件造型都具有指导性的意义。

第一节　电路元件的基本概念

一、电路元件和器件

电路理论的研究对象是电气、电子设备中的各种物理器件以及它们的组合。但是现实世界中的电气电子器件种类繁多，而且还在不断涌现。因此，在一门基础理论性质的学科中，如果对实际器件逐一地进行研究将是不适当也是不可能的。合理的方法是利用一系列理想电路元件，对电路中的每个器件构造出适当的模型，然后利用模型电路进行研究。这样不仅能对现有的器件进行分析，而且在一定程度上还能预测未来可能诞生的物理器件的性能，从而使电路理论对客观现实具有指导性和预测性。

由于习惯上对于器件 (device) 和元件 (element) 这两个名词和概念的混淆，我们有必要首先说明它们的确切含义以及两者的差别。器件是指具有两个或多个端子的物理实体，通过端子对外进行电气联系，如干电池、碳膜电阻器、铁心线圈、二极管、三极管、集成电路块等等。元件是指具有两个或多个端子的理想化模型，其端子上的物理量（如电压、电流等）服从一定的数学规律，如电压源、电流源、电阻元件、电容元件、电感元件、各种理想受控源、理想变压器、回转器、理想二极管、各种高阶元件等。

元件及其组合通常用来在一定条件下近似地模拟器件，这就是所谓的器件造型或器件建模 (device modeling) 。

在传统的线性电路理论中，由于器件和元件之间的差别不显著，因而两者往往被混为一谈。例如电池和电压源、碳膜电阻器 (resistor) 和它的电阻值 (resistance) 常常可以不加区别而不至于引起麻烦。在几十年前，线性电路理论中的元件种类很少，只有电压源、电流源、线性电阻、电容、电感、互感和理想变压器等。这些元件是适应于当时物理器件造型的需要的。以后，为了分析电子管电路和晶体管电路，在电路元件中引入了受控电压源和受控电流源。而回转器的提出则与在集成电路中实现电感器密切相关。总而言之，新电路元件的提出与得到认可总是和技术进步分不开的。

近年来各种新型电子器件不断涌现，许多新器件在一些特殊的条件下工作。例如有些器件的内部电场强度很高，如热电子器件；有的器件尺寸极小，如超大规模集成电路；有的器件工作频率极高，可达 10^9Hz 量级，如约瑟夫逊结 (Josephson junction) 、耿氏二极管

(Gunn≒diode)和砷化镓场效应管；有的功率极大，如大功率可控硅可达10^6W量级；而有的器件功率极小，如超大规模集成电路中的MOS器件的功率仅为10^{-15}W量级。而且有的器件呈现了强烈的非线性性质，例如耿氏二极管中电子漂移速度对于电场强度具有非单调的非线性关系；约瑟夫逊结中的电流对于磁通呈现正弦曲线的关系。这些不寻常的工作条件和强烈的非线性性质使得器件内部的物理过程变得非常复杂，许多高阶的物理效应不容再忽略不计。要模拟这些复杂的物理过程，线性的R、L、C等电路元件已经难于应付。举一个简单的例来说，对于p-n结二极管施加一个电压信号，并测量其电流响应〔图1—1(a)〕，在低频时从示波器上看到的李沙育图大体如图1—1(b)所示，人们很容易用一个伏安特性为$i=f(v)$的非线性电阻元件来为它造型。函数f可以采用下面的表达式

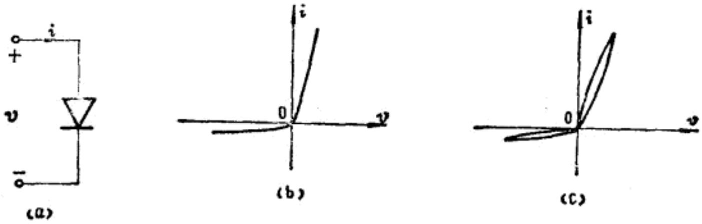


图1—1　二极管的伏安特性

(a) 二极管的电路符号；(b) 低频时的李沙育图；(c) 高频时的李沙育图。

$$f(v)=I_s(e^{kv}-1)$$

但是当频率逐渐增高时二极管的李沙育图就不再是一条简单的曲线，而会变成图1—1(c)所示的形状。这时曲线仍通过原点，但在一、三两个象限形成两个环状的图形。这些环的形状会随着电源频率的改变而改变。显然这时已经无法用一个简单的函数$i=f(v)$来描述这种复杂的曲线。也就是说，当频率较高时不再能仅用一个非线性电阻器来为p-n结二极管造型。要建立二极管的高频模型必须用到其它一些新的元件[1]。

目前在大功率电子电路、微波电路和超大规模集成电路这些新技术领域中，器件造型可以说是整个计算机辅助设计过程中最为薄弱、最缺乏成熟理论的一个环节。一些电路设计者缺乏对于器件造型基本概念的了解。在分析一种新器件时，往往只注意它的直流v-i曲线，习惯于用直流v-i曲线来唯一地表征器件。这种倾向往往会导致错误的结论。另一种倾向是人们往往习惯于仅用R、L、C元件的组合来为新的器件造型，或者采取简单的线性化措施，在模型中仅使用线性元件。而现代电子器件内部复杂的物理过程和强烈的非线性性质通常都无法仅用R、L、C元件或线性元件来模拟。因而从器件造型的要求出发，必须要有更多新的元件并建立更为周密的电路元件体系。

当大量新元件添加到电路元件的家族后，必须要有一种严格的系统分类方法，否则就会产生矛盾和混淆。让我们考虑一个例子。

图1—2　一个难以分类的元件

〔例1—1〕假设图1—2中双口元件的端口方程为

$$i_1=v_2\frac{dv_1}{dt}$$

$$i_2 = 0$$

这个元件从端口 2 看入是开路，从端口 1 看入象是一个电容器的方程

$$i_1 = C\frac{dv_1}{dt}$$

不同的是这里C不是常数，而是变量v_2。是不是可以称它为“压控电容”元件呢？我们将看到这种名称是不恰当的。因为假设施加的激励源为

$$v_1(t) = \sin t$$

$$v_2(t) = \sin 2t = 2\sin t\cos t$$

便有

$$i_1(t) = 2\sin t\cos^2 t$$

$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = 2\sin^2 t\cos^2 t \geqslant 0, \quad \forall t$$

也就是说对于上述的周期信号激励这个双口网络的瞬时功率总是正值，因而持续地消耗电能。这与传统概念中的电容器截然不同。对于如上给定的激励网络它倒很象是一个双口电阻元件。因此，如何对电路元件从理论上进行系统的分类，并探讨电路元件的各种性质，是电路理论中的重要问题。

二、容许信号偶和赋定关系

许多物理系统可以看成是信号变换器或信号加工器。从这种意义上说，每个电路元件都是一个系统。例如一个电阻元件能够把电压信号乘上一个比例系数变换为电流信号或者把电流信号乘上一个比例系数变换为电压信号；电容元件能把电流信号积分而变换为电压信号。最常用的电信号是电压和电流。磁链和电荷也可以作为信号，但是磁链与电压之间存在着关系 $v=\frac{d\phi}{dt}$，电荷与电流之间存在着关系 $i=\frac{dq}{dt}$，所以它们是二组动态相关的物理量。由于电压和电流比磁链和电荷容易测量，我们通常采用电压和电流作为输入或输出信号。

考虑一个二端器件D，如图 1 — 3 所示，图中所示的v和i的参考方向称为关联参考方向（associated reference directions），即电流i的正方向是由电压v的“+”端流入器件。设想进行一组试验，把二端器件D联结到一个激励网络，并在电路中接入一个内阻为零的电流表和一个内阻无限大的电压表，如图 1 — 4 所示。对于一定的激励我们在某一时刻t_0合上开关S，并从t_0开始记录下$v(t)$和$i(t)$的波形。这样测量到的信号对称为器件的一组

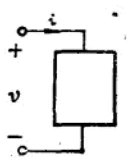


图 1 — 3　二端器件的电流、电压关联参考方向

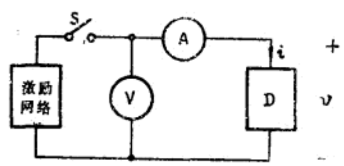


图 1 — 4　测量容许信号偶的假想试验

$$[v(t),\ i(t)],\ t \geqslant t_0$$

容许的电流电压信号偶，简称为容许信号偶（admissible signal pair）。

对所有可能的激励网络和所有时刻t_0（$-\infty < t_0 < \infty$）重复上述的假想试验，并用$F(D)$表示所有的容许信号偶的集合，则$F(D)$完全表征了该器件的电气性能。因为不论将该器件

联接到任何网络中，只要知道了它的端电压$v(t)$或电流$i(t)$的波形，总可以从$F(D)$中找到对应的一个或多个$i(t)$或$v(t)$的波形。既然如此，我们把集合$F(D)$称为器件D的赋定关系（constitutive relation），以表示它是描述一个器件电气性能的最根本的关系。

一个实际器件的赋定关系很少可以写成简单的数学表达式。例如对于一个“短路”器件可以写出其集合$F(D)$为：

$$F(D)=\{[v(t),i(t)]:v(t)=0,i(t)=\text{任何有界函数}\}$$

这一写法表示$F(D)$是$v(t)$-$i(t)$这个二维函数空间中的一个子集，其$v(t)$分量恒等于零，而$i(t)$分量可以为任何有界函数。在此例中任何不恒等于零的电压信号$v(t)$都不属于容许信号，而任何电流信号$i(t)$都属于容许信号。如果给定了容许电压信号$v(t)=0$，可以找到无限多对应的容许电流信号；如果给定了某一容许电流信号$i(t)$，则只能找到唯一的容许电压信号$v(t)=0$。

因此，若要知道一个物理器件的赋定关系$F(D)$，必须进行无限多次的试验和记录，当然这是不现实的，所以上述的试验只是假想的。

但是对于一个经过抽象化处理而得到的理想模型（即电路元件），往往可以用一条曲线、一个或一组方程或者一种规定的算法来表达它的赋定关系。这些不同的数学规律也就是区别不同种类元件的依据。

例如，一个非线性电阻元件的赋定关系是用代数方程$f(v,i)=0$，或v-i平面上的一条曲线来表达的，见图1—5。

又如线性电感元件的赋定关系可以用方程$v=L\dfrac{di}{dt}$来表达，但无法用v-i平面上的一条曲线来表达。因为如果选$i=A\sin\omega t$作为电流信号，则当A、ω和t变化时，线性电感元件的“伏安特性”将布满整个v-i平面，而不只是一条曲线。但是它可以用ϕ-i平面上通过原点的一条直线$\phi=Li$来表示。

〔例1—2〕全零器（nullator）的赋定关系可表达为

$$F(D)=\{[v(t),i(t)]:v(t)=0,i(t)=0\}$$

它的“伏安特性”只是v-i平面上的一个点——原点。无定器（norator）的赋定关系为

$$F(D)=\{[v(t),i(t)]:v(t),i(t)=\text{任何单值函数}\}$$

它的“伏安特性”布满整个v-i平面。图1—6是它们的电路符号。

全零器和无定器可以用来组成一些别的元件，例如两者串联相当于一个开路元件而两者并联相当于一个短路元件。全零器和无定器还可以组合成一个双口网络，称为全零-无定器（Nullor），它通常可用来作为运算放大器的理想化模型（图1—7）。

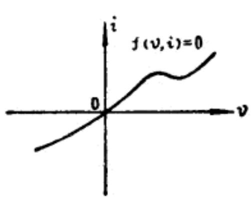


图1—5
非线性电阻元件
的赋定关系

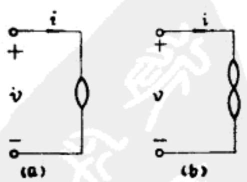


图1—6 全零器和无定器的电路符号
(a) 全零器；
(b) 无定器。

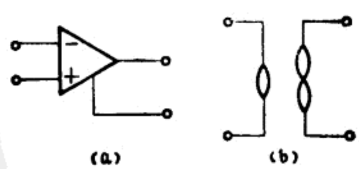


图1—7 运算放大器及其理想化模型
(a) 运算放大器的电路符号；
(b) 运算放大器的理想化模型。

三、元件分类的依据

二端电阻元件是最常见的元件，它的赋定关系一般能够用一个代数方程$f(v,i)=0$表示。但是其他更为复杂的元件其赋定关系的方程中除了涉及对变量v和i的代数运算外，还可能涉及对v和i的各阶微分、积分运算，此外还可能包含若干个内部变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$以及对它们的各阶微分、积分运算。也就是说，一个二端元件的赋定关系一般可以表达为一组方程：

$$
\begin{aligned}
&f_1(v,\cdots,v^{(\alpha)};i,\cdots,i^{(\beta)};x_1,\cdots,x_1^{(k_1)};\cdots;x_n,\cdots,x_n^{(k_n)};t)=0\\
&f_2(v,\cdots,v^{(\alpha)};i,\cdots,i^{(\beta)};x_1,\cdots,x_1^{(k_1)};\cdots;x_n,\cdots,x_n^{(k_n)};t)=0\\
&\cdots\cdots\\
&f_M(v,\cdots,v^{(\alpha)};i,\cdots,i^{(\beta)};x_1,\cdots,x_1^{(k_1)};\cdots;x_n,\cdots,x_n^{(k_n)};t)=0
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

式中α可以为正、负整数或零，当α为正整数时$v^{(\alpha)}$表示对v求导α次，即$v^{(\alpha)}=\dfrac{d^\alpha v}{dt^\alpha}$，当$\alpha$为负整数时$v^{(\alpha)}$表示对$v$积分$\alpha$次；$v^{(0)}$就是$v$本身。$i^{(\beta)}$和$x_j^{(k_j)}$的含义与此相同。$x_j$的个数$n$可以是零、正整数或无限数。方程个数$M$可以等于1或大于1，甚至可以是无限数。

例如一个“多值电阻元件”其v-i关系由图1—8的曲线表示，它具有滞回特性。在$v_2\leqslant v\leqslant v_1$的区间，根据初始条件的不同和电流电压是随时间增长或是减少，v-i之间的关系将分别满足下列二个方程：

$$f_1(v,i)=0$$
$$f_2(v,i)=0$$

又如图1—9中的二端网络，它向右方无限延伸。为了表达其端口电压v和电流i_1的关系，需要有无限多个内部变量和无限多个方程。例如选取每一个电容器C_j的电压v_j和每一个电感器L_k的电流i_k为内部变量，根据KCL和KVL可以依次写出下列方程：

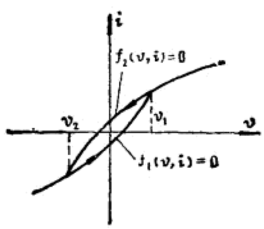


图1—8 “多值电阻元件”的v-i的关系

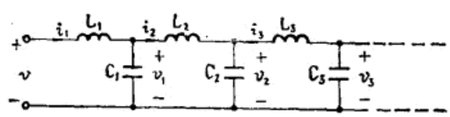


图1—9 无限延伸的二端网络

$$v=L_1\frac{di_1}{dt}+v_1$$

$$i_1=C_1\frac{dv_1}{dt}+i_2$$

$$v_1=L_2\frac{di_2}{dt}+v_2$$

$$i_2=C_2\frac{dv_2}{dt}+i_3$$

$$\cdots\cdots$$

方程的个数是无限的。

元件分类的依据在于它们的赋定关系符合不同的数学规律。我们先来考虑对于几个大的概念的区分：

（1）集中参数元件和分布参数元件；

（2）时变元件和非时变元件；

（3）线性元件和非线性元件。

定义1—1　集中参数元件和分布参数元件[2]

当一个二端元件E的赋定关系可以表示为有限个方程，这些方程仅包含对于端口变量$[v(t),i(t)]$和有限个内部变量$[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$的同一瞬间值的代数运算、常微分和积分运算时，$E$称为集中参数元件，简称集中元件。否则，$E$称为分布参数元件或分布元件。

例如传输线通常划归分布参数元件，因为它的电流电压关系要用偏微分方程来描述，因而超出定义1—1的限制。图1—9中的无限二端网络也属于分布参数元件，因为它的赋定关系包含无限多个内部变量和无限多个方程。又如赋定关系为

$$v(t)=Ri(t-\tau)$$

的延时元件也属于分布元件，因为方程中v的自变量是t，而i的自变量是$t-\tau$，所以v和i取的不是同一时刻的值，违反了定义1—1中关于“同一瞬间值”的限制。

定义1—2　时变元件和非时变元件

如果$[v(t),i(t)]$是元件E的任何一组容许信号偶，则$[v(t-T),i(t-T)]$，$T\in(-\infty,\infty)$也是E的容许信号偶，便称E为时恒元件或非时变元件。否则，E称为时变元件。

由这一定义可知，一个元件是时恒元件，其充分必要条件是赋定关系式（1—1）中不以显式包含时间变量t。例如，把电源也看成一种电路元件的话，直流电源属于时恒元件而交流电源属于时变元件。

定义1—3　线性元件和非线性元件

如果$[v_1(t),i_1(t)]$和$[v_2(t),i_2(t)]$是元件E的任何二组容许信号偶，则对于任意非零实数a和b都有$[av_1(t)+bv_2(t),ai_1(t)+bi_2(t)]$也是其容许信号偶，$E$便称为线性元件。否则，$E$称为非线性元件。

由定义1—3可知，当赋定关系式（1—1）中的函数f是线性函数（即f具有一次齐次性质和叠加性质）时，元件E称为线性的。一次齐次性质是指$f(ax)=af(x)$；叠加性质是指$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$。

例如某个电阻元件E的电压v和电流i符合下列方程：

$$f(v,i)=\frac{v^2}{i}+v-i=0$$

函数f对于v和i具有一次齐次性，因为

$$f(av,ai)=af(v,i)$$

但是它不具有叠加性质，因为

$$f(v_1+v_2,i_1+i_2)\neq f(v_1,i_1)+f(v_2,i_2)$$

因此元件E是非线性元件。

线性电阻元件必须满足

$$f(v,i)=v-Ri=0$$

这时函数 f 既具有一次齐次性，又具有叠加性质。

以上的分类方法与系统理论中关于集中参数系统和分布参数系统、时变系统和非时变系统、线性系统和非线性系统的分类在本质上是一致的，详见〔3〕的第一章第二节。

由上可见，元件的"赋定关系"与通常所说的"伏安特性"有联系也有区别。例如对于线性电阻元件来说，所谓"赋定关系"就是它的伏安特性，是 v-i 平面上通过原点的一条直线。但从式（1—1）和许多例子中可以看到，元件的"赋定关系"的含义要比"伏安特性"广泛得多。

第二节 基本二端代数元件

以上一些定义对于电路元件作了大致的区分。当然这样的分类是很粗略的，从本节开始我们将对于电路元件作进一步的分类。

首先我们讨论二端元件。在上节中我们曾提到电路中的常用变量有四个：电压 v、电流 i、电荷 q 和磁链 ϕ。通常 v 和 i 比较容易测量，但 q 和 ϕ 也是可以测量的。例如对 $i(t)$ 在一段时间〔t_0，t〕内进行测量并求其积分值即可得到在这元件内流经的电荷 q：

$$q(t)=\int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau+q(t_0)$$

同理，

$$\phi(t)=\int_{t_0}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau+\phi(t_0)$$

式中 $$q(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\phi(t_0)=\int_{-\infty}^{t_0} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

是积分常量，它们不能由测量确定，因为我们不可能从 $t=-\infty$ 时开始测量。换句话说这样进行的测量可以准确到只差一个常数项。

另外，从上一节的例子可知，一个线性电感元件的赋定关系为 $v=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$。这一关系如果表示在 v-i 平面上将会占据整个平面，因而没有实际意义。但是如果我们把上式改写为 $\phi=Li$，则在 ϕ-i 平面上此式对应于通过原点的一条直线。同理，对于线性电容元件其赋定关系无法在 v-i 平面上画出，但是可以表达为 $q=Cv$，是 v-q 平面上的一条直线。

仅用电阻元件是无法综合得到电感或电容元件的，反之亦然。从这个意义上说，电阻、电感和电容元件都同样是不可缺少的基本元件。在 (v,i,ϕ,q) 四个变量中，v 和 ϕ 动态相关；i 和 q 动态相关。我们在四个变量中任取二个动态无关的变量，对应地就可以定义一类基本元件。也就是说，凡赋定关系为代数方程 $f_R(v,i)=0$ 的元件称为二端电阻器。类似地，由代数方程 $f_C(v,q)=0$、$f_L(\phi,i)=0$ 和 $f_M(\phi,q)=0$ 表征的元件就分别称为二端电容器、电感器和忆阻器。

上面的叙述可归纳为以下的定义。

定义1—4 基本二端代数元件

凡是赋定关系为

$$f(\xi,\theta,t)=0 \tag{1—2}$$

的元件称为基本二端代数元件。式中f为代数函数；ξ为v或ϕ；θ为i或q。

图1—10示意地表达了四类基本代数元件的定义*。

有几点应该加以说明：

（1）在线性电路理论中电阻器（resistor）和电阻（resistance）、电容器和电容、电感器和电感这些名词差不多经常通用而不致引起混淆。但在非线性电路理论中当我们提及元件时，使用电阻器、电容器和电感器这些名词较为恰当。在电阻元件的每个工作点Q处有静态电阻（或称直流电阻，由Q点与原点连线的斜率决定）和动态电阻（或称增量电阻，由v-i曲线在Q点的切线斜率决定）两个电阻值。因此应该注意电阻器和电阻的区别。对于电容器、电感器和忆阻器情形也类似。

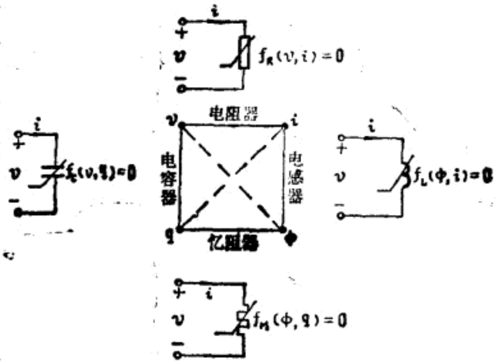


图1—10 基本二端代数元件定义的示意图

（2）当式（1—2）中时间变量t在f的表达式中不以显式出现时，元件是时恒的或非时变的；否则是时变的。由于我们除了时变电源以外主要只讨论时恒元件，今后除非另作说明，一般我们将把式（1—2）写成

$$f(\xi,\theta)=0 \tag{1—3}$$

（3）代数方程$f(\xi,\theta)=0$可以包含一个或几个参数。例如无定器的赋定关系可以写成

$$(v-x_1)(i-x_2)=0, \quad (x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2$$

这里x_1和x_2是引入的参数。一般地说，如果式（1—3）可以在ξ-θ平面上用一条由“一笔画”画成的曲线表示的话，则该曲线总可以表示为两个参数方程

$$\xi=f_1(x), \quad \theta=f_2(x), \quad x\in(a,b)$$

或者表示为一个参数方程

$$[\xi-f_1(x)]^2+[\theta-f_2(x)]^2=0, \quad x\in(a,b)$$

（4）一个元件可以同时属于几类基本元件。例如直流电压源的赋定关系是$v=E$，它既可以划归二端电阻元件，也可以划归二端电容元件。对偶地，电流源既可划归电阻元件，也可划归电感元件。

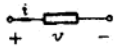
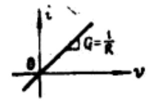
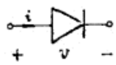
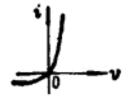
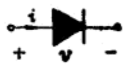
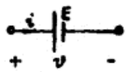
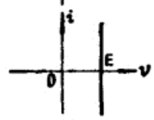
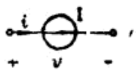
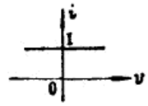
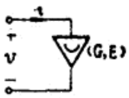
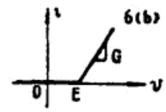
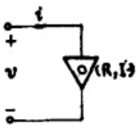
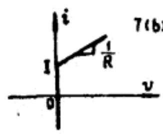
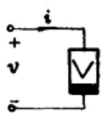
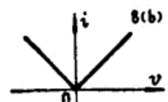
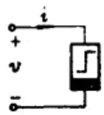
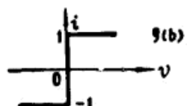
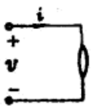
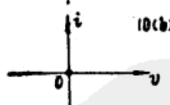
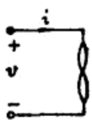
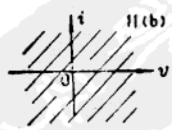
实践证明二端电阻元件是器件造型中使用最广泛的基本元件。大量电子器件在低频范围都能用二端电阻来模拟。许多手册和教课书中（如[4]）列出了真空二极管、硒二极管、结型二极管、齐纳二极管、恒流二极管、变阻管、隧道二极管、辉光管、超导隧道结等多种二端器件在低频时的典型v-i特性曲线，借助这些曲线可以用非线性电阻元件来建立它们的低频模型。

因为非线性电阻元件在器件造型中使用得最普遍，人们提出了各种理想的二端电阻元件，它们在非线性网络综合问题中都可用作“积木块”。所谓“积木块”是指在器件造型或网络综合中所用的基本组成部分，犹如建造高楼大厦需要使用砖头石块一般。

表1—1大致列举了这些电阻元件。

* 图1—10中非线性电阻器、电感器和电容器是按照国家标准GB312-64（电工系统图图形符号）中规定的符号而定的。与国际惯用符号（例如可参见文献〔4〕、〔6〕）相比，它的缺点是没有明显地体现出非线性元件的双向不对称性。非线性忆阻器的符号在国家标准中还没有，图1—10中的符号是编者参照国家标准中的原则结合国际惯用符号自定的。

理想二端电阻元件 表1—1

序号	名称	符号	赋定关系的数学表示	赋定关系的图形表示
1	线性电阻器			
2	结型二极管		$i=I_s\left(e^{\frac{v}{v_T}}-1\right)$	
3	理想二极管		$v\leqslant 0, i\geqslant 0, vi=0$	
4	直流电压源		$v=E$	
5	直流电流源		$i=I$	
6	凹电阻器		$i=\frac{G}{2}(\lvert v-E\rvert+(v-E))$	
7	凸电阻器		$v=\frac{R}{2}(\lvert i-I\rvert+(i-I))$	
8	绝对值电阻器		$i=\lvert v\rvert$	
9	符号电阻器		$i=\mathrm{sgn}\ v$	
10	全零器		$v=0, i=0$	
11	无定器		$v=x_1, i=x_2, (x_1,x_2)\in R^2$	

现在我们再来讨论忆阻器（memristor）。这个名词是由memory和 resistor 二词缩合而成的，又译电忆器、记忆电阻器等。它最早由蔡少棠教授在1971年提出[5]。十几年来，忆阻器的概念已经为越来越多的电路理论工作者所承认和接受了。

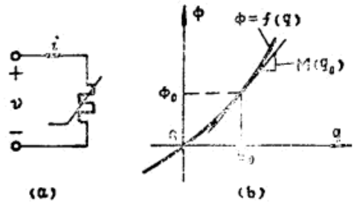


图1—11　忆阻器及其物理解释
(*a*) 忆阻器的电路符号；(*b*) 忆阻器的物理解释

我们来解释忆阻器的物理意义。假设图1—11（*a*）中元件的赋定关系为$\phi=f(q)$，若考虑其端口的电压和电流，则有下列关系：

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=M(q)i(t)$$

式中
$$M(q)=\frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}q}$$

为图1—11（*b*）中曲线的斜率。它的单位是欧姆，与电阻的单位相同。当f是非线性函数时曲线在各点的斜率将不相同，因而图1—11中的元件可以看成一个阻值在不断变化的电阻器，其电阻值$M(q)$随着流经元件端子的电荷量q的变化而变化。因此可以把忆阻器解释成为一种电荷控制型的电阻器。由于电荷代表了电流的积分，因此该元件的电阻值$M(q)$反映了$i(t)$过去的“历史”。正因为如此，我们称它为“有记忆的电阻器”。

容易看出，线性忆阻器与线性电阻器是相同的元件。可能也正是由于在线性情况忆阻器与电阻器并无区别，所以在以线性电路为主要研究对象的年代中，忆阻器这一概念长期以来没有被人们所提出。

在物理器件中我们可以找到一些实例具有类似于忆阻器的性能。例如图1—12(*a*)所示的库仑电池[6]，在银容器中盛有电解液，容器中心放置一个镀有银层的金电极。当把蓄电池的阳极接到金电极，把阴极接到银容器上，银离子就从金电极上通过电解液向容器壁移动，从而形成电流。当金电极上附着大量银离子时，电流很大而电阻很小；当金电极上的银离子大都已离去，电流就变得非常小，即电阻很大。因此库仑电池在每一瞬间可以看成一个线性电阻，其电阻值的大小取决于金电极上剩余的银离子的数量，也即取决于电流的积分值q。于是可以用一个电荷控制的电阻元件作为库仑电池的电路模型。该元件的电阻值是q的函数

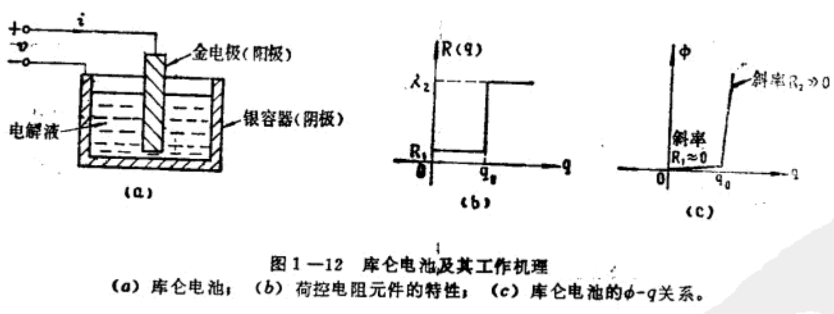


图1—12　库仑电池及其工作机理
(*a*) 库仑电池；(*b*) 荷控电阻元件的特性；(*c*) 库仑电池的ϕ-q关系。

$$R=R(q)$$

如图1—12(*b*)所示，于是库仑电池的伏安特性可表示为

$$v(t)=R(q)i(t)$$

对此式进行积分即得

$$\phi=\int_{t_0}^{t} R(q)\frac{dq(t)}{dt}dt=\int_{q_0}^{q} R(q)dq=f(q)$$

而这就是一个忆阻器的赋定关系式。

可以用忆阻器来造型或者展现出类似于忆阻器特性的物理器件还可以例举一些，例如热敏电阻、氖气灯泡和放电管、无定态器件和许多生理系统等[7]，在机械系统和其它系统中也可以找到类似于忆阻器的器件。

第三节 高阶二端代数元件

在由式（1—3）定义的R、L、C和M四类元件中，ξ以v（即$v^{(0)}$）或ϕ(即$v^{(-1)}$)形式出现；θ以i（即$i^{(0)}$）或q（即$i^{(-1)}$）形式出现。回顾式（1—1）可知赋定关系中一般地可以出现v和i的各阶导数和积分，而不是仅局限于0阶和－1阶。因此我们可以对定义1—4加以扩充，引出所谓“高阶元件”的概念。

定义1—5 高阶二端代数元件

赋定关系可以表达为代数方程

$$f(v^{(\alpha)},i^{(\beta)})=0 \qquad (1-4)$$

的元件称为$v^{(\alpha)}$-$i^{(\beta)}$二端代数元件，简称为（α，β）阶元件。

式（1—4）中α和β为正负整数或零，$v^{(\alpha)}$和$i^{(\beta)}$的含义已在式(1—1)中解释过。根据定义1—5可以把电阻器、电容器、电感器和忆阻器分别称为（0，0）、(0,－1)、(－1,0) 和（－1,－1）阶元件。

为了以后叙述上的方便，我们把式（1—4）中的α和β称为端口指数。因为α和β可以取各种不同的值，所以定义1—5包括的元件种类是很多的，这些元件统称为**高阶代数元件**。以后我们将采用图1—13的符号来表示（α，β）高阶二端元件。

注意在式（1—4）中变量v仅以$v^{(\alpha)}$形式出现而i仅以$i^{(\beta)}$形式出现。例如，赋定关系为

$$f(v^{(2)},\ i^{(-1)})=0$$

的元件属于（2，－1）阶代数元件，而赋定关系为

$$f(v^{(-1)},v^{(3)},i^{(2)})=0$$

的元件不属于高阶代数元件，因为它的赋定关系中既包含$v^{(-1)}$又包含$v^{(3)}$。

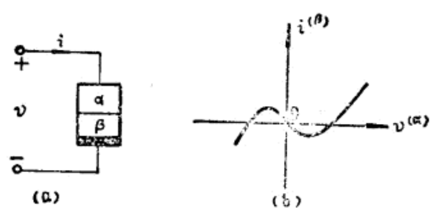


图1—13 高阶二端代数元件
(*a*) 电路符号；(*b*) 赋定关系示意图。

高阶元件不仅是理论上的一种新概念，而且在实际上也已开始得到应用。例如考虑一个赋定关系为

$$v(t)=E\frac{d^2i(t)}{dt^2}$$

的线性元件，式中E为常量。该式具有

$$f(v,i^{(2)})=0$$

的形式，因而该元件属于（0，2）阶代数元件。因为这是线性元件，我们可以讨论它对于