第4篇 材料力学

执笔者	朝田泰英	飯田国広	石田 誠	今井兼一郎	鵜戸口英善
	植村益次	大井光四郎	大路清嗣	岡村弘之	奥村敦史
	川井忠彦	川田雄一	桐岡 健	国尾 武	小泉 堯
	小林繁夫	鯉淵興二	白鳥英亮	神馬 敬	田中 尚
	户川隼人	中沢 一	中原一郎	中村康治	西岡邦夫
	西田正孝	林 郁彦	藤野 勉	水野正夫	宫川松男
	宫本 博	室田忠雄	山田嘉昭	山本善之	鷲津久一郎
审查委员	岡村弘之	川井忠彦	鯉淵興二	白鳥英亮	林 郁彦
	水野正夫				
译者	王崇宇				
校者	滕征本				

目　录

第1章　外力、应力及应变

1·1　载　　荷

机器、结构物及其零部件，在它们的表面上，要受到相邻结构和零部件传给的力和力矩的作用，有的要受到流体压力，以及按其使用目的而承受其它各种不同载荷。另外，在物体内部还要承受自重和惯性力等载荷的作用。如果对这些载荷的分布、大小、速度和频率不明确，就不可能对以后讲述的应力和应变进行分析。

1·1·1　按载荷作用速度分类

静态作用的载荷称为静载荷。例如，恒定运动中产生的惯性力、非常缓慢变动的载荷、温度变化或温差变动很小时所产生的载荷等，均可近似地按静载荷问题处理。动态作用的载荷称为动载荷。其中把重复变化的载荷称为重复载荷；大小不变只改变作用方向的载荷称为交变载荷；加速度大的载荷称为冲击载荷；重复冲击作用的载荷称为重复冲击载荷。伴有加速度的载荷，在只考虑它的大小时，可用加速度系数（$=a/g$，a 为运动物体的加速度，g 为重力加速度）乘以运动物体的重量，再按静载荷问题处理。

1·1·2　按载荷分布形式分类

根据载荷的分布状态，可将其分为分布载荷和集中载荷。前者有均匀分布载荷和非均匀分布载荷之分；集中载荷可看作是作用面趋近于零的小范围的分布载荷。

1·1·3　按载荷作用方式分类

根据载荷的作用方式，可将其分为轴向载荷、横向（剪切）载荷、弯曲载荷和扭转载荷等。所谓轴向载荷是指沿物体的轴线方向作用，其合力作用线通过截面形心并在横截面上产生均匀正应力的载荷。所谓横向载荷是指垂直于物体轴线或轴向平面作用，并在横截面上产生剪力和弯矩的载荷。弯曲载荷和扭转载荷是指分别给物体以弯曲和扭转作用的载荷。几种载荷联合作用时，则称它们为复合载荷。

1·2　支承条件及约束反力

为了固定机器或结构的位置，需用地基给予支承。组成机器的零件或构成结构的构件，都因互相联结而承受别的零件或构件传来的力，或把力传到别的零件或构件上去。一般把作为支承的约束部分称为支座，把零部件的结合点称为节点。这些部位都起着传递力和力矩的作用。把研究的物体在这些支承处产生的力和力矩称为约束反力。载荷和约束反力合在一起就构成物体的外力。静止物体上的外力系必处于平衡；对于运动中的物体，则需列出其运动方程式。

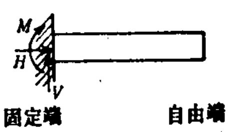
表1所示的是满足齐次边界条件的理想化了的支座，它们被广泛应用于平面问题中。在综合利用这些支座以固定物体的位置时，应使物体运动的自由度为零。自由度为1以上时，称为不稳定支承；自由度为零的，称为稳定支承。图1表示的是根据表1所列的各支座组成稳定支承和不稳定支承的例子。在稳定支承中，仅依据静力学平衡方程即能确定约束反力的，称为静定支承；如据此不能确定约束反力的，则称为静不定支承。在平面问题中，如取直角坐标系，则静力学平衡条件是沿两个正交方向上取力的平衡，和绕垂直于坐标平面的轴取力矩平衡。平面平衡方程式共有三个，假如根据物体支承条件所决定的未知反力数也是三个时，则属于任何约束反力均能确定的静定支承；若支承的未知反力数在四个以上时，就构成静不定支承。当未知反力数为 n 时，则称（$n-3$）为静不定次数。在求静不定反力时，需要用与静不定次数相同的补充方程式来求解，这些方程式是根据变形建立的独立方程。有关静定与静不定支承的例子，如图1所示。

对实际机器和结构来说，问题还在于支承部分的刚度。有时除了考虑上述理想化了的支承条件外，还必需考虑像弹性支承那样的情况，即它的约束反力是变形的函数。

在空间问题中，在正交的三个方向上分别有力和力矩的平衡方程式，合起来共有六个。可以认为空间问题是平面问题的推广。

关于结构构件的节点反力是属于特殊梁和刚架结构中的问题（有关内容可参阅本篇第9章）。

表1 支座的种类

名称	图示	约束与自由度	反力种类
活动铰链支座		绕支点转动自由（如用手摆动，在摆动方向转动自由），沿底座方向平行移动自由	垂直底座方向有一反力V
固定铰链支座		仅绕支点转动自由，不能作任何移动	过支点沿任意方向有一反力，或表示为该反力的二正交分量V和H
固定端支座		不能作任何转动和移动	过支点有正交分反力V、H及反力矩M
自由端		转动及沿任意方向移动均自由	无反力

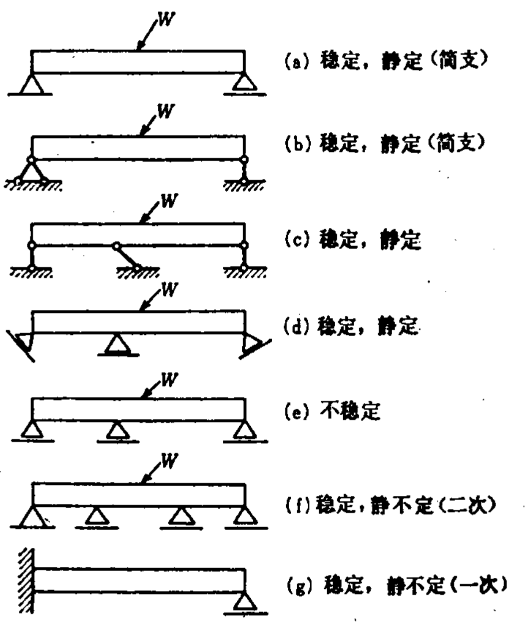


图1 支承的稳定与静定

1·3 应力的定义及种类

1·3·1 内力和应力

一切材料都因外力作用而产生变形。材料抵抗这种变形在其内部就产生力，这种力就称为内力。如在物体内设一假想平面，则此假想平面上的内力应和外力保持平衡。在假想平面上每单位面积上的内力称为应力。把应力沿与假想平面垂直方向和平行方向分解，其垂直分量称为正应力（记作σ)，其平行分量称为剪应力（记作τ)。使假想平面互相拉曳的应力称为拉应力；使假想平面互相压紧的应力称为压应力。

为了指明应力的作用面及作用方向，在物体内设直角坐标系x、y、z。与x、y、z轴垂直的各平面分别称为面x、y、z。如这些面的外法线与坐标轴的正方向一致时，则这样的面称为正面；反之，称为负面。为了表示是在哪个面上和在哪个方向上作用的应力，而在σ和τ的右下方附以脚标。例如，在图2中，把正（负）面上产生的正（负）向应力，表示为σ_x、σ_y、τ_{xy}、τ_{yx}，这样表示的应力称为应力分量。

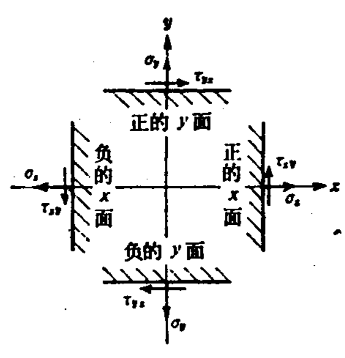


图2 应力分量

虽然在物体内只能产生正应力和剪应力，但是为了区别各种应力状态起见，又采用了种种名称。

在一般情况下，在面 x、y、z 上均产生应力，这样的应力状态称为三向应力。仅在面 x、y 上产生的应力状态，称为平面应力。两个以上的应力分量同时产生的情况，称为复合应力。

再有，在杆件的横截面上，如正应力按线性分布且其合力等于零时，则这样的正应力是由弯矩产生的，所以称它为弯曲应力。在圆轴横截面上，如剪应力的大小与轴线的距离成正比（按线性分布），则这样的剪应力是由扭矩产生的，所以称它为扭转应力。在截面的特殊点附近，应力分布急剧增大，这种现象称为应力集中。

还有，在承受内压的薄壁容器的器壁内，产生的拉应力称为环应力。由于剪应力是平行于作用面产生的，所以又称为切应力。

又如，在没有外力作用的情况下，物体内存在的应力称为残余应力。根据应力产生的原因，又将应力分别称为初应力、装配应力、热装应力、铸造应力、收缩应力等等。由于温度分布原因而引起的应力称为热应力。

再如，根据应力变动的种类加以区分：由冲击载荷引起的应力称为冲击应力；大小随时间改变的应力称为动应力；在极大值和极小值之间、简单而周期变化的应力称为重复应力；在绝对值相等的正负应力之间变化的应力，称为交变应力；在定值和零值之间交替变化的重复应力，称为脉动应力。

不致使机器和结构物破坏，而允许材料产生的最大应力，称为许用应力。由于在设计时把该应力作为标准，所以又称它为设计应力或使用应力。

物体即将产生屈曲时的应力，称为屈曲应力。在应力分布复杂的地方，如不考虑应力集中而只用简单的方法求得的应力，称为名义应力。

1·3·2　平面应力

如图3所示，设平板是在平面 xy 内，现在分析平板内一长方形单元体的应力状态。如在单元体的周边上承受如图3所示的应力时，则与 y 轴夹角 θ 的斜截面上所产生的应力为

$$\sigma_{x'}=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'}=\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x)\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

在 θ 满足 $\mathrm{tg}\,2\theta=2\tau_{xy}/(\sigma_x-\sigma_y)$ 的斜截面上，正应力 $\sigma_{x'}$ 值不是最大就是最小，而剪应力 $\tau_{x'y'}$ 等于零。剪应力为零的截面称为主平面（或称主应力面）；主平面上的正应力称为主应力（σ_1，σ_2）；主应力的作用方向称为主轴（或称主应力轴）；主应力的公式为

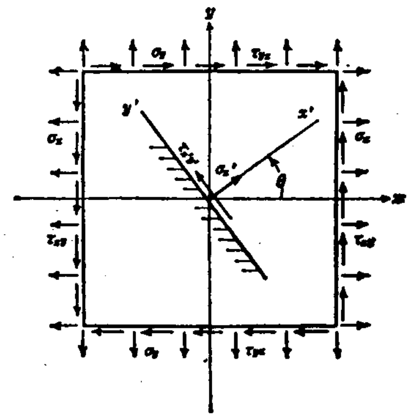


图3　平面应力

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\\sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

如取其中一个主平面的倾角 $\theta=\theta_1$，则当 $\cos 2\theta_1/(\sigma_x-\sigma_y)>0(<0)$ 时，σ_1（σ_2）的作用方向是从 x 轴逆时针转 θ_1 角。而最大或最小剪应力是作用在与主平面夹角为45°的斜截面上，这样的斜截面称为主剪应力面；在主剪应力面上的剪应力称为主剪应力（τ_1，τ_2）；主剪应力的公式为

$$\left.\begin{matrix}\tau_1\\\tau_2\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

若仅在单元体的一个方向上存在主应力时，就称它为单向应力状态。

1·3·3　莫尔应力圆

在图4中，以横坐标为 σ，以纵坐标为 τ。以距离原点O为 $(\sigma_1+\sigma_2)/2$ 的C点为圆心，以 $(\sigma_1-\sigma_2)$ 为直径画圆，与 σ 轴交于A、B两点，于是得 $\overline{OA}=\sigma_1$，$\overline{OB}=\sigma_2$。如果从CA直线逆时针转 2θ 角引直线P′P，则P点坐标值即为单元体 x 面上的正应力 σ_x 和剪应力 τ_{xy}，此 x 面就是从单元体的主应力 σ_1㊀方向逆时针转 θ 角所得的面；P′点坐标值即为 y 面上的正应力 σ_y 和剪应力 τ_{yx}。此圆即称为莫尔应力圆。

反之，如给定 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}，需用图解法求主应力及其作用方向时，首先要确定 $\sigma_x=\overline{OE}$ 和 $\sigma_y=\overline{OE'}$ 的点E和点E′，E和E′的中点即为圆心C。其次，通过点E和点E′作 σ 轴的垂线，当 $\tau_{xy}>0(<$

㊀ 原文为 σ_2——译者注。

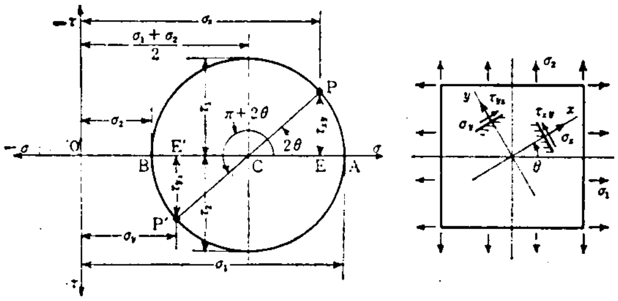


图 4　莫尔应力圆

0）时，在 τ 轴的正（负）方向定出 $|\tau_{xy}| = \overline{EP}$ 的一点 P，以 CP 为半径画圆，交 σ 轴于 A、B 两点，则 $\overline{OA} = \sigma_1$，$\overline{OB} = \sigma_2$。因 $\angle ACP = 2\theta$，故 σ_1 作用在从单元体的 x 轴逆时针（或顺时针）转 θ 角的方向上。

1·4　三 向 应 力

1·4·1　应力分量

一般地说，应力在物体内是按空间分布的。在物体内设直角坐标系 x、y、z。在单元体的面 x、y、z 上产生的应力分量分别为 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{xz} 和 τ_{yz}，如图 5 所示。设任意斜截面的法线 x' 的方向余弦为 (l、m、n)，则该截面上的正应力和剪应力可表示为

$$\sigma_{x'} = l_1^2\sigma_x + m_1^2\sigma_y + n_1^2\sigma_z + 2l_1m_1\tau_{xy} + 2m_1n_1\tau_{yz} + 2l_1n_1\tau_{xz}$$

$$\tau_{x'y'} = l_1l_2\sigma_x + m_1m_2\sigma_y + n_1n_2\sigma_z + (l_1m_2 + l_2m_1)\tau_{xy} + (n_1l_2 + n_2l_1)\tau_{xz} + (m_1n_2 + m_2n_1)\tau_{yz}$$

$$\tau_{x'z'} = l_1l_3\sigma_x + m_1m_3\sigma_y + n_1n_3\sigma_z + (l_3m_1 + l_1m_3)\tau_{xy} + (n_3l_1 + n_1l_3)\tau_{xz} + (m_3n_1 + m_1n_3)\tau_{yz}$$

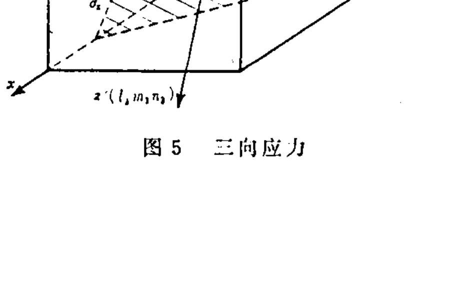


图 5　三向应力

如改变截面方向，则在某一方向的截面上，存在最大正应力，而合剪应力 $\tau = \sqrt{\tau_{x'y'}^2 + \tau_{x'z'}^2} = 0$。合剪应力为零的面共有三个，这些面即为主平面。主平面上的正应力即为主应力（σ_1、σ_2、σ_3）。主应力的作用方向即为主轴，主轴彼此正交。主应力是满足方程式

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)\sigma - \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} = 0$$

的三个根。

另外，在某截面上剪应力存在极值，该截面即为主剪应力面㊀，该面与主平面的夹角为 45°。设作用在主剪应面上的主剪应力为 τ_1、τ_2 和 τ_3，则

$$\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad \tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad \tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

如令

$$3\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

则一般应力状态等于下述两种应力状态的叠加，即：一个是在 x、y、z 三个面上都作用着正应力 σ_m；另一个是在三个面上分别作用着正应力（$\sigma_x - \sigma_m$）、（$\sigma_y - \sigma_m$）、（$\sigma_z - \sigma_m$）和剪应力 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。前者应力分量称为球分量，后者应力分量称为偏分量。

1·4·2　应力椭圆体

在图 5 中，设 x' 面上产生的全应力为 p，则有

$$p^2 = \sigma_{x'}^2 + \tau_{x'y'}^2 + \tau_{x'z'}^2$$

假使轴 x、y、z 为主轴，以 $2\sigma_1$、$2\sigma_2$、$2\sigma_3$ 为直径作椭圆体，则全应力 p 的大小就等于从椭圆体的中心到其表面的距离。这个椭圆体即称为应力椭圆体。如 $\sigma_3 = 0$ 时，则应力椭圆体就变成以 $2\sigma_1$ 和 $2\sigma_2$ 为直径的应力椭圆。

1·4·3　莫尔应力圆(三向)㊁

假定单元体的主应力 σ_1、σ_2、σ_3 已给定，今用图解法求任意截面上的正应力和合剪应力。设该截面法线与三个主应力的作用方向 x、y、z 的夹角分别为 α、β、γ。在图 6 中，取横坐标为 σ、纵坐标为 τ，其中 $\overline{OA} = \sigma_1$，$\overline{OB} = \sigma_2$，$\overline{OC} = \sigma_3$。点

㊀ 原文无此“面”字——译者注。

㊁ （三向）二字是译者加的——译者注。

O_1、O_2、O_3分别为线段BC、AC、AB的中点。以点O_1、O_2、O_3为圆心，以$(\sigma_2-\sigma_3)/2$、$(\sigma_1-\sigma_3)/2$、$(\sigma_1-\sigma_2)/2$为半径画圆Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，这些圆称为主应力圆。然后过点A、B、C引垂线；再引过点A、B、C并与上述垂线的夹角分别为α、β、γ的直线，这些直线与主应力圆Ⅲ、Ⅱ、Ⅰ分别交于点a、b、c。再以点O_1、O_2、O_3为圆心，作过点a、b、c的三个圆，则这三个圆交于一点，此交点P的横坐标即为所求面上的正应力σ，纵坐标即为剪应力τ。

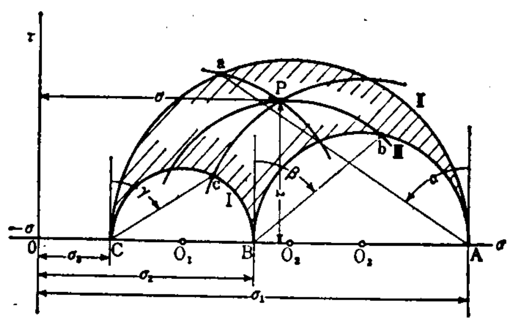


图6 莫尔应力圆（三向）

1·5 平衡方程

物体内一点的应力状态，可用包括该点在内的微六面体的各面上的应力分量来表示。作用在此单元体上的体积力，和各应力分量必须保持平衡。表达这些应力分量的平衡式称为应力平衡方程式。例如，在直角坐标系中，设作用在单元体上的体积力在x、y、z方向的分量为X、Y、Z，则平衡方程可写成如下形式，即

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0$$

在物体表层的单元体，由于它的外表面也就是物体的外表面，所以作用在这个表面上的外力（即表面力）必须和单元体其它各面上的应力保持平衡。例如，设l、m、n为单元体表面一点的法线的方向余弦；p_x、p_y、p_z为作用在单元体单位面积上的表面力在x、y、z方向的分量，则平衡方程为

$$p_x=\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{zx}n$$

$$p_y=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n$$

$$p_z=\tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n$$

通常将物体表面的应力和位移必须满足的条件称为边界条件。

设u、v、w为物体内任一点沿x、y、z方向的位移。利用应力与应变及应变与位移的关系，可将平衡方程用位移分量表示为

$$\nabla^2 u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{X}{G}=0$$

$$\nabla^2 v+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{Y}{G}=0$$

$$\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{Z}{G}=0$$

式中 $e=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

上式也可改写成下面的形式，即

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}-2\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y}-\frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right)+\frac{X}{G}=0$$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial y}-2\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z}-\frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right)+\frac{Y}{G}=0$$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}-2\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x}-\frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right)+\frac{Z}{G}=0$$

式中 $2\omega_x=\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}$

$$2\omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

e为体积应变；ω_x、ω_y、ω_z为角位移分量，等于主轴的转角。

1·6 应变的定义及种类

1·6·1 变形和应变

物体受外力作用即产生变形。物体各部分的变形一般并不相同，但在分析物体内任意点处的微小部分的变形时，可近似认为是均匀的。表示这种变形程度的量，称为物体在该点的应变量，或简称应变。

1·6·2 纵向应变

圆截面直杆受轴向拉伸或压缩时，则杆件各处

的应变均相同（参阅图7）。考虑杆长为 l 的一段，设变形后伸长量为 λ（压缩时 λ 为负值），则应变为 $\varepsilon=\lambda/l$，并称为单向纵向应变，有时称为正应变或线应变。如物体的应变不均匀时，则于物体内任意点处沿某方向取一微段，长为 dl，该微段因物体变形而伸长 $d\lambda$，则 $\varepsilon=d\lambda/dl$，此即为该点沿该方向的纵向应变。$d\lambda$ 为正，上述应变称为拉应变；$d\lambda$

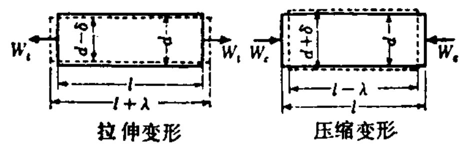


图　7

为负，上述应变称为压应变。如不加负号而预先指明是压应变时，则指的是它的绝对值。

圆杆受拉伸时，其长度增加而直径变小。设圆杆直径为 d，变形后直径减小量为 δ，则 $\varepsilon'=-\delta/d$ 称为横向应变（参阅图7）。根据前面的定义，横向应变也是线应变的一种形式。或者说纵向应变的概念比较广泛；而横向应变通常是在三个主应力中只有一个主应力不为零，即在单向应力状态下，相对于纵向应变而使用的。

1·6·3　剪应变

在物体内取包括某点在内的单元体，设其中一个平面为 dF，与此平面平行并相隔一微距离 dl 的平面为 dF'（参阅图8）。由于物体变形使二平面产生相对位移 $d\lambda_s$，这种变形称为该点的剪应变，其大小用 $\gamma=d\lambda_s/dl$ 表示。

剪应变的大小，还可用下述方法描述：在所研究的点处，设想两个互相垂直的微线段，它们在变形前所夹直角，在变形后减小了 γ'，而 $\gamma=\mathrm{tg}\gamma'$，此即为该点在该方向上的剪应变。剪应变是无量纲的量，当其数值远小于1时，则 $\gamma'\approx\gamma$，因此在一般情况下，没有必要对 γ' 和 γ 加以区别。

如上所述，由于假定应变很小，这就使数学处理变得很简单，并在多数情况下，根据这一假定得出有益的结论。因此，只要不预先特别指出，采用的就是小变形这个假设。

如图9所示，边长为1的正方形，已知产生的剪应变为 γ。这种变形状态是和同一正方形沿其一对角线产生线应变 $\varepsilon=\gamma/2$ 与沿另一对角线产生线应变 $\varepsilon=-\gamma/2$ 的情况完全相同。

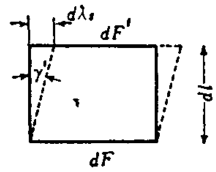


图　8

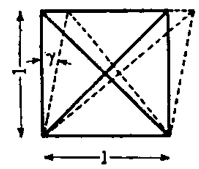


图　9

1·6·4　体积应变

设在物体内包括所研究点在内的微体积为 dV，因物体变形使该微体体积增大了 δdV，取比值为

$$\varepsilon_v=\frac{\delta dV}{dV}$$

ε_v 称为该点的体积应变。设体积为 V 的物体，其表面承受流体压力的作用，体积减小为 dV，取比值为

$$\varepsilon_v=\left|\frac{dV}{V}\right|$$

ε_v 的绝对值称为体积应变。

1·7　三向应变

1·7·1　应变分量

设任意形状的物体B，由于外力作用而产生变形并移到 $\bar{B}$（参阅图10）。为了表示物体各点位置，在变形前给出各点的坐标值。设物体B的一点 $P(x,\ y,\ z)$ 移到点 $\bar{P}(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$，令

$$u=\bar{x}-x$$
$$v=\bar{y}-y$$
$$w=\bar{z}-z$$

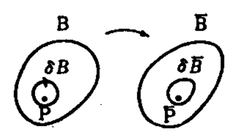


图　10

u、v、w 为 $P(x,\ y,\ z)$ 的函数，是表示点P的位移向量。

现在着重分析物体B上一点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 及包括该点在内的微小部分 δB，当其移到 $\delta\bar{B}$ 时所产生的应变。设 δB 上一点坐标为 $(x_0+\delta x,\ y_0+\delta y,\ z_0+\delta z)$。在 $\delta\bar{B}$ 处产生的应变与 P_0 点的位移 $(u_0,\ v_0,\ w_0)$ 大小无关，仅与 P_0 点的相对位移 $(u-u_0,\ v-v_0,\ w-w_0)$ 有关。

应变与位移的关系为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\qquad\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\qquad\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\qquad \omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

及

$$\gamma_{zy}=\gamma_{yz}\qquad \gamma_{xz}=\gamma_{zx}\qquad \gamma_{yx}=\gamma_{xy}$$

因 δx、δy、δz 很小，所以

$$\delta u=u-u_0=\varepsilon_x\delta x+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\delta y+\frac{1}{2}\gamma_{xz}\delta z-\omega_z\delta y+\omega_y\delta z$$

$$\delta v=v-v_0=\frac{1}{2}\gamma_{yx}\delta x+\varepsilon_y\delta y+\frac{1}{2}\gamma_{yz}\delta z-\omega_x\delta z+\omega_z\delta y$$

$$\delta w=w-w_0=\frac{1}{2}\gamma_{zx}\delta x+\frac{1}{2}\gamma_{zy}\delta y+\varepsilon_z\delta z-\omega_y\delta x+\omega_x\delta z$$

ε、γ、ω 与1相比很小。含 ω 各项是表示 δB 作整体刚性转动，转角用矢量（ω_x，ω_y，ω_z）表示。含 ε 及 γ 的各项是表示变形，即以 δx、δy、δz 为棱边的长方体，变形后变成平行六面体，它的棱长分别变为 $(1+\varepsilon_x)\delta x$、$(1+\varepsilon_y)\delta y$、$(1+\varepsilon_z)\delta z$。变形前棱边 δx 与 δy 所夹直角变形后变为 $(\pi/2-\gamma_{xy})$。同样，δy 与 δz 和 δz 与 δx 之间的角度变化具有相同形式。物体 δB 的变形状态可由 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy} 确定出来。在工程上，称上述这些量为点 P_0 的六个应变分量。而在一般讨论中，常引用应变张量这个定义，并以 $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$、$\frac{1}{2}\gamma_{zx}$、$\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 作为剪应变。

1·7·2 应变分量的坐标变换

将直角坐标系（x，y，z）所表示的应变分量，改用直角坐标系（x'，y'，z'）表示时，可作如下变换：

设轴 x'、y'、z' 的方向余弦分别为（l_1，m_1，n_1）、（l_2，m_2，n_2）、（l_3，m_3，n_3）。在新坐标轴的各分量上附加一撇（′），则

$$\varepsilon_{x'}=l_1^2\varepsilon_x+m_1^2\varepsilon_y+n_1^2\varepsilon_z+m_1n_1\gamma_{yz}+n_1l_1\gamma_{zx}+l_1m_1\gamma_{xy}$$

$$\gamma_{y'z'}=2l_2l_3\varepsilon_x+2m_2m_3\varepsilon_y+2n_2n_3\varepsilon_z+(m_2n_3+m_3n_2)\gamma_{yz}+(n_2l_3+n_3l_2)\gamma_{zx}+(l_2m_3+l_3m_2)\gamma_{xy}$$

关于其它应力分量也具有完全相同的形式。在三向应力分量的坐标变换式中，如使 $\sigma\to\varepsilon$，$\tau\to\gamma/2$，则得与上式完全相同的公式。也就是说，关于三向应力的一些结论，对于三向应变也成立。比如，在正交的三个主方向上，纵应变存在极值；在这些方向上剪应变为零；具有极值的线应变称为主应变（ε_1，ε_2，ε_3）；三个主应变当中的最大值就是该点线应变的最大值，其中最小值也就是该点线应变的最小值。三个主应变的值是方程

$$\varepsilon^3-(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\varepsilon^2+\left[\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y-\frac{1}{4}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2)\right]\varepsilon-\left[\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+\frac{1}{4}\gamma_{yz}\gamma_{zx}\gamma_{xy}-\frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2+\varepsilon_y\gamma_{zx}^2+\varepsilon_z\gamma_{xy}^2)\right]=0$$

的三个根。体积应变为

$$\varepsilon_v=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

1·7·3 应变椭圆体

可以想到，在应变方面也存在一个与应力椭圆体平行的椭圆体。但一般所说的应变椭圆体是与应力椭圆体的性质不同的椭圆体。以点 P_0 为中心、以 ds 为半径的微球，当物体变形时该微球就变成半径为 $(1+\varepsilon)ds$ 的椭圆体，此即称为应变椭圆体。

如取 x、y、z 为变量，则有二次曲面方程

$$\varepsilon_xx^2+\varepsilon_yy^2+\varepsilon_zz^2+\gamma_{yz}yz+\gamma_{zx}zx+\gamma_{xy}xy=\text{常数}$$

此二次曲面，也是一个与坐标轴取法无关的、在空间固定的二次曲面，此曲面称为应变二次曲面。

1·8 协 调 条 件

从位移（u，v，w）可导出以下6个应变方程，即

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\\&\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

现在，从这些方程中将 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 等消去，即求得应变分量之间的恒等式为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}\\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\\
&2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
&2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)\\
&2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (2)
$$

上述方程称为变形协调方程。若根据式（1）由位移导出某个应变分布状态，则其必要条件是使变形协调条件成立。

前面，是根据公式（1）给出应变定义的，所以自然要想到给出该应变的位移，但在下面要将应变的含义加以扩大。由于材料加工、温度分布不均、材料内部存在应力等都有可能使物体处于某种应变状态。若想从这样的物体中取出包括一点P在内的微体（例如微立方体），并使其表面自由，则该微体即处于力学意义上的自由状态（立方体变成平行六面体）。为了从这种自由状态恢复到微体处在物体里边时的原来状态，就必须在其表面加外力，给它以原来的应变。从微观讲，这种应变和由式（1）导出的应变没有什么不同。在这种意义下，应变分布作为位置的函数而给定时，为了判断该应变分布是否是从位移推导出来的，需引用协调方程加以判定。也就是说，如果物体内任意一条连续曲线、在物体内能向一点连续收缩其形状，如单连域物体（例如空心球能向一点连续收缩，而空心圆筒则不能），当给定的应变分布满足协调方程式时，则其应变就能用公式（1）从位移（u, v, w）导出。

从另一角度来说，具有内部应变的物体，式（2）等号左右两边之差

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

各个数值不因外力引起的物体变形而改变。

对于不是单连域物体来讲，首先要证明变形协调条件成立，然后用假想截面把物体截成单连域体。按上面所述对物体进行分割时，应不弄乱变形协调条件。这样得到单连域体之后，对应变进行积分，即求得位移的最后结果。如截面两侧位移数值相同，就可做出应变由位移（u, v, w）导出的这一结论。

1·9 对称性及叠加原理的应用

现在分析几何形状对称的物体。如其支承条件是对称的，并承受对称载荷作用时，则其约束反力必对称；若承受反对称载荷作用时，则其约束反力必也反对称。基于同样理由，在外力对称或反对称作用的情况，与其相应的内力、应力分布及应变分布等也应是对称的或反对称的。因此，在这种场合，只需对对称轴一侧进行求解即可，从而减少了计算时间。

由于对一般外力可分解成对称载荷和反对称载荷，所以可用上述同样办法按对称和反对称情况分别处理。由于利用了对称性，使得公式化的典型例题扩大了适用范围，降低了静不定次数，并且内力、应力及应变也都比较容易地进行计算。

当多个外力同时作用在物体上时，所产生的内力、应力和变形的大小，等于把这些力依任意的先后顺序分别作用在原来位置上所产生的各个结果的叠加值。由于是将本来在刚体静力学中成立的叠加原理，应用在以小变形为前提的变形体上，所以只有在允许用变形前的状态分析力的平衡时，此原理才能成立。因而要求：（1）力作用点处的位移与物体尺寸相比非常小；（2）变形时力作用点处的位移与力的大小成正比。

根据叠加原理，可把复杂外力作用下的问题化作几个简单外力作用下的问题组合起来求解，从而使一些公式化的典型例题的应用范围得到扩大。

第2章 弹性、塑性及蠕变

2·1 弹性变形

2·1·1 定义

对在没有外力作用的状态下、而体内又无应力和应变的物体施加外力作用时，如它所产生的变形、体内所产生的应力和应变在去掉外力时能够恢复，即物体能恢复到没有应力和应变的原来状态，则这样的物体称为弹性体，所产生的变形称为弹性变形。对于固体材料来说，如不超过一定应力极限值和一定测定时间，可以十分精确地看作是弹性体。如果超过这一应力极限和测定时间来描述材料行为时，就需引入塑性（参阅本篇2·6）、粘弹性（参阅本篇2·7）或蠕变（参阅本篇2·8）等概念。

2·1·2 弹性模量

本节讲述的是工业上经常使用的弹性模量，也就是满足虎克定律——应力不超过材料的比例极限时，应力与其相应的应变之比（σ/ε）为一常数；并且与方向、位置无关，即所谓各向同性匀质的虎克弹性体的弹性模量。

a. 弹性模量 单向正应力σ与其方向上的应变ε之比，称为弹性模量（或称纵向弹性模量），有时称为杨氏模量，通常用E表示，即

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{(P/A)}{(\lambda/l)}$$

式中 P为沿杆件轴线作用的集中载荷；A为横截面面积；λ为杆件的伸长量或缩短量；l为杆件的原长。

b. 剪切弹性模量 剪应力τ与其相应的剪应变γ之比，称为剪切弹性模量，通常用G表示，即

$$G=\frac{\tau}{\gamma}$$

c. 体积弹性模量 作用在弹性体全部表面上的均匀分布应力p（例如水压）与其对应的体积应变ε_v之比，称为体积弹性模量，通常用K表示，即

$$K=\frac{p}{\varepsilon_v}$$

d. 泊松比 由单向正应力引起的弹性杆件的横向应变ε_1与轴向应变ε之比，在弹性范围内对同一材料来说为定值，ε_1与ε的绝对值之比称为泊松比，通常用ν或$1/m$表示，即

$$\nu=\frac{1}{m}=\frac{|\varepsilon_1|}{|\varepsilon|}$$

把ν的倒数m称为泊松反比或泊松数。

e. 弹性模量间的关系 在以上四个弹性常数中，有两个是独立的，如给定其中任意两个量，则其余的量可以诱导出来。在表2中，给出这一关系的几个示例。表3是有代表性材料的弹性模量E的值（参阅本书第5篇表1）。

2·1·3 弹性的基本公式

物体内的应力分量σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}和τ_{zx}，满足本篇1·5的三个平衡方程（静力学条件）；而在应变ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}和位移u、v、w之间有本篇1·8的六个关系式（几何条件）。弹性基本方程式就是上述方程组再加上应力和应变相结合的应力-应变关系式，即广义虎克定律（物理条件）。

表2 弹性模量间的关系

	E,ν	G,ν	E,G	E,K	G,K
E	E	$2(1+\nu)G$	E	E	$9KG/(3K-G)$
G	$E/2(1+\nu)$	G	G	$3EK/(9K-E)$	G
K	$E/3(1-2\nu)$	$2(1+\nu)G/3(1-2\nu)$	$EG/(3G-E)$	K	K
ν	ν	ν	$(E-2G)/2G$	$(3K-E)/6K$	$(3K-2G)/3(2K+$ [illegible]

注：此表为任意两个弹性常数E和ν或G和ν等为独立的情况下，给出其它弹性常数的表达式。

表3　代表性材料的弹性模量 E①

E = 表中数值 × 10^4kgf/mm²

温度 ℃	21.1	37.8	93.3	148.9	204.4	260.0	315.6	371.1	426.7	482.2	537.8	593.3	648.9
温度 °F	70	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
碳钢（C0.25%以下）	1.96		1.95	1.93	1.90	1.86	1.81	1.74	1.65	1.30	1.08	0.91	
碳钢（C0.25%以上）	2.10		2.07	2.04	1.99	1.93	1.88	1.79	1.67	1.51	1.32	1.05	0.79
钼—低铬钢②	2.10		2.07	2.04	2.01	1.97	1.93	1.87	1.81	1.72	1.62	1.43	1.10
钼—铬钢③，奥氏体不锈钢	1.93		1.91	1.88	1.86	1.83	1.79	1.75	1.70	1.65	1.60	1.54	1.46
铬钢④	2.05		2.02	1.99	1.95	1.90	1.83	1.74	1.62	1.48	1.31	1.10	0.86
灰口铸铁	0.94		0.93	0.91	0.89	0.86	0.82	0.77	0.72				
铝	0.75		0.73	0.71	0.67	0.60							
铜（99.98%）	1.12	1.11	1.10	1.08	1.06	1.03	1.00	0.96					
商品黄铜⑤	0.98	0.98	0.96	0.95	0.91	0.89	0.86	0.83					
磷青铜⑥	1.05	1.04	1.02	0.98	0.95	0.90	0.83	0.74	0.61				

① 摘自Michel, R., Trans. ASME, 77-2 (1955-2), 151并作了换算。

② 含铬不超过3%。

③ 含铬5～9%。

④ 含铬12，17，27%。

⑤ 66铜，34锌。

⑥ 85.38铜，12.55锡，1.01锌，0.24磷，0.02铁，0.61铅，0.11铝。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)]/E + \alpha T\\
\varepsilon_y &= [\sigma_y - \nu(\sigma_z+\sigma_x)]/E + \alpha T\\
\varepsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)]/E + \alpha T\\
\gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G;\ \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G\\
\gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式中　α 为线热膨胀系数；T 是以标准温度（应力为零时应变也为零的温度）为准的温度变化；对于 G 和 ν 可参阅本篇2·1·2。由上式解出应力

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\{\varepsilon_x + [\nu/(1-2\nu)]e\\
&\quad -[(1+\nu)/(1-2\nu)]\alpha T\}\\
\sigma_y &= 2G\{\varepsilon_y + [\nu/(1-2\nu)]e\\
&\quad -[(1+\nu)/(1-2\nu)]\alpha T\}\\
\sigma_z &= 2G\{\varepsilon_z + [\nu/(1-2\nu)]e\\
&\quad -[(1+\nu)/(1-2\nu)]\alpha T\}\\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}\quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

式中　e 为体积应变 $=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$。

将本篇1·8的应变和位移的关系代入上式，即得应力和位移关系。

2·1·4　应变能、弹性能

a. 定义　物体受外力作用产生变形时，外力所做的功在数值上等于应变能。物体由外力引起的应力值在弹性极限以下时，产生的应变是弹性应变，这时应变能全部以势能的形式贮存在物体内；如去掉外力，则全部势能就立即释放出来。这样的应变能称为弹性应变能或弹性能。当应力超过弹性极限，物体就产生永久变形，应变能的大部分就消耗在物体的塑性变形上，最终以热的形式散失掉，剩下的部分（约10%）贮存在物体内的歪斜的晶格中。

b. 拉伸压缩应变能　设 P 为轴向载荷；λ 为轴向伸缩量；l 为杆件的全长；$\overline{U}$ 为杆件总应变能；U 为杆件单位体积应变能。根据图11a可写出

$$\overline{U} = \int_0^{\lambda} P\,d\lambda \quad \text{kgf·cm}$$

$$U = \overline{U}/(Al) \quad \text{kgf·cm/cm}^3$$

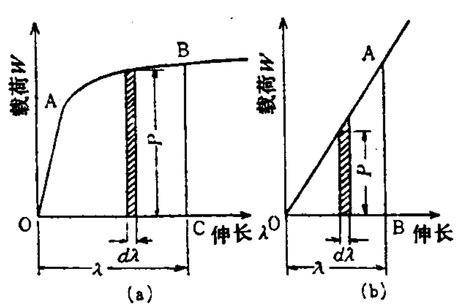


图11　应变能（拉伸，压缩）

就是说，在载荷-变形图上，应变能是由达到该载荷点的曲线与变形轴所围成的面积OABC给出。在弹性范围内的特殊情况下，

$$\overline{U}=\frac{1}{2}P\lambda=\frac{1}{2}P^2l(AE)$$

$$=\frac{1}{2}(\sigma^2/E)Al \quad \text{kgf·cm}$$

$$U=\frac{1}{2}\sigma^2/E=\frac{1}{2}\varepsilon^2E \quad \text{kgf·cm/cm}^3$$

$\overline{U}$用载荷-变形图在弹性范围内的△OAB面积来表示（图11b）。材料到达屈服时，在单位体积内所贮存的应变能，称为最大弹性应变能。

c．剪切弹性应变能 图12所示的矩形ABCD，由于载荷F的作用而变成平行四边形㊀A′BCD′。设A为载荷F的作用面积，G为剪切弹性模量，则剪切弹性能$\overline{U}$及U分别为

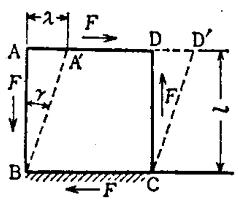


图12 应变能（剪切变形）

$$\overline{U}=\frac{1}{2}F\lambda=\frac{1}{2}F^2l/(AG)$$

$$=\frac{1}{2}(\tau^2/G)Al \quad \text{kgf·cm}$$

$$U=\frac{1}{2}\tau^2/G=\frac{1}{2}\gamma^2G \quad \text{kgf·cm/cm}^3$$

d．非匀布载荷或非等截面的情况 将按本节b项或c项所求得的各微小部分的弹性应变能总和起来，即可计算出物体的总弹性应变能。例如，当杆件横截面上的轴力P及横截面面积A为杆件轴线上位置x的函数而给定时，则

$$\overline{U}=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{P^2}{AE}\,dx$$

将等截面杆件沿铅垂方向悬挂时，杆件因自重而伸长。设其单位体积的重量为γ，在距杆件下端为x处的载荷应为$P=\gamma xA$，则

$$\overline{U}=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{\gamma^2x^2A}{E}\,dx=\frac{1}{6}\,\frac{\gamma^2l^3A}{E}$$

e．弹性能的一般公式 根据一般三向应力状态的六个应力分量和六个应变分量，或者三个主应力和三个主应变而表达的弹性体单位体积内所贮存的弹性应变能（弹性比能）公式（参阅本篇1·4三向应力）为

$$U=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})$$

$$=\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3)$$

弹性能（一般称为应变能）与坐标轴的选取方法无关。如用本篇2·1·3的应力-应变关系及表2所示的关系，将U改写（设温度无变化），则

$$U=G[\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2+\nu e^2/(1-2\nu)$$

$$+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)]$$

$$=[(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)$$

$$-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)]/(2E)$$

$$+(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)/(2G)$$

如按主分量表示时，则

$$U=G[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\nu e^2/(1-2\nu)]$$

$$=[(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3$$

$$+\sigma_3\sigma_1)]/(2E)$$

$$=(1-2\nu)(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2/(6E)$$

$$+(1+\nu)[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2$$

$$+(\sigma_3-\sigma_1)^2]/(6E)$$

$$=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2/(18K)$$

$$+(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)/(3G)$$

上式U的最后表达式指出：弹性比能等于弹性体的单位体积的体积改变所需的功U_1（体积改变比能）和单位体积改变形状所需的功U_2（形状改变比能）之和，即

$$U_1=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2/(18K)$$

$$=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)/6$$

$$=\frac{1}{2}[(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3]e$$

$$U_2=(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)/(3G)$$

$$=[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2$$

$$+(\sigma_3-\sigma_1)^2]/(12G)$$

如$\sigma_1=-\sigma_2=\sigma$，$\sigma_3=0$（即$\tau_1=\sigma$、$\tau_2=-\sigma/2$、$\tau_3=\sigma/2$），则$U_2$和本篇2·1·4c的定义一致。

2·1·5 弹性理论的定理

设有表面为S占有空间为D的弹性体，其单位体积沿坐标轴方向所受体积力为X、Y、Z。在表面S_I部分上，给出静力边界条件为

$$\left.\begin{aligned}p_x&=\sigma_xn_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z=p_x^*\\p_y&=\tau_{yx}n_x+\sigma_yn_y+\tau_{yz}n_z=p_y^*\\p_z&=\tau_{zx}n_x+\tau_{zy}n_y+\sigma_zn_z=p_z^*\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

式中 n_x、n_y、n_z为表面外法线方向余弦；p_x、p_y、p_z为作用在表面上的外力的分向量。在剩下

㊀ 原文为“菱形”——译者注。

表面S_{I}部分上，给出几何边界条件为

$$u=u^*\quad v=v^*\quad w=w^* \tag{6}$$

式中 u^*、v^*、w^*为表面给定位移的分向量。如应力及位移在区域D内能满足本篇1·5的平衡方程和2·1·3及1·8中应力与应变关系，同时在S_{I}和S_{II}上分别满足条件（5）及条件（6），则它们就是弹性问题的正确解。下面讲述有关这类弹性问题的基本定理[1]。

a．最小势能定理　在满足几何边界条件（6）的位移当中，正确的解（是将位移代入应力-位移关系所求得的应力能满足平衡方程和静力边界条件的解）应该使势能

$$V=\int_D U\mathrm{d}v-\int_{S_{\mathrm{I}}}(p_xu+p_yv+p_zw)\mathrm{d}S-\int_D(Xu+Yv+Zw)\mathrm{d}v$$

为最小。式中U为用应力表示的弹性比能（参阅本篇2·1·4 e）。

b．最小余能定理　在满足平衡方程和静力边界条件（5）的应力当中，正确的解（根据应力-位移关系所决定的位移，能满足几何边界条件（6）的解）应该使余能

$$V'=\int_D U\mathrm{d}v-\int_{S_{\mathrm{I}}}(p_xu^*+p_yv^*+p_zw^*)\mathrm{d}S$$

为最小。式中U为用应力表示的弹性比能（参阅本篇2·1·4 e）。

c．最小应变能定理　作为本节b项的特殊情况，对表面条件仅给出静力条件（5）时，在满足平衡方程和边界条件的应力当中，正确的解（根据应力-位移关系所确定的位移的解）应该使应变能

$$\overline{U}=\int_D U\mathrm{d}v$$

为最小。式中U为用应力表示的弹性比能（参阅本篇2·1·4 e）。

上述三个定理，在用变分法求解弹性问题时是很重要的，对梁、板、壳等均能适用。

d．佩得（Betti）互等定理　设与表面载荷p_x、p_y、p_z和体积力X、Y、Z对应的位移和应力分别为u、v、w和σ_x、σ_y、……，与表面载荷p_x'、p_y'、p_z'和体积力X'、Y'、Z'对应的位移和应力分别为u'、v'、w'和σ_x'、σ_y'、……，则有

$$\int_S(p_xu'+p_yv'+p_zw')\mathrm{d}S+\int_D(Xu'+Yv'+Zw')\mathrm{d}V=\int_S(p_x'u+p_y'v+p_z'w)\mathrm{d}S+\int_D(X'u+Y'v+Z'w)\mathrm{d}V$$

现将互等定理应用于梁的问题为例：设$X=Y=Z=0$，$p_x=p_z=0$，$p_y=p(x)(0\leqslant x\leqslant l)$，$u=w=0$，$v(x)=y$，根据互等定理，有

$$\int_0^l py'\mathrm{d}x=\int_0^l p'y\mathrm{d}x$$

设作用在x_j位置上的单位载荷在x_i位置产生的位移为α_{ij}（影响系数，参阅本篇4·10），则由$p(x)=P_1\delta(x-x_1)$（δ为δ函数）在x_2处引起的位移为$y_2=\alpha_{21}P_1$，由$p'(x)=P_2\delta(x-x_2)$在x_1处引起的位移为$y_1'=\alpha_{12}P_2$。因此，根据互等定理，得

$$\alpha_{21}=\alpha_{12}$$

根据上述结果可以知道，由移动载荷（在某一时刻处于位置x）在梁中央引起的位移，等于载荷移动到梁中央时在位置x处引起的位移。

2·1·6　二维弹性问题

二维弹性理论一般是解决所谓平面应力状态和平面应变状态这两类问题。平面应力状态，是指弹性体内的应力向量通常平行于定平面（垂直于该定平面方向的应力分量为零）的那种应力状态（例如：承受面内载荷的非常薄的平板）；平面应变状态，是指位移向量（刚体位移除外）通常平行于定平面（垂直于该定平面方向的应变分量为零）的那种应变状态。此外，有广义的平面应力状态，如有限厚度的平板承受对于中面对称的面内载荷作用；对于这种板来说，垂直于中面方向的应力分量可看作为零，同时认为面内应力沿板厚度方向是均匀的，因而可按平面应力状态处理。

设定平面为xy面，平面应力问题和平面应变问题的方程组如表4所示。表中的A、B、E栏是二者通用的。对于边界条件只给定应力的单连域的

(1)　Sokolnikoff, I. S., Math. Theory of Elasticity.(1956), 382, McGraw-Hill; 鷲津久一郎, 塑性論, (1957), 岩波書店.