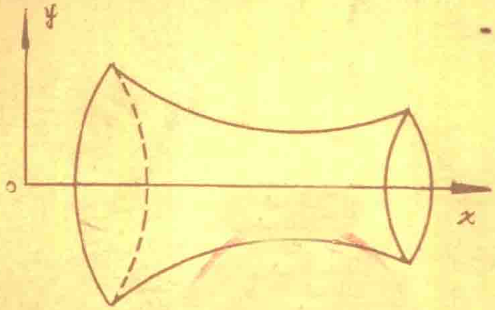
变分法及其应用

彭旭麟　罗汝梅　编著



華中工學院出版社

变分法及其应用

彭旭麟　罗汝梅　编著

华中工学院出版社

变分法及其应用

彭旭麟　罗汝梅　编著

*

责任编辑　孙加可

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行　各地新华书店经售

湖北省沔阳县印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：7.25　字数：164,000

1983年7月第一版　1983年7月第一次印刷

印数：1—10,000

统一书号：13255—016　定价：0.90元

内 容 简 介

本书大致分为三个部分：第一部分系统地介绍古典变分理论，阐述多种类型的泛函极值问题；第二部分介绍变分问题直接解法，考虑到以伽辽金法为代表的加权剩余法的广泛应用，对这类方法给予了适当篇幅．从应用角度来看，这部分主题是微分方程边值问题的变分解法，因而介绍了如何寻求能量积分的问题；第三部分比较扼要地介绍变分法在力学方面及最优控制方面的应用．全书共七章，即：变分问题与泛函极值，极值条件，可动边界问题，条件极值，变分问题直接解法，力学中的变分原理，变分法与最优控制．

本书可作为高等工科院校本科生及研究生的教材或教学参考书；也可供对应用数学、计算数学感兴趣的科技工作者以及高等工科院校有关专业教师参考．

目　　录

前　言

编写本书的目的是希望提供一本变分法的简明教程或中级读物，其中包括古典变分理论、变分问题直接解法和变分方法的某些应用。

本书前四章主要介绍古典变分理论，阐述了多种类型的泛函极值问题．第5章介绍变分问题直接解法．考虑到以伽辽金法为代表的加权剩余法（WRM）的广泛应用，我们对这类方法给予了适当的篇幅．从应用的角度来看，可以认为，第5章的主题是微分方程边值问题的变分解法．当然，它涉及到如何寻求能量积分的问题．最后两章扼要地介绍变分法在力学方面及最优控制方面的应用．

根据学习时数的多少，对学习内容可以作不同的安排．对于一般读者来说，例如，可以选择本书的第1、3、4章及第5章的前一部分（比如里兹法和伽辽金法）作为学习材料．如用于课堂讲授，完成这些内容只需要30课内学时．如果有48课内学时，则基本上可以学完全部内容．凡打“*”号的章节可以略去，不影响学习进程．

对于材料的取舍颇费斟酌．考虑到本课程的学习时数以及读者对象，我们尝试着在习见的变分理论和计算、应用之间作出某种平衡．例如，我们完全没有提到Hamilton-Jacobi理论，对极值条件的论证也不是那么严密的；然而，我们对Mayer问题却作了某些阐述，还用了少量篇幅介绍所谓反问题．

阅读本书的预备知识基本上不超过大学低年级的高等数

学。个别部分引用了若干未见于高等数学中的术语或符号，对此，尽可能给出了初等的解释。

书中提供了较多例题，特别是算例。另外，也给出了若干练习题。大部分练习题是不难求解的。至于计算题，希望读者至少能完成其中一部分。事实上，不通过动手算题是谈不上掌握计算技巧的。

由于编者水平有限，存在于本书的缺点错误一定不少，何况，对于材料的取舍，只能说是一种新的尝试，未必妥当。敬请读者不吝批评指正。

本书初稿曾经用作高等工科院校本科二年级学生及工科硕士研究生的教材。我们谨向使用过本书初稿并提出修改意见的同志表示感谢。我们还应感谢华中工学院出版社的负责同志和有关同志，他们为出版本书提供了充分便利的条件。

编　者

1983年7月于武汉

1. 变分问题与泛函极值

1.1 变分问题的提出

在微积分这一学科形成的初期，变分问题就已经提出来了。如牛顿曾提出，对运动于介质中的旋转体，其体形应具备怎样的条件才能使所受阻力最小。另一个由约翰·伯努利公开提出的问题是所谓**捷线**问题，当时曾引起许多人的兴趣，并为一些数学家（包括牛顿、莱布尼兹等）所解决。

捷线问题的数学提法是：

初速为零的质点，仅受重力作用，沿光滑而固定的曲线由定点A滑行到定点B（B低于A，但不在同一铅直线上*)）。为使滑行时间最短，问沿着滑行的曲线形状是怎样的？

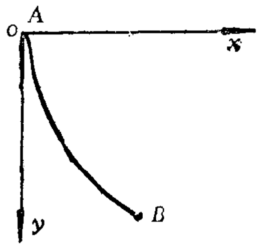


图 1-1

不妨取A为原点，朝下置y轴（图 1-1）。设曲线段AB的方程为$y=y(x)$。因为仅受重力作用且初速为零，故滑行到点(x,y)处的速度为$v=\sqrt{2gy}$。于是滑行弧段ds所需时间为

$$dT=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}},$$

故总的时间为

*) 显然，若A、B在同一铅直线上，则这条直线就是问题的解。

$$T=\int_{0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx. \qquad (1.1\text{-}1)$$

显然，T由曲线$y=y(x)$所决定，即是说，T是函数$y(x)$的函数。现在就是选择过A，B点的这样的曲线$y=y(x)$使T取最小值。

另外，我们还可以提出如下一些问题。

例如，要在坡度不太大的山地修建一条最短的公路连接山地上的两个居民点A和B，问这条路线该怎样选择？这就是所谓短程线问题。它的数学提法是：

在曲面$F(x,y,z)=0$上给定两点A和B，要求曲面上连接A，B两点的最短弧（图1-2）。

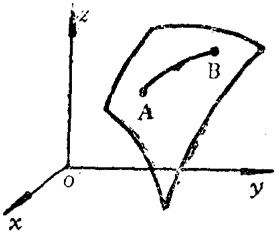


图 1-2

设AB弧的方程是

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x). \end{cases}$$

由于$\overset{\frown}{AB}$规定在曲面上，所以问题归结为在约束条件$F(x,\ y(x),\ z(x))=0$下选择过A，B点的弧使积分

$$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}\,dx \qquad (1.1\text{-}2)$$

取最小值。

再看个物理上的例子。我们知道，液体的表面总是呈现收缩的趋势。例如金属平环D与柔软细线C之间布满肥皂膜（图1-3），由于液膜的收缩，C将在保持周长不变的情况下使所围成的面积最大。它的

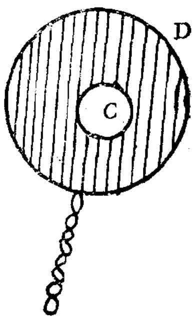


图 1-3

数学提法是：

在平面上一切有定长的简单闭曲线中，确定一条围成最大面积的曲线。

设曲线方程为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[t_0,t_1].$$

l 是闭曲线的定长，即

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2}\ dt. \tag{1.1-3}$$

设闭曲线所围成的面积为A，则

$$A=\frac{1}{2}\oint xdy-ydx. \tag{1.1-4}$$

所以问题就是在定长条件（1.1-3）下，选择 $x(t)$，$y(t)$，使(1.1-4)式所表示的A极大。这类问题叫做等周问题。

我们看到，无论是捷线问题、短程线问题或等周问题，要求极值的积分值T、L或A，本身都是依赖于函数 $y(x)$，$z(x)$ 等来确定的，这类依赖于函数的函数叫做泛函。变分法的主题便是寻求泛函的极值。

近年来，由于最优控制理论的广泛应用，对微分方程直接解法的深入研究，特别是有限元方法与理论方面的发展，促使人们对变分法重新给予重视。事实上，在应用数学的不同领域，如弹塑性理论、数理经济学、最优控制论及系统理论之类的数学模型，在很大程度上都是以变分形式提出来的。因此，对于一般科技工作者来说，对变分法的基本知识有所了解是有益的。

1.2 关于泛函极值的几个基本概念

1. 泛函

(1.1-1)，(1.1-2)及(1.1-4)这三个积分，它们的值T、

L和A是依赖于函数$y(x)$，$z(x)$等的选择的。我们把这种建立在函数与数（实数或复数）之间的关系叫做泛函关系。例如，$C=\{y(x)\}$是在区间$[a,b]$上分段连续的函数集，设

$$J=\int_a^b y(x)dx, \tag{1.2-1}$$

或

$$I=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y(x)|. \tag{1.2-2}$$

则J和I的值便取决于所选择的$y(x)$，为明确其依赖关系，可以将J，I分别写成$J[y(x)]$和$I[y(x)]$。于是，$J[y]$,$I[y]$便是以$C=\{y(x)\}$为定义域的两个泛函。

定义 设$\{y(x)\}$是已给的函数集，如果对于集中任一函数$y(x)$恒有某个确定的数*)与之对应，记为$J[y(x)]$或$J[y]$，则说$J[y]$是定义于集$\{y(x)\}$上的一个泛函。

简言之，泛函是以函数集为定义域的实值函数。

以上定义还可推广到依赖于多个函数的泛函，例如(1.1-2)式的积分值便依赖于$y(x)$及$z(x)$的选择。

此外，还可以把单元变量推广到多元变量的情形。例如，$\{f(x,y,z)\}$为空间域Ω上的一类一阶连续可微的函数，则

$$J[f]=\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+2f\right]d\sigma \tag{1.2-3}$$

便是定义在某三元函数集上的一个泛函。

有一种最重要的泛函叫做**线性泛函**，它的定义是：设泛函$L[\cdot]$对定义域中任意函数f，g和任意（实）数a，b，恒有

$$L[af+bg]=aL[f]+bL[g], \tag{1.2-4}$$

则称$L[\cdot]$是定义域上的线性泛函。由于式中涉及到$L[af+bg]$，为使等式有意义，必须假设$af+bg$也属于泛函$L[\cdot]$的定

*）以下如未特别申明，所指都是实数。

义域。这就是说，在定义线性泛函 $L[\cdot]$时，必须假设定义域为一实数域上的线性空间。

例如，连续于有界域Ω上的函数全体（记为C）按普通加法与数乘便构成实数域上的线性空间。同样，由区间上一阶连续可微函数全体组成的集C^1也是实数域上的线性空间。又如，在C中选出那些满足齐次边界条件的一切函数记为C_0，这个C_0也组成实数域上的线性空间，并且是C的子空间。

2．可取函数类

和普通函数求极值的问题一样，先应指定x的取值范围，然后才能回答有无极值。泛函既是函数的函数，例如$J[y(x)]$是函数$y(x)$的函数，那么讨论泛函$J[y]$的极值时也应说明泛函所依赖的函数$y(x)$是些什么函数，或代表它们的曲线是些什么曲线。例如，捷线问题中要求的函数$y(x)$或曲线$y=y(x)$就须通过A、B两点且足够光滑；短程线问题中供选择的曲线必须通过A、B两点且整个弧段位于定曲面上；等周问题中的曲线必须为定长的，等等。我们把所有合乎条件可供选择的函数归为一类,叫做**可取函数类或可取曲线类**（又叫做**容许函数类或容许曲线类**）。

为叙述便利，我们有时借用x表示多元变量，这时$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．例如，把多元函数$f(x_1, x_2)$简记为$f(x)$。相应地，这时的导数应指各个偏导数；而所谓曲线$y=f(x)$，实际指的是曲面$y=f(x_1, x_2)$。为免误会，当这样使用$x$的时候，一般都有所交代，如这一小段中的$x$，即可泛指单元或多元的变量。

3．函数(或曲线)间的距离与邻域

为了确定函数$y(x)$的极值或极值点x_0，我们认为$y(x)$在x_0的值比它在邻近点的值都大或小。对于泛函极值来说，也

要指明供比较的邻近函数是怎样的一些函数。为此，引入函数距离的概念。

零级距离 在区域(a,b)内，函数$y(x)$与$y_1(x)$之差的模$|y(x)-y_1(x)|$的上确界（可以是$+\infty$）

$$\sup_{x\in(a,b)}|y(x)-y_1(x)| \tag{1.2-5}$$

叫做函数y与y_1的零级距离。

一级距离 设函数$y(x)$，$y_1(x)$在(a,b)内可导，取

$$\sup_{x\in(a,b)}|y(x)-y_1(x)|,\quad \sup_{x\in(a,b)}|y'(x)-y_1'(x)|$$

中最大的一个数叫做函数y与y_1的一级距离。

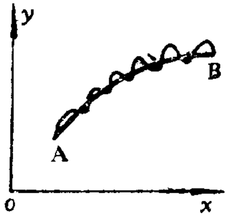


图 1-4

两个函数y与y_1的零级距离小，其一级距离未必小。如图1-4中的两条曲线，就零级距离来说是比较小的，但它们的一级距离却很大，因其中一条比较平坦，另一条则起伏得很厉害。反之，一级距离小的两个函数，其零级距离一定也小。

m级距离 设函数$y(x)$及$y_1(x)$在(a,b)内具有直到m阶的导数，取

$$\sup_{x\in(a,b)}|y(x)-y_1(x)|,$$

$$\sup_{x\in(a,b)}|y'(x)-y_1'(x)|,$$

$$\cdots$$

$$\sup_{x\in(a,b)}|y^{(m)}(x)-y_1^{(m)}(x)|$$

中最大的一个数，叫做y与y_1的m级距离。

以上概念可以推广到多元函数的情形，这时应将区间(a,b)改为有界区域Ω，各阶导数应写成对各个变量的偏导数。另

外，也可将距离概念推广到函数组$\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\}$ $t\in(a,b)$的情形。

例如，$s_1=\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\}$与$s_2=\{y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)\}$ $t\in(a,b)$是两个函数组（也可以说是两条空间曲线），它们之间的零级距离即指

$$\sup_{t\in(a,b)}|x_i(t)-y_i(t)| \quad i=1,2,\cdots,n$$

中最大的那个数。

有了距离的概念以后就可以来定义函数的邻域了。在这里x泛指单元或多元变量。

零级邻域 函数$y_0(x)$（或曲线$y=y_0(x)$）的零级δ邻域是指与$y_0(x)$的零级距离小于正数δ的函数全体，或简称为零级邻域。

一级邻域 函数$y_0(x)$的一级δ邻域是指与$y_0(x)$的一级距离小于正数δ的函数全体。

显然，若两个函数的一级距离小于δ，则它们之间的零级距离自然也小于δ，所以函数的一级δ邻域实际是其零级δ邻域的一个部分。

4．函数的变分

定义 函数$y(x)$与另一函数$Y(x)$之差$\delta y=Y(x)-y(x)$叫做函数$y(x)$的变分（定义中的x泛指单元或多元变量）。

显然，变分δy是x的函数。注意它和函数增量Δy的区别：变分δy反映的是整个函数的改变；增量Δy反映的是同一函数$y(x)$因x取不同值而产生的差异。

函数变分δy有下述重要性质：

如果$y(x)$和$\delta y=Y(x)-y(x)$都可求导，则

$$(\delta y)'=[Y(x)-y(x)]'=Y'(x)-y'(x)=\delta(y'). \tag{1.2-6}$$

这就是说：函数变分的导数等于函数导数的变分。换言之，函数求导与求变分这两种运算的顺序可以交换。如果x指多元变量，则式中的求导应改为求偏导。

由于$Y(x)$和$y(x)$常常取自同一个函数类，所以δy通常也具有这个函数类的特征（例如光滑度等）。但若$Y(x)$与$y(x)$具有相同的线性边界条件，则$\delta y = Y(x) - y(x)$就只能满足齐次边界条件。

5. **泛函的变分**

先考虑最简单的泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx. \tag{1.2-7}$$

给函数$y(x)$以变分δy，看泛函发生什么变化。将

$$J(y+\delta y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\,dx$$

与(1.2-7)式相减，得相应于函数变分δy的泛函增量：

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(y+\delta y) - J[y] \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]\,dx.\end{aligned} \tag{1.2-8}$$

假设$F(x, y, y')$充分光滑，则上式可展成

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{x_0}^{x_1} \Big\{[F_y\delta y + F_{y'}\delta y'] + \frac{1}{2!}[F_{yy}(\delta y)^2 \\ &\quad + 2F_{yy'}\delta y\delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] + \cdots\Big\}dx \\ &= \delta J + \delta^2 J + \delta^3 J + \cdots,\end{aligned} \tag{1.2-9}$$

式中，

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[F_y\delta y+F_{y'}\delta y']dx, \tag{1.2-10}$$

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[F_{yy}(\delta y)^2+2F_{yy}\ \delta y\delta y'$$

$$+F_{y'y'}(\delta y')^2]dx, \tag{1.2-11}$$

$$\cdots$$

分别是函数变分δy及其导数$\delta y'$的一次齐次式，二次齐次式，……等的积分。我们分别把δJ，$\delta^2 J$，…叫做泛函$J[y]$的**一次变分，二次变分，**…。如果不致引起混淆，有时把泛函的一次变分δJ简称为泛函J的变分。

例1 设 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+y'^2)dx$，求$\delta J$，$\delta^2 J$，…。

解 $\varDelta J=\int_{x_0}^{x_1}[(y+\delta y)^2+(y'+\delta y')^2-y^2-y'^2]dx$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(2y\delta y+2y'\delta y')dx$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}[(\delta y)^2+(\delta y')^2]dx,$$

故 $\delta J=2\int_{x_0}^{x_1}(y\delta y+y'\delta y')dx$；

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}[(\delta y)^2+(\delta y')^2]dx.$$

由于泛函$J[y]$只是y和y'的二次式（这种泛函叫做**二次泛函**），所以它的三次以及三次以上的变分都是零。

如果令