现代数学译丛

拟共形映射与黎曼曲面

〔苏〕С. Л. 克鲁什卡 著

科学出版社

内 容 简 介

本书共分七章. 第一章讲了有关 Riemann 曲面及拟共形映射的一般概念. 第二章至第四章详细论述了拟共形映射的变分方法，并用它讨论了有限型 Riemann 曲面上的各种极值问题，尤其是 Teichmüller 极值问题. 第五章讨论了 Riemann 曲面的模问题. 第六章和第七章讨论 Klein 群.

本书可供数学工作者及高等院校数学系师生阅读.

S. L. Krushkal

QUASICONFORMAL MAPPINGS AND RIEMANN SURFACES

V. H. Winston & Sons, 1979

现代数学译丛

拟共形映射与黎曼曲面

〔苏〕С. Л. 克鲁什卡 著

李 忠 陈怀惠 译

责任编辑 石小龙 刘嘉善

科学出版社 出版

北京市东黄城根北街 16 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989 年 7 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1989 年 7 月第一次印刷 印张：8 1/2

印数：0001—970 字数：222,000

ISBN 7-03-000985-1/O·236

定价：8.60 元

英 文 版 序 言

拟共形映射的理论大约已有半个世纪的历史了．它的创始人 Ahlfors, Grötzsch 与 Lavrent'yev 分别以三种不同的观点探讨了拟共形映射．Ahlfors 在研究 Nevanlinna 理论(关于整函数及亚纯函数的值分布理论)的几何意义时，作了重要的观察，他发现 Nevanlinna 理论的几何形式并不要求有关函数一定是(局部)共形映射，而只要求它们是(一致)拟共形映射．Lavrent'yev 着眼于给出气体的二维定常位势流的非线性偏微分方程组的几何解释，他推广了线性 Cauchy-Riemann 方程组的简单的几何解释(即共形性)，该方程组描述了不可压缩流体二维位势流． Grötzsch 提出并解决了几类非共形映射的极值问题．他的重大功绩在于认识到度量一个映射对共形性的偏差的“正确”方法是局部伸缩商的上确界，而不是加权平均．这里我们说这个方法是“正确的”，这是在下述意义下讲的：它导致了许多漂亮的并令人注目的结果．

著名的 Teichmüller 定理，大约是在 Grötzsch 结果的十年之后得到的．它应当被看作是对于 Grötzsch 的漂亮而简单的文章的巨大深化与扩充．然而，Teichmüller 定理的意义及其有效性并不是立刻就被承认的．造成这种情况的部分原因是 Teichmüller 思想的新奇，部分原因是其表述方式上与众不同；或许还有其它特殊原因．Ahlfors 1950 年发表在 Jerusalem Journal d' Analyse 上的文章，终于开创了深入理解与重新研究 Teichmüller 方法的时期．只是在此之后，拟共形映射的理论才进入了数学的主流．

今天，二维拟共形映射的理论正紧密地联系着 Riemann 曲面的模理论，而这种联系原先是由 Teichmüller 建立的；此外，它还紧密联系着单值化理论以及 Klein 群理论．的确，拟共形映射所提出的方法使一些古老的课题得以复兴，并导致了许多新的有趣

的问题与结果. 前不久，有人建立了拟共形映射与二维及三维拓扑学之间的新的联系，这主要是由于 Thurston 的新奇的发现而得到的. 另一方面，上半平面的拟共形自映射的理论以及所谓万有 Teichmüller 空间和 Klein 群的理论，是许多学者的热门课题，而且似乎还引起经典函数论之外其他领域的数学家们的注意. 然而，这方面的论著却很少，这本 Krushkal 的书的英文版的出版，是对这方面文献的一个可喜的补充. 这本书从头讲起，所以它可以作为这个主题的导引. 文献目录较为完善，使读者能够进一步追踪所提到的任何一个课题. 西方读者将特别感到高兴的是这本书详细报告了作者本人及其他苏联数学家们在变分问题（Teichmüller 以此为开端开创了现代理论）及其各种形式的推广上所作的重要工作.

L. 贝尔斯

于哥伦比亚大学

作 者 原 序

最近数十年间，单复变函数论得到了深入的发展，它既涉及了拟共形映射的理论，又涉及了 Riemann 曲面的理论. 拟共形映射的应用，不仅为 Riemann 曲面论(特别是对尚未解决的经典问题)提供了新的工具，而且还使得 Riemannn 曲面论中最重要的概念的基本性质更加清楚了. 另一方面，当我们在 Riemann 曲面上而不只是在平面区域上来考察拟共形映射时，拟共形映射理论中的许多问题的研究达到自然的完整.

本专著致力于这些问题的研究. 它主要讨论拟共形(和共形)映射的极值问题，发展解决这些问题的变分方法，并且研究 Riemann 曲面空间的理论及其某些推广，这种研究与单值化问题和 Riemann 曲面的经典模问题有关；此外还讨论(间断) Klein 变换群理论中的某些问题. 这里，函数论的方法与泛函分析、拓扑、偏微分方程、代数几何和其他数学分支的概念交织在一起.

这本书在叙述上的一个特点是系统应用变分方法. 在拟共形映射理论及其应用中，不同的研究者(如 M. A. Lavrent'yev, L. V. Ahlfors, P. P. Belinskiy 以及其他人)采用不同的变分方法，虽然这些方法在一定意义上彼此有某些相似之处. 我们将采用的方法主要是基于泛函分析的方法.

在具有辅助性的第一章中，我们将给出关于拟共形映射，Riemann 曲面以及间断变换群的某些一般知识. 基本结果将在其余六章中论述. 主要对共形映射理论感兴趣的读者（一旦他读完了第一章第二节)，可以独立于其他章节直接去阅读第四章.

我深深感谢 P. P. Belinskiy，他同我不止一次地讨论这里所考察的问题. B. N. Apanasov 与 V. V. Chuyeshev 在准备本书印刷手稿方面对我很有帮助. 我还受益于 P. A. Biluta, L. I.Volkovskiy 与 I. A. Volynets，他们仔细阅读了手稿，并提出了许多有价值的意见．我对所有这些人表示谢意．

C. Л. 克鲁什卡

目　　录

第一章 一 般 知 识

§1. 某些函数空间. 积分算子

1. 考虑下列复的 Banach 空间: $L_p(E)\,(p\geqslant 1)$ 表示复变量 $z=x+iy$ 平面上一个集合 E 上 p 方可积函数 $f(z)$ 所组成的空间,其范数定义为

$$\|f\|_p\equiv\|f\|_{L_p(E)}=\left(\iint\limits_E|f(z)|^p dxdy\right)^{1/p};\tag{1}$$

$L_\infty(E)$ 表示 E 上有界可测函数 $f(z)$ 所组成的空间,其范数定义为

$$\|f\|_\infty\equiv\|f\|_{L\infty(E)}=\sup_{z\in E}|f(z)|;\tag{2}$$

$C(F)$ 表示在闭集 F 上定义的连续函数 $f(z)$ 所组成的空间,其范数定义为

$$\|f\|_{C(F)}=\max_{z\in F}|f(z)|;\tag{3}$$

$C_\alpha(F)$ 表示定义在闭集 F 上且满足指数为 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 的 Hölder 条件的函数 $f(z)$ 所组成的空间,其范数定义为

$$\|f\|_{C_\alpha(F)}=\|f\|_{C(F)}+H_{\alpha,F}(f),\tag{4}$$

其中

$$H_{\alpha,F}=\sup_{z_1,z_2\in F}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha};\tag{5}$$

$C_\alpha^m(\overline{D})$ $(C_\alpha^0\equiv C_\alpha)$ 表示闭区域 $\overline{D}$ 上有 m 阶连续偏微商且使得下式成立的函数 $f(z)$ 所组成的空间:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-l}\partial y^l}\in C_\alpha(\overline{D})\,(l=0,1,\cdots,m),\,0<\alpha\leqslant 1,\,m\geqslant 0,$$

其中在边界上一点 z_0 的偏微商定义为通过 D 的内部当 $z\to z_0$ 时偏微商的极限, $f(z)$ 的范数定义为

$$\|f\|_{C^m_\alpha(\bar{D})} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\left\|\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-l}\partial y^l}\right\|_{C(\bar{D})}$$

$$+ \sum_{l=0}^{m} H_{\alpha,\bar{D}}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-l}\partial y^l}\right); \tag{6}$$

$B_{p,R}(p>2)$ 表示满足下列要求的函数 $f(z)$ 所组成的空间：$f(0)=0$，$f(z)$ 在圆盘 $\bar{U}_R$：$|z|\leqslant R$ 上有定义，其中 $0<R<\infty$，而其范数定义为

$$\|f\|_{B_{p,R}} = H_{1-\frac{2}{p},\bar{U}_R}(f) + \|f_z\|_p + \|f_{\bar{z}}\|_p, \tag{7}$$

象通常一样，其中

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{8}$$

这里以及本书的其余部分，导数被理解为 Sobolev 广义导数，也即广义函数论中的广义导数。

我们把圆盘 $|z|<R$ 记为 U_R。对于 $R=1$ 的情况，我们将把单位圆盘 $|z|<1$ 简单地记作 U 来代替 U_1。还应指出，可以在公式 (7) 中取 $R=\infty$，但这时假定 (5)，(7) 和 (8)式仅是对有穷点 z 考虑的。

依据熟知的 Sobolev 嵌入定理 [164]，我们有

$$H_{1-\frac{2}{p},\bar{U}_R}(f) \leqslant M(p, R)(\|f_z\|_p + \|f_{\bar{z}}\|_p), \tag{9}$$

$$0<R<\infty.$$

这里常数 $M(p, R)$ 只依赖于 p 与 R。从 (3)、(5) 及 (7) 式，得到

$$\|f\|_{C(\bar{U}_R)} \leqslant R^{(p-2)/p}\|f\|_{B_{p,R}}, \quad 0<R<\infty. \tag{10}$$

2. 设$\mathbf{C}$表示复平面。在空间 $L_p(\mathbf{C})(p>2)$ 中我们考虑积分算子

$$T_0\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}}\rho(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta}\right)d\xi d\eta, \tag{11}$$

$$\Pi_\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{C}}\frac{\rho(\zeta)-\rho(z)}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta,\ \zeta=\xi+i\eta. \tag{12}$$

这里积分 (11) 绝对收敛. 根据 Calderón 与 Zygmund 的结果 [79], 对于几乎所有的$z\in\mathbf{C}$,(12)的 Cauchy 主值积分存在. 若 $\rho(z)$ 有一个紧致支集,则

$$\Pi\rho(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbf{C}}\frac{\rho(\zeta)d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}. \tag{12'}$$

定理 1. 若 $\rho\in L_p(\mathbf{C})$, $p>2$, 则

$$(T_0\rho)_{\bar z}=\rho,\ (T_0\rho)_z=\Pi\rho, \tag{13}$$

$T_0\rho\in B_{p,\infty}$, 且有

$$\|T_0\rho\|_{B_{p,\infty}}\leqslant M_1(p)\|\rho\|_p, \tag{14}$$

其中常数 $M_1(p)$只依赖于 p. 此外,$\Pi\rho$ 是 $L_p(\mathbf{C})$ 到 $L_p(\mathbf{C})$的(有界)线性算子,使得

$$\|\Pi\rho\|_p\leqslant\Lambda_p\|\rho\|_p, \tag{15}$$

这里 $\Lambda_p\equiv\|\Pi\|_p$(即算子Π在 $L_p(\mathbf{C})$中的范数)连续地依赖 p, 且 $\Lambda_2=1$.

由此得出,对于任意的k,$0<k<1$,存在一个$\delta=\delta(k)>0$使得

$$k\Lambda_p<1,\ 当\ 2<p<2+\delta(k)=p_0(k). \tag{16}$$

若 $\rho\in C_\alpha^m$ 且有紧致支集,则 (13) 将是通常意义下的偏微商并且 $T_0\rho$ 将属于 C_α^{m+1}, 而$\Pi\rho$ 将属于 C_α^m.

在以后的论述中,我们还将把算子

$$T\rho(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbf{C}}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta \tag{17}$$

应用到具有紧致支集的函数 $\rho\in L_p(\mathbf{C})$ 上,其中 $p>2$. 显然, $T_0\rho(z)=T\rho(z)-T\rho(0)$. 对于算子 $T\rho$, 我们有类似于(13)与(14)的关系式(但是,一般说来 $T\rho(0)\neq 0$). 若 $\rho\in L_\infty(\mathbf{C})$, 我们有

$$|T_\rho(z_1)-T_\rho(z_2)|\leqslant M_2\|\rho\|_\infty\ |z_1-z_2|\ln|z_1-z_2|, \tag{18}$$

其中 z_1 与 z_2 是复数,M_2是正的常数.

这些结论的证明可以在 Vekua[43], Lehto 与 Virtanen[126] 以及 Ahlfors [9] 等书中找到(也可参见 [79]). Λ_p 对 p 的连续

依赖性是由 Riesz 定理 [160] 得到的，这个定理断言 Λ_p^p 是 p 的对数凸函数。

我们还应指出，若函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}\subset\mathbf{C}$ 上连续，其中区域 D 是有限连通的，且具有可求长的边界 ∂D；并且函数 $f(z)$ 在 D 内有广义导数 $f_{\bar z}\in L_p(D)(p>2)$，那么成立 Green 公式

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,dxdy=\frac{1}{2i}\int_{\partial D} f(z)dz \qquad (19)$$

及 Borel-Pompeiu 公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}=\begin{cases}f(z), & z\in D;\\ 0, & z\in\mathbf{C}\backslash\overline{D}.\end{cases} \qquad (20)$$

这些公式是很容易证明的，例如可先使 $f(z)$ 光滑，然后应用光滑函数的相应公式。

由公式 (20) 可以得出，若广义导数 $f_{\bar z}$ 在区域 D 内为零，则 $f(z)$ 在 D 内全纯。

§2. 平面区域的拟共形映射

1. 假定函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 把包含于扩充复平面 $\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 内的区域 D 同胚地映射为区域 $\triangle$，并且在 D 内具有局部平方可积的广义导数 f_z 与 $f_{\bar z}$。由此可以推出，$f(z)$ 在 D 内几乎处处可微（例如，可参见 [139] 及 [158]）。为了明确起见，我们将只考虑保持定向的映射。

依照 Lavrent'yev [115, 117]，我们将称实数 $p=p(z_0)\geqslant 1$ 及 $\theta=\theta(z_0)$ 为映射 $w=f(z)$ 在点 $z_0\in D$ 的特征，如果 w 对一个以 z_0 为中心的，半轴比为 $a/b=p$（其中 $a\geqslant b$），且主轴与 x 轴夹角为 θ 的无穷小椭圆 E_0，有如下性质

$$\lim_{a\to 0}\frac{\max\limits_{z\in E_0}|f(z)-f(z_0)|}{\min\limits_{z\in E_0}|f(z)-f(z_0)|}=1 \qquad (21)$$

(若 $a=b$，则 θ 无定义)．假定在区域 D 内定义了一个可测函数 $p(z)\geqslant 1$，并且在 $p(z)>1$ 的部分定义了一个可测函数 $\theta(z)$．假定公式 (21) 对于函数 $p(z)$ 及 $\theta(z)$ 在 D 内几乎处处成立，并且 $p(z)\in L_\infty(D)$，这时我们称同胚 f 是具有特征 $p(z)$ 与 $\theta(z)$ 的拟共形映射．

在 f 的可微点，特征与导数 f_z 与 $f_{\bar z}$ 之间有如下的关系：

$$-\frac{p(z)-1}{p(z)+1}e^{2i\theta(z)}=\frac{f_{\bar z}(z)}{f_z(z)}.$$

所以，我们可以给出拟共形映射的下述定义，它与前面的定义是等价的．我们定义区域 D 的拟共形映射是 Beltrami 方程

$$w_{\bar z}-\mu(z)w_z=0 \tag{22}$$

的任意一个广义同胚解 $w=f(z)$，其中 $\mu(z)$ 是一个可测函数，满足条件 $\|\mu\|_\infty<1$；也就是说 $w=f(z)$ 是这样一个解，它使得导数 f_z 与 $f_{\bar z}$ 是局部平方可积的广义导数，且几乎处处满足方程 (22)．以这种方式来定义拟共形映射，应归于 I.N.Vekua[43,44] (也参见 Morrey[144])．

映射 f 在 Riemann 度量

$$ds^2=\lambda(z)|dz+\mu(z)d\bar z|^2,\quad \lambda(z)>0 \tag{23}$$

下是共形的，几乎处处保持角度不变，假如在区域 D 内角度用(23)来度量，而在区域 $\Delta=f(D)$ 内角度按照通常的欧氏度量 $ds_1^2=du^2+dv^2$ 来度量的话．

特别地，若在区域 D 内几乎处处有 $\mu(z)=0$，则 $f(z)$ 是 D 内全纯函数．

今后，当我们说到方程 (22) 的解时，这将总是意味着广义解．

函数

$$\mu_f=\frac{f_{\bar z}}{f_z} \tag{24}$$

被称为映射 f 的复特征或 Beltrami 系数，而比值

$$K(f)=\frac{1+\|\mu_f\|_\infty}{1-\|\mu_f\|_\infty} \tag{25}$$

被称为映射 f 的伸缩商．从 (24) 及 (25) 式，我们有

$$K(f)=\sup_{z\in D}\frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}.$$

一个映射 f 使得 $K(f)\leqslant K$，被称为 K 拟共形映射．K 拟共形性等价于满足不等式

$$|f_z|^2+|f_{\bar z}|^2\leqslant\frac{1}{2}\left(K+\frac{1}{K}\right)(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2). \qquad (26)$$

如果一个同胚 f 不是拟共形映射，则认为 $K(f)=\infty$.

一个非常简单的拟共形映射的例子是仿射变换 $w=az+b\bar z+c$，其中 a, b, c 是常数．这个映射的复特征是

$$\frac{w_{\bar z}}{w_z}=\frac{b}{a}=\text{常数},$$

并且把每一个圆变成椭圆．

设 $w=f(z)$ 是任意一个拟共形映射．在这个映射的可微点 z_0 的一个邻域内，我们有

$$w-w_0=\frac{\partial f(z_0)}{\partial z}(z-z_0)+\frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar z}(\bar z-\bar z_0)+o(|z-z_0|),$$

$$w_0=f(z_0).$$

这样，每个拟共形映射在其可微点的局部性质象仿射变换一样．

2. 现在让我们来阐述今后要用到的有关拟共形映射的一般性质．这里所作的这些论断可以在 Ahlfors[9]，P. P. Belinskiy [25]，Vekua[43] 和 Lehto 与 Virtanen[126] 等书中找到其证明．

定理 2. 对于任意一个定义在 $\bar{\mathbf{C}}$ 内单连通域 D 内可测复特征

$$\mu(z)=-\frac{p(z)-1}{p(z)+1}e^{2i\theta(z)},\quad \|\mu\|_\infty<1 \qquad (27)$$

存在一个同胚 $w=f(z)$，把区域 D 变到给定的单连通域 Δ，且满足 Beltrami 方程 $w_{\bar z}=\mu(z)w_z$，其中 Δ 与 D 假定属于同一共形类型

定理 3. 若 $f_0(z)$ 是方程 (22) 的一个同胚解，则这个方程的

所有其他解可以由公式

$$f(z)=\Phi[f_0(z)] \tag{28}$$

给出，其中 Φ 是区域 $f_0(D)$ 上关于 f_0 的任意解析函数．反过来，任何一个形如(28)式的函数，其中 Φ 是解析函数，则它与 $f_0(z)$ 满足相同的 Beltrami 方程。

特别地，可以从这些定理得出，具有给定复特征的把一个单连通域变成另一个单连通域的拟共形映射，其唯一性可以由下述条件得到保证，例如，给定三个边界点的对应，或者给定每个区域内的一个内点与一个边界点的对应（这里所说的边界点的对应，其定义与共形映射论中的一样）；并且还可以得出，一个 Jordan 区域到另一个 Jordan 区域的拟共形映射可以延拓为闭区域上的同胚．

定理 4. 假定 $w=f(z)$ 是区域 $D\subset\mathbf{C}$ 的一个拟共形同胚，且 $\|\mu_f\|_\infty\leqslant k<1$. 则

1) 导数 f_z 与 $f_{\bar z}$ 局部属于 L_p，其中 $2\leqslant p<p_0(k)$；

2) 反函数 $z=f^{-1}(w)$ 也是拟共形映射，且有广义导数 $(f^{-1})_w$ 及 $(f^{-1})_{\bar w}$，它们按照通常的公式

$$(f^{-1})_w=\frac{\bar f_z}{|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2},\quad (f^{-1})_{\bar w}=\frac{-f_{\bar z}}{|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2}$$
$$(w=f(z)) \tag{29}$$

计算，因而

$$\mu_{f^{-1}}(w)=-\mu_f(z)f_z/\bar f_z\ (w=f(z)), \tag{30}$$

且 $K(f)=K(f^{-1})$；

3) 对于每一个可测集 $E\subset D$，集合 $f(E)$ 是可测的，且它的二维 Lebesgue 测度由

$$mf(E)=\iint_E(|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2)dxdy \tag{31}$$

给出，因此，在 D 内几乎处处有 Jacobian $|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2>0$ 和 $f_z\neq 0$；

4) 若函数 $g(w)$ 有广义微商 g_w 与 $g_{\bar w}$，它们在区域 $f(D)$ 内局部属于 L_q, $q\geqslant 2$，则复合函数 $g\circ f\equiv g[f(z)]$ 在 D 内有广义

微商

$$(g\circ f)_z=(g_w\circ f)f_z+(g_{\bar w}\circ f)\bar f_z,$$
$$(g\circ f)_{\bar z}=(g_w\circ f)f_{\bar z}+(g_{\bar w}\circ f)\bar f_{\bar z},\tag{32}$$

且

$$\|(g\circ f)_z\|_s,\quad \|(g\circ f)_{\bar z}\|_s\leqslant M(\|g_w\|_q+\|g_{\bar w}\|_q),$$
$$s=\frac{pq}{p+q-2},$$

其中范数是在相应的紧致子区域 $G\subset D$ 与 $f(G)$ 上取的，常数M与 g 无关；

5）成立下列不等式

$$K(f_1\circ f)\leqslant K(f)K(f_1).$$

公式 (29) 可以从 (32) 得到，或者从形式等式

$$dw=f_zdz+f_{\bar z}d\bar z$$

得出，只要把 dz 用 dw 与 $d\bar w$ 表出即可。

对于复合映射 $f_2=f_1\circ f$，其中 f_1 是 $f(D)\to \mathrm{C}$ 的拟共形同胚，我们从(32)式得出

$$\mu_{f_1\circ f}=\frac{\mu_f+\mu_1}{1+\bar\mu_f\mu_1},\quad \mu_1=\mu_{f_1}(f(z))\frac{\bar f_z}{f_z},\tag{33}$$

$$\mu_{f_1}\circ f=\mu_{f_2\circ f^{-1}}\circ f=\frac{\mu_{f_2}-\mu_f}{1-\mu_{f_2}\bar\mu_f}\cdot\frac{f_z}{\bar f_z}.\tag{34}$$

给定区域到自身的一个拟共形同胚，我们将称之为这个区域的拟共形自同构. 在以后的讨论中，我们还将考虑各种群，当我们谈论到这些群的自同构时，我们应按照通常代数意义来理解它们. 我们将用 $w^\mu=f^\mu(z)$表示扩充平面 $\bar{\mathrm{C}}$ 的拟共形自同构，它具有复特征 $\mu(z)$，$\|\mu\|_\infty<1$，且有不动点 0，1 和∞.

定理 5. 对于 $\|\mu\|_\infty\leqslant k<1$，存在一个数 $p_0=p_0(k)>2$，它只依赖于 k，使得对于每一个固定的 p，$2<p<p_0(k)$，及任意的 R，$0<R<\infty$，我们有

$$\|f^\mu\|_{B_{p,R}}\leqslant M(k,p,R),\tag{35}$$

其中$M(k,p,R)$是只依赖于 k，p 与R的常数.

特别地，由(35)式可以推出，在任意一个圆盘 $|z|\leqslant R$ 内，我们有

$$M^{-1}|z_1-z_2|^{p/(p-2)}\leqslant|f^{\mu}(z_1)-f^{\mu}(z_2)|\leqslant M|z_1-z_2|^{(p-2)/p}. \tag{36}$$

定理 6. 若 $|\mu_n(z)|\leqslant k<1$，$n=1,2,\cdots$，且当 $n\to\infty$ 时在 **C** 内几乎处处有 $\mu_n(z)\to\mu(z)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|f^{\mu_n}-f^{\mu}\|_{B_{p,R}}=0.$$

定理 7. 设在点 z_0 的某个邻域 U_{z_0} 内，$\mu(z)\in C_\alpha^m$，其中 m 是非负整数，$0<\alpha<1$，则 Beltrami 方程 $w_{\bar z}=\mu(z)w_z$ 的每个广义同胚解都属于空间 $C_\alpha^{m+1}(\overline{U}_{z_0})$[1]。

设 G 是一个Jordan区域，具有四个不同边界点和两组有序的对边. 我们将称区域 G 为拓扑四边形，并且将称这四个点为它的顶点. 这种四边形总可以被共形映射为一个矩形 Q，其边长为 a 与 b，并使得第一组对边对应于 Q 的长度为 a 的对边. 这里，比值 a/b 是共形不变量. 它被称为四边形 G 的模，并记作 $\operatorname{mod} G$.

定理 8. 对于区域 D 的一个同胚映射 $w=f(z)$，我们有

$$K(f)=\sup\frac{\operatorname{mod} f(G)}{\operatorname{mod} G},$$

其中上确界是对所有拓扑四边形 $G\subset D$ 取的. 由此推出，一个同胚 $f:D\to\overline{\mathbf{C}}$ 是 K 拟共形映射，当且仅当对每个曲边四边形 $G\subset D$，都有

$$K^{-1}\operatorname{mod} G\leqslant\operatorname{mod} f(G)\leqslant K\operatorname{mod} G. \tag{37}$$

不等式(37)常常被用来当作 K 拟共形映射的定义.

3. 现在我们来考虑上半平面 $H:\operatorname{Im} z>0$ 的拟共形自同构. 我们注意到，若 $\mu(z)$ 是定义在上半平面 H 上的，且 $\|\mu\|_\infty<1$，那么当我们按照

$$\mu(z)=\overline{\mu(\bar z)},\quad I_m z<0$$

---

1) 事实上，对于边界适当光滑的区域，整体上成立类似的结果(参阅[142, 67]).