1981 高中毕业生总复习纲要

数学

GAOZHONG BIYESHENG ZONGFUXI GANGYAO

福建人民教育出版社

一九八一年高中毕业生

数学总复习纲要

下　册

福建教育学院编

福建人民教育出版社

一九八一年高中毕业生
数学总复习纲要
下册
——福建教育学院编
*
福建人民教育出版社出版
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：6.5 字数：145千字
1981年1月第一版 1981年1月第一次印刷
印数：1—479,000
统一书号：7159·573 定价：0.49元

目　　录

三　　角

平面解析几何

三　　角

一、三角函数的定义及其基本性质

（一）任意角的概念

1.角的定义　角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的.角的大小由旋转量的大小来决定.如图3·1，一条射线由原来的位置 OA，绕着它的端点O按逆时针方向旋转到另一位置 OB，就形成角 α。

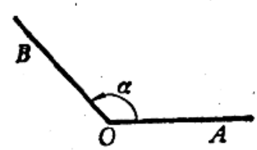

图3·1

2.正角和负角　按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角.当一条射线没有作任何旋转（即旋转量为零）时，我们也把它看成一个角，叫做零角.

3.角的度量

(1) 角度制：等于整个圆周的$\frac{1}{360}$的弧所对的圆心角叫做1度的角。用度做单位来量弧与角的制度叫做角度制.

1 周角 $=360^\circ$，$1^\circ=60'$，$1'=60''$。

(2) 弧度制：等于半径的长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角。用弧度做单位来量弧与角的制度叫做弧度制.

一般地，我们规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零.并且有

$$|\alpha| = \frac{l}{r},$$

其中α为已知角的弧度数，l为以已知角为圆心角所对圆弧的长，r为圆的半径。

（3）角度与弧度的换算：由$180^\circ = \pi$弧度，推得

$$\boxed{\begin{aligned} &1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{弧度} \approx 0.01745\text{弧度}; \\ &1\text{弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'. \end{aligned}}$$

用弧度表示角的时候，“弧度”二字通常略去不写。

4.终边相同的角　具有共同的始边与终边的角，叫做终边相同的角；所有和角α终边相同的角（包括角α在内），均可表示为：

$$k \cdot 360^\circ + \alpha, \quad k \in J \quad (\alpha\text{表示角度数}).$$

或　$2k\pi + \alpha, \quad k \in J$

（α表示弧度数）。

5.角所在的象限　使角的顶点与坐标原点重合，角的始边与x轴正方向重合，角的终边落在哪一象限，就把这个角叫做哪个象限的角。各个象限角可以表示如下（图3·2）：

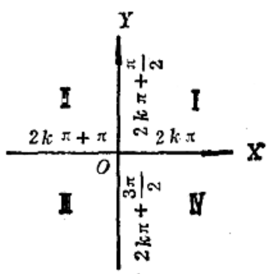

图3·2

第Ⅰ象限的角α：$2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in J$；

第Ⅱ象限的角α：$2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in J$；

第Ⅲ象限的角α：$2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in J$；

第Ⅳ象限的角α：$2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi, k\in J$；

例 1 时钟的分针所转的角是正的还是负的？经过下列时间所转成的角是多少度？合多少弧度？(1)12分钟；(2)2小时15分。

解：时钟的分针所转的角是负的，每经过1分钟所转成的角是$-\dfrac{360^\circ}{60}=-6^\circ$。

(1)分针走12分钟所转的角是：　$-6^\circ\times12=-72^\circ$。

$$-72^\circ=\frac{\pi}{180}\times(-72)=-\frac{2\pi}{5};$$

(2)分针走2小时15分所转的角是：$-6^\circ\times135=-810^\circ$。

$$-810^\circ=\frac{\pi}{180}\times(-810)=-\frac{9\pi}{2}.$$

例 2 写出与-35°终边相同的角的集合s，并把s中在-720°到720°间的角写出来。

解：　$S=\{\beta : \beta=k\cdot360^\circ-35^\circ, k\in J\}$。

S在-720°到720°间的角是：

$-1\times360^\circ-35^\circ=-395^\circ$，

$0\times360^\circ-35^\circ=-35^\circ$，

$1\times360^\circ-35^\circ=325^\circ$，

$2\times360^\circ-35^\circ=685^\circ$。

例 3 已知在半径等于150mm的圆上，一条弧的长是186mm，求这条弧所对的圆心角的度数。

解：所求圆心角的弧度数：　$\alpha=\dfrac{l}{r}=\dfrac{186}{150}=1.24$。

1.24(弧度)$=57.30^\circ\times1.24\approx71.05^\circ=71^\circ3'$。

（二）三角函数的定义

1.三角函数的定义 在任意角α的终边上任意取一点$P(x,y)$，设原点O到P的距离为r（即$r=\sqrt{x^2+y^2}$）（图3·3），

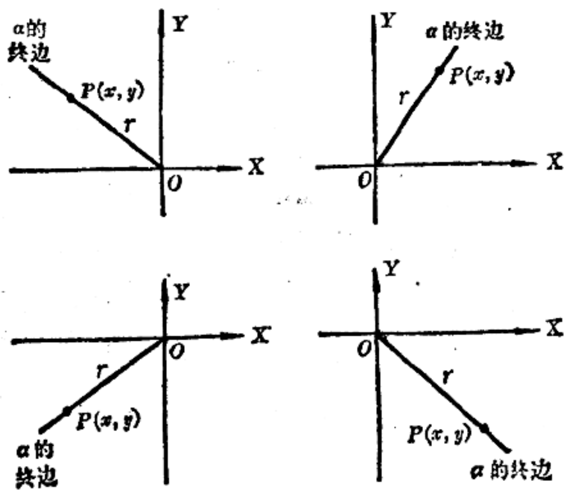

图3·3

则比值$\frac{y}{r}$、$\frac{x}{r}$、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{r}{x}$、$\frac{r}{y}$分别叫做角α的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割，即

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r};\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y};\quad \sec\alpha=\frac{r}{x};\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

对于一个确定的角α，上面六个比值和在角α的终边上所取的P点的位置无关；

这六个比值仅随着角α的变化而变化，对于一个确定的角α，都有完全确定的六个比值与它相对应，所以$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$和$\csc\alpha$都是角α的函数，分别叫做正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数，这些函数都叫做三角函数。

2.三角函数的定义域　使三角函数有意义的自变量（角或弧）的值的集合叫做三角函数的定义域，从三角函数的定义可以知道，角α的各三角函数的定义域是：

$\sin\alpha$、$\cos\alpha$：$\{\alpha:\alpha\in R\}$；

$\operatorname{tg}\alpha$、$\sec\alpha$：$\{\alpha:\alpha\in R,\ \alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in J\}$；

$\operatorname{ctg}\alpha$、$\csc\alpha$：$\{\alpha:\alpha\in R,\ \alpha\neq k\pi,\ k\in J\}$.

3.三角函数的符号　角α的三角函数的符号根据角所在的象限来确定，如图3·4。

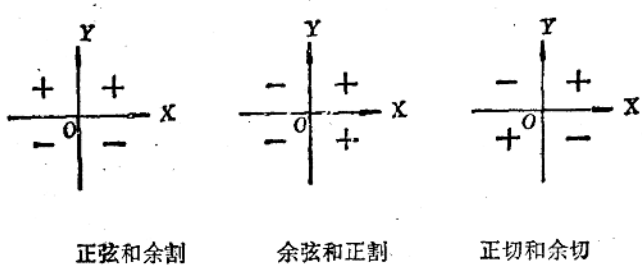

图3·4

4.三角函数线　以坐标轴的原点O为圆心、以等于单位长的线段为半径所作的圆叫做单位圆，三角函数的值可以用单位圆中的线段来表示（图3·5）。

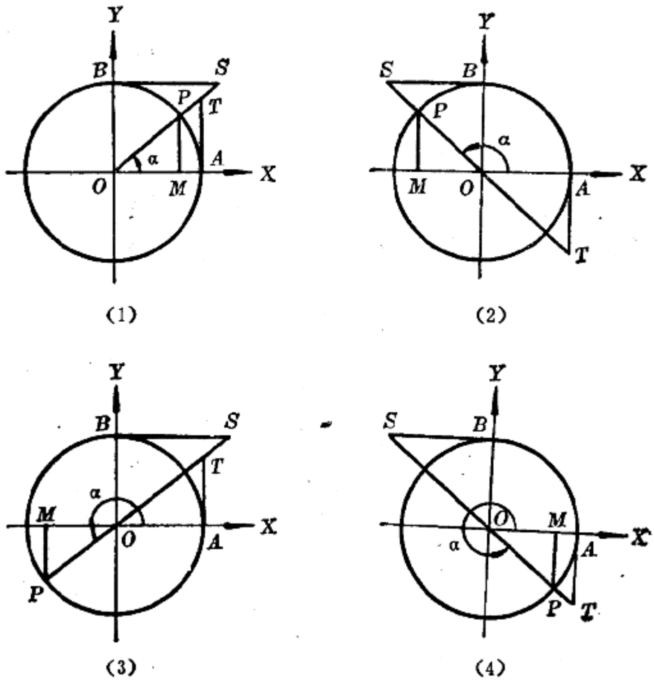

图3·5

根据三角函数的定义，得

$$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{MP}{1}=MP;$$

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{1}=OM;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AT}{OA}=\frac{AT}{1}=AT;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{BS}{OB}=\frac{BS}{1}=BS;$$

$$\sec\alpha=\frac{OP}{OM}=\frac{OT}{OA}=\frac{OT}{1}=OT;$$

$$\csc\alpha=\frac{OP}{MP}=\frac{OS}{OB}=\frac{OS}{1}=OS.$$

这些，说明在单位圆里的线段MP、OM、AT、BS、OT和OS等的量数连同它们的符号分别表示角α的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割的值，分别叫做角α的正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线和余割线，总称为三角函数线。

例 1 已知角α的终边上一点P的坐标是$(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$，求这个角的六个三角函数值。

解：由 $x=1+\sqrt{3}$，$y=1-\sqrt{3}$，得

$$r=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2};$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}=-\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

例 2 根据下列条件，确定θ是第几象限的角：

$$\cos\theta<0 \text{ 且 } \operatorname{tg}\theta<0.$$

解：$\because\ \cos\theta<0$,

$\therefore\quad \theta\in S_1=$｛第二象限的角｝$\cup$｛第三象限的角｝。

$\because\quad \mathrm{tg}\theta<0$,

$\therefore \theta\in S_2=$｛第二象限的角｝$\cup$｛第四象限的角｝。

所以，符合条件：$\cos\theta<0$ 且 $\mathrm{tg}\theta<0$的角：

$$\theta\in S_1\cap S_2=\{\text{第二象限的角}\}.$$

例 3 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\mathrm{tg}(2x+\dfrac{\pi}{3})$；　　(2) $y=\sqrt{-\sin\dfrac{x}{2}}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-\cos x}$；　　(4) $y=\sqrt{\mathrm{ctg}x\cdot\csc x}$；

(5) $\log_{\sin x}(\cos x+\dfrac{1}{2})$。

解：(1) 函数 $y=\mathrm{tg}\,(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的定义域是：

$$2x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$2x\neq k\pi+\frac{\pi}{6},\qquad x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}.$$

即　定义域是 $\left\{x:x\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12},\quad k\in J\right\}$；

(2) 函数 $y=\sqrt{-\sin\dfrac{x}{2}}$有意义时，

$$-\sin\frac{x}{2}\geqslant0,\qquad \text{即}\quad \sin\frac{x}{2}\leqslant0,$$

$\therefore$ 函数 $y=\sqrt{-\sin\dfrac{x}{2}}$的定义域是：

$$2k\pi+\pi\leqslant\frac{x}{2}\leqslant2k\pi+2\pi.$$

即　定义域是$\{x: 4k\pi+2\pi\leqslant x\leqslant 4k\pi+4\pi,\ k\in J\}$；

(3) 函数 $y=\dfrac{1}{1-\cos x}$ 有意义时，

$$1-\cos x\neq 0, \qquad 即 \quad \cos x\neq 1,$$

∴　函数 $y=\dfrac{1}{1-\cos x}$ 的定义域是：

$\{x: x\neq 2k\pi, \qquad k\in J\}$；

(4) 函数$y=\sqrt{\operatorname{ctg}x\cdot\csc x}$ 有意义时，

$$\operatorname{ctg}x\cdot\csc x\geqslant 0.$$

当　$\operatorname{ctg}x\geqslant 0$ 且 $\csc x\geqslant 0$ 时，

则　$2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$(k\in J)$；

当　$\operatorname{ctg}x\leqslant 0$ 且 $\csc x\leqslant 0$ 时，

则　$2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\leqslant x<2k\pi+2\pi\ (k\in J)$.

∴　函数 $y=\sqrt{\operatorname{ctg}x\cdot\csc x}$ 的定义域是：

$$\left\{x: 2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in J\right\}\cup$$

$$\left\{x: 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\leqslant x<2k\pi+2\pi,\ k\in J\right\}，$$

(5) 函数$y=\log_{\sin x}(\cos x+\dfrac{1}{2})$

有意义时，

$$必须\begin{cases}\sin x>0; \\ \sin x\neq 1; \\ \cos x+\dfrac{1}{2}>0.\end{cases}$$

∵　$\sin x>0$,

∴　$2k\pi<x<2k\pi+\pi$.

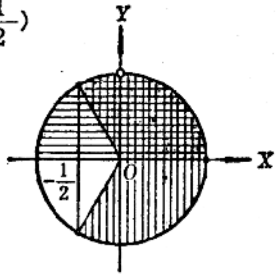

图3·6

即　x的终边落在第Ⅰ、Ⅱ象限内(图3·6中横线阴影)；

∵　$\sin x \neq 1$，　∴$x \neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$(图3·6中除去纵轴)；

又　$\cos x+\frac{1}{2}>0$，即　$\cos x>-\frac{1}{2}$。

∴　$2k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}$(图3·6中竖线阴影)。

取以上共同范围（即重叠阴影部分除去纵轴）得：

$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，或 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，

∴　函数 $y=\log_{\sin x}(\cos x+\frac{1}{2})$ 的定义域是：

$$\left\{x: 2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in J\right\}\cup\left\{x: 2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3},\ k\in J\right\}.$$

注意：题（5）这类问题，应用单位圆，结合三角函数值的变化范围来求函数的定义域较为方便。

（三）三角函数值的变化

三角函数值的变化情况和变化范围如下表：

α	$2k\pi$		$2k\pi+\frac{\pi}{2}$		$2k\pi+\pi$		$2k\pi+\frac{3\pi}{2}$		$2k\pi+2\pi$
$\sin\alpha$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos\alpha$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	↗	不存在	↗	0	↗	不存在	↗	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	不存在	↘	0	↘	不存在	↘	0	↘	不存在

表中$k\in J$；向上的箭头“↗”表示逐渐增加，向下的箭头“↘”表示逐渐减少。

从表中可以看出：

$|\sin\alpha|\leqslant 1$,　　即　$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1$;

$|\cos\alpha|\leqslant 1$,　　即　$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$;

$\operatorname{tg}\alpha$和$\operatorname{ctg}\alpha$可取任何实数。

正割函数、余割函数值变化范围是：

$|\sec\alpha|\geqslant 1$,　　即　$\sec\alpha\leqslant -1$或$\sec\alpha\geqslant 1$;

$|\csc\alpha|\geqslant 1$,　　即　$\csc\alpha\leqslant -1$或$\csc\alpha\geqslant 1$。

例 1　下列各式的值是正的还是负的？为什么？

(1) $\sin\frac{7\pi}{10}-\sin\frac{9\pi}{10}$;　　(2) $\operatorname{ctg}232°-\operatorname{ctg}132°$;

(3) $\frac{\cos160°-\cos170°}{\operatorname{tg}345°-\operatorname{tg}355°}$.

解：(1) 因为一个角由$\frac{\pi}{2}$变到π时，它的正弦的值是逐渐减少的，所以 $\sin\frac{7\pi}{10}-\sin\frac{9\pi}{10}$的值是正的，

即　$\sin\frac{7\pi}{10}-\sin\frac{9\pi}{10}>0$;

(2) 因为232°在第三象限，所以$\operatorname{ctg}232°$的值是正的；132°在第二象限内，所以$\operatorname{ctg}132°$的值是负的，因此$\operatorname{ctg}232°-\operatorname{ctg}132°$的值是正的，即　$\operatorname{ctg}232°-\operatorname{ctg}132°>0$;

(3) 因为一个角由90°变到180°时，它的余弦的值是逐渐减少的，所以

$$\cos160°>\cos170°,\ 即\ \cos160°-\cos170°>0,$$

而一个角由270°变到360°时，它的正切的值是逐渐增加的，所以　$\operatorname{tg}345°<\operatorname{tg}355°$，即　$\operatorname{tg}345°-\operatorname{tg}355°<0$,

$$\therefore\ \frac{\cos160°-\cos170°}{\operatorname{tg}345°-\operatorname{tg}355°}<0.$$

注意：三角函数值的递增或递减是对同一象限的角的同一个函数来说的。

例 2 要使 $\cos\alpha=4a-1$ 有意义，求 a 的值的范围。

解：要使 $\cos\alpha=4a-1$ 有意义，必须 $|4a-1|\leqslant 1$，

即 $\begin{cases}4a-1\leqslant 1,\\ 4a-1\geqslant -1.\end{cases}$

解得，$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$。

例 3 已知$0<x<\frac{\pi}{2}$，证明：$\sin x<x<\operatorname{tg}x$。

证明：右图，单位圆中，$\triangle OAB$的面积<扇形OAB的面积<$\triangle OAD$的面积，

即 $\frac{1}{2}OA\cdot CB<\frac{1}{2}OA\cdot\widehat{AB}$

$<\frac{1}{2}OA\cdot AD$,

$CB<\widehat{AB}<AD$,

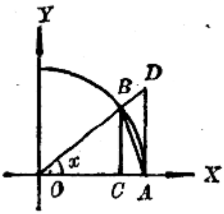

图3·7

$\therefore\ \sin x<x<\operatorname{tg}x$。

例 4 x是什么值时，函数$y=2-3\sin^2x$有极大值和极小值，求出y的极大值和极小值。

解：当 $x=k\pi(k\in J)$ 时，函数 $y=2-3\sin^2x$ 有极大值：

$$y_{极大}=2-3\times0=2;$$

当 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in J)$时，函数 $y=2-3\sin^2x$有极小值：

$$y_{极小}=2-3\times1=-1。$$