经济数学讲义

杨 升 田 编

黑龙江省社会科学院研究生部

1 9 8 5 年 7 月

经济数学讲义

杨升田 编

黑龙江省社会科学院研究生部出版

封面设计：徐俊伟

业经黑龙江省出版总社(84)黑出管字第181号备案

经 济 数 学 讲 义

杨升田 编

黑龙江省社会科学院研究生部出版
哈尔滨印刷二厂印刷
787×1092 32开本 456,400字
1985年7月第一次印刷

定价：3.90元

内 容 提 要

本书主要包括与经济学有关的数学问题，作为经济专业的必读教材，其中包括微积分，线性代数、概率论与数理统计以及其它与经济学有关的数学问题。可供经济学、财经专业的研究生，大学生使用，也可供同类专业的教员作参考。

序　　言

应用数学工具进行定量研究是一门科学具有更完备形态的标志。现代的社会科学无论在收集，整理资料方面还是对资料的分析工作，都已开始摆脱手工业方式而转向使用先进的数学方法和电子计算机来完成，从大量的简单的脑力劳动中解放出来，这是当代社会科学得到迅速进展，向定量化迈进的重要标志之一。

而与数学密切相关的经济学，当今更是从定性分析向定量定性分析的飞跃时代。

实际上经济学从它产生的那个时候起，就在某种程度上运用数学的概念，公式模型以及计算方法。目前，在经济研究中，不但经常大量的广泛应用着初等数学，而且已经利用了高等数学。随着经济学和数学的共同发展，在经济研究中还将进一步运用现代数学方法。

“计量经济学”又大量的应用数理统计和概率论，而如何取得最好的经济效益这个“最优化”问题，正好是应用数学的一个分支——数学规划——所研究的内容。由于经济现象之间的因果关系的逐渐明确，使得对经济活动的过程有可能作出予测甚至加以控制，于是出现了“经济控制论”，它应用了古典变分方法，动态规划和极大值原理等一系列数学理论。这些数学及其研究方法的引入不仅为经济学的发展开拓了新局面，而且使其很多研究成果，比如像经济信息，商品生产予测，经济管理，生产和贮存，商品流通，资源和商

品的分配等等可以实现定量化和精确化。马克思说过：一种科学只有在成功的运用数学时，才算达到了真正完善的地步，因此目前面临着社会科学现代化的问题，许多社会科学工作者提出，社会科学要注意从数学、自然科学吸取些什么。甚至哲学家们也认为，尽管哲学不会等同于数学和自然科学，也不会等同于社会科学，但整个社会科学领域既然是科学，那么就都可以用上数学和自然科学。

目前经济学的研究已进入了一个新的时代，由于不断的引入作为工具的数学，也使经济学的研究不断的开辟新的学科，工具的先进和现代化，使得经济学也出现全新的局面。

以往的经济学只能应用平均值的概念对过去的经济现象作出总结，由于导数及极值的引入，尤其是多元函数的引入，使得可以考虑多种因素对经济现象的影响，而多元函数的极值，恰给出了最佳的经济活动过程，这就使得有可能对这一过程作出予测，并加以控制。我们现在翻开一本现代科学管理的书籍或者一篇论文都可见到被一些数学公式所充满。

作为哲学与自然科学，技术科学，社会科学之间桥梁的中间环节的系统论也还在极力的加快各门科学向数学化迈进，吸引数学方法和数学语言，对所给定的对象进行数学模拟，给以确切的定义和明晰的概念。

系统论的分析方法也大胆的将现代应用数学引入了许多管理领域。其分析方法也力求使用数学工具，应用数学的语言描述其过程和现象，用数学显示他们的差别，由于数学广泛应用于系统分析，也可将现代广泛使用而又卓有成效的电子计算技术引进，使现代管理更进一步的走向定量化，精确

化和自动化。

随着科学的向前发展，每门科学都在趋向数学化，电子计算机的广泛使用，更是加快了这种进程。但是在社会科学中并不是所有的因素都可以计量的，很多现象是非常复杂的，比如人的因素，就难以计量，他们的政治觉悟，思想品德，生活作风，创造精神等等，都是一些模糊的概念，这些现象应用经典数学来描述，常常是无能为力的。模糊数学的产生和发展却在某种程度上能解决这一问题，一定的模糊度反而能客观的反应事物的实质。

当然，不懂数学也可以学好经济学或社会科学，但终究是事倍而功半。

在经济学从定性分析向定量定性分析的飞跃时代，学好数学将是掌握现代经济理论的钥匙。

本书的编写恰是为这一目的，本书重点叙述"微积分""线性代数""概率论和数理统计"外还对其它有关的数学问题作一介绍。

本书是由赵杨提出编写大纲和细目、阐述经济原理和有关经济学的例题，杨升田执笔编写。由于编者水平所限，错误难免，请读者指正。

目　　录

序　　言……………………………………………… 1—3

第一章　线性代数……………………………………… 1

第一节　二阶行列式………………………………… 1

第二节　三阶行列式………………………………… 5

第三节　三阶行列式的基本性质…………………… 6

第四节　三元线性方程组……………………………12

第五节　齐次线性方程组……………………………15

第六节　高阶行列式…………………………………21

第七节　矩　　阵……………………………………23

第八节　矩阵的运算…………………………………29

第九节　初等变换与线性方程组……………………42

第十节　实例：投入产出综合平衡模型……………52

第二章　函数及其图形…………………………………60

第一节　实数与数轴，常量与变量…………………60

第二节　区　　间……………………………………62

第三节　实数的绝对值和邻域………………………63

第四节　函数的概念…………………………………65

第五节　函数的表示法………………………………70

第六节　函数的几种特性……………………………73

第七节　反函数的概念………………………………78

第八节　基本初等函数及其图形……………………82

第九节　复合函数……………………………………90

第三章　数列的极限及函数的极限……………………92
第一节　数列及其简单性质……………………92
第二节　数列的极限……………………94
第三节　函数的极限……………………100
第四节　无穷大，无穷小……………………108
第五节　关于无穷小的定理……………………112
第六节　极限的四则运算……………………114
第七节　极限存在的准则·两个重要极限…121
第八节　双曲函数……………………127
第九节　无穷小的比较……………………132
第四章　函数的连续性……………………135
第一节　函数连续性的定义……………………135
第二节　函数的间断点……………………138
第三节　闭区间上连续函数的基本性质……141
第四节　连续函数的和、积及商的连续性…144
第五节　反函数与复合函数的连续性………145
第六节　初等函数的连续性……………………147
第五章　导数及微分……………………149
第一节　几个引出导数概念的实例…………149
第二节　导数概念……………………151
第三节　导数的几何意义……………………155
第四节　求导数的例题·导数基本公式表…156
第五节　函数的和、积、商的导数…………162
第六节　反函数的导数……………………166
第七节　复合函数的导数……………………169
第八节　高阶导数……………………173

第九节　参数方程所确定的函数的导数…… 175
第十节　微分概念…… 177
第十一节　微分的求法·微分形式不变性… 180
第十二节　微分应用于近似计算及
误差的估计…… 183
第十三节　导数的应用实例…… 187
第六章　中值定理…… 190
第一节　中值定理…… 190
第二节　罗必塔法则…… 195
第三节　泰勒公式…… 202
第七章　导数的应用…… 209
第一节　函数的单调增减性的判定法…… 209
第二节　函数的极值及其求法…… 211
第三节　最大值及最小值的求法…… 219
第四节　曲线的凹性及其判定法…… 222
第五节　曲线的拐点及其求法…… 224
第六节　曲线的渐近线…… 226
第七节　函数图形的描绘方法…… 228
第八章　不定积分…… 232
第一节　原函数与不定积分的概念…… 232
第二节　不定积分的性质…… 236
第三节　基本积分表…… 237
第四节　换元积分法…… 239
第五节　分部积分法…… 250
第六节　有理函数的分解…… 253
第七节　有理函数的积分…… 258

第九章　定 积 分……………………………… 265
第一节　曲边梯形的面积·变力所作的功… 265
第二节　定积分的概念…………………… 268
第三节　定积分的简单性质·中值定理…… 272
第四节　牛顿莱不尼兹公式……………… 277
第五节　用换元法计算定积分…………… 280
第六节　用分部积分法计算定积分……… 284
第七节　定积分的近似公式……………… 285
第八节　广义积分………………………… 292
第十章　定积分的应用…………………… 299
第一节　平面图形的面积………………… 299
第二节　体　　积………………………… 304
第三节　经济应用问题的例……………… 308
第十一章　级　　数……………………… 311
第一节　无穷级数概念…………………… 311
第二节　无穷级数的基本性质，收敛
　　　　的必要条件……………………… 312
第三节　正项级数　收敛性的充分判定法… 315
第四节　任意项级数，绝对收敛………… 322
第五节　幂级数的收敛半径……………… 325
第六节　幂级数的运算…………………… 330
第七节　泰勒级数………………………… 333
第八节　初等函数的展开式……………… 336
第九节　泰勒级数在近似计算上的应用…… 342
第十二章　富里哀级数…………………… 348
第一节　三角级数，三角函数系的正交性… 348

第二节　尤拉-富里哀公式……………………349
第三节　富里哀级数……………………… 351
第十三章　多元函数的微分法及其应用………… 356
第一节　一般概念………………………… 356
第二节　二元函数的极限及连续性………… 359
第三节　偏 导 数………………………… 363
第四节　全增量及全微分………………… 367
第五节　复合函数的微分法……………… 373
第六节　隐函数及其微分法……………… 376
第七节　高阶偏导数……………………… 380
第八节　多元函数的极值………………… 382
第九节　条件极值—拉格朗日乘数法则…… 386
第十节　最小二乘法……………………… 389
第十四章　重 积 分……………………………… 393
第一节　二重积分………………………… 393
第二节　二重积分的简单性质　中值定理… 395
第三节　二重积分计算法………………… 398
第十五章　微分方程……………………………… 405
第一节　一般概念………………………… 405
第二节　变量可分离的微分方程………… 411
第三节　齐次微分方程…………………… 415
第四节　一阶线性方程…………………… 419
第五节　高阶微分方程的几个特殊类型…… 424
第六节　线性微分方程解的结构………… 432
第七节　常系数齐次线性方程…………… 437
第八节　常系数非齐次线性方程………… 444

第十六章　概率统计……………………………… 455
第一节　排列与组合……………………………… 455
第二节　概　　率……………………………… 459
第三节　抽样检验……………………………… 463
第四节　概率法则……………………………… 467
第五节　矩阵在计算概率中的应用………… 479
第六节　随机变量……………………………… 484
第七节　概率分布……………………………… 486
第八节　二项分布……………………………… 489
第九节　随机变量的数字特征……………… 494
第十节　连续型随机变量的分布函数……… 505
第十一节　回归分析方法…………………… 515
一、一元线性回归分析…………………… 515
二、线性回归方程效果的检验…………… 531
三、化曲线为直线的回归问题…………… 535
第十二节　多元线性回归…………………… 540
一、多元线性回归方程的求法…………… 540
二、多元线性回归的方差分析…………… 545
三、多元线性回归中的相关系数………… 547
第十三节　误差理论………………………… 550
第十七章　控制论与管理科学……………………… 563
第一节　控制论的产生和发展……………… 563
第二节　控制论的研究方法………………… 566
第三节　管理系统是信息系统……………… 582
第四节　管理过程是控制过程……………… 588
第十八章　计算机初步……………………………… 601

第一节　进位制…………………………………… 603
第二节　逻　辑…………………………………… 613
第三节　计算机…………………………………… 622

第一章　线性代数

第一节　二阶行列式

在解决许多实际问题中，最后往往归结为解一个线性方程组的问题。现在我们考察下述二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

并求解。

利用消元法，以b_2，b_1分别乘第一个方程和第二个方程，然后将两式相减。同时以a_2，a_1分别乘以第一个方程和第二个方程，然后将两式相减，得到关于x，y的方程

$$(a_1b_2-a_2b_1)\ x=c_1b_2-c_2b_1 \tag{2}$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)\ y=a_1c_2-a_2c_1 \tag{3}$$

当$(a_1b_2-a_2b_1)\neq 0$时，则可以得到方程组的解

$$\begin{aligned} x&=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2a_1}\ , \\ y&=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\ 。\end{aligned} \tag{4}$$

为了将方程组的解（4）规范化，便于记忆，现引入二阶行列式的概念。

将已知四个数排成正方表

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$$

那么数$A_1B_2-A_2B_1$称为对应于这个正方表的二阶行列式。如果把方程（1）的x、y系数也排成正方表，那么方程（2），（3）的x，y系数恰是这个正方表的二阶行列式。因此行列式是一个数，是经过一定的运算得到的。如将二阶行列式用记号

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

表示，那么

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2-A_2B_1 \tag{5}$$

数A_1，A_2，B_1，B_2称为行列式（5）的元素。

例如$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16-15=1$

横向叫做行，竖向叫作列，行列式的行数和列数相等，这个数目称为行列式的阶，行列式（5）就是二阶行列式。从左上角到右下角的对角线称为主对角线，如（5）中的“A_1”和“B_2”构成主对角线。

这样方程组（1）的解（4）可表为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{6}$$

由此可见，分母中的行列式是由方程组（1）的系数组成，称为方程组（1）的系数行列式。我们用D表示这个行列式，用Dx，Dy表示公式（6）中分子的行列式，那么，对于$D\neq 0$时，有

$$x=\frac{Dx}{D},\qquad y=\frac{Dy}{D}$$

可以看到：将方程组（1）的常数项（指在各方程右侧的c_1，c_2）代换行列式D中未知数x的系数便得Dx，代换行列式D中未知数y的系数便得到Dy。

这样，很方便的可用行列式来表示方程组（1）的解。

当方程（1）的行列式D等于零时，将式(2)，(3)改写为

$$D\cdot x=Dx,\qquad D\cdot y=Dy \tag{7}$$

当$D=0$时，而Dx，Dy中至少有一个不为零时，则显而易见，无论x，y取什么数值总不能使（7）式的两个等式同时成立。因此方程组（1）无解。

当D，Dx及Dy都等于零时，有

$a_1b_2-a_2b_1=0$，$c_1b_2-c_2b_1=0$，$a_1c_2-a_2c_1=0$ 故

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

系数成比例。这表明方程组（1）中的一个方程可由另一个方程乘上一适当的常数而得到。实际上方程组（1）只有一个是独立的，只要解其中的一个方程就够了。也就是说方程组（1）有无限多组解。

综上所述，可得如下结论：

1°若$D\neq 0$则方程组（1）有唯一确定解，即