

经济数学基础

(线性代数部分)

赵振全 张屹山 于维生



吉林大学出版社

经济数学基础

(线性代数部分)

赵振全 张屹山 于维生

*

吉林大学出版社出版 吉林省新华书店发行

长春市南关区全安印刷厂印刷

*

850×1168 大32开 7.8125印张 193 000字

1988年1月第1版 1988年1月第1次印刷

印数: 1—5 700册

ISBN 7—5601—0077—5/O · 15

定价: 1.60元

前 言

经济数学基础这套书共分上、下两册，上册主要介绍微积分学，下册主要介绍线性代数。

这套书是应各类财经管理教育的数学教学需要而编写的。为了适应各类财经管理教育的需要，在选材上注意了广泛性，并适当地增加了一些有关数学在经济分析中的应用内容。不同层次的财经管理教育在进行具体的教学过程中，可以根据不同要求，各取所需。

为了便于自学，本书在文字上力求通俗易懂；在叙述上力求深入浅出，循序渐近。

本套书的下册由赵振全、张屹山、于维生编写，最后由赵振全同志统稿。

由于时间和水平关系，不足乃至错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

一九八七年九月

于吉林大学经济管理学院

目 录

第一章 行列式

§ 1.1 n 阶行列式	(3)
§ 1.2 行列式计算举例	(12)
§ 1.3 克莱姆法则	(18)
习题一	(23)

第二章 n 维向量

§ 2.1 n 维向量	(27)
§ 2.2 向量的线性相关与线性无关	(30)
§ 2.3 向量组的秩数	(42)
习题二	(47)

第三章 矩阵

§ 3.1 矩阵的定义与运算	(50)
§ 3.2 逆矩阵	(58)
§ 3.3 矩阵的秩数	(67)
§ 3.4 初等变换	(73)
习题三	(80)

第四章 线性方程组

§ 4.1 线性方程组的一般形式	(86)
§ 4.2 线性方程组有解的判别定理	(89)
§ 4.3 齐次线性方程组解的结构及求解	(94)
§ 4.4 非齐次线性方程组解的结构及求解	(103)
§ 4.5 解线性方程组的消去法	(109)
习题四	(121)

第五章 矩阵的对角形与实二次型的标准形

§ 5.1 矩阵的特征根与特征向量	(123)
§ 5.2 矩阵的对角形	(136)

5.2.1 一般矩阵的对角形	(137)
5.2.2 实对称矩阵的对角形	(144)
§ 5.3 二次型及其标准形	(161)
习题五	(179)
第六章 线性经济模型	
§ 6.1 投入产出模型	(183)
6.1.1 投入产出平衡表	(184)
6.1.2 投入产出方程	(185)
6.1.3 投入产出模型的应用	(191)
§ 6.2 线性规划模型	(195)
6.2.1 线性规划问题的数学模型	(195)
6.2.2 线性规划模型解的性质	(214)
6.2.3 解线性规划模型的单纯形方法	(219)
习题六	(226)
习题答案	(230)

第一章 行列式

在经济数量分析中，许多问题归结为求解线性方程组的问题。因此在数学上有必要探讨一下解线性方程组的一般方法。

最简单的情况是解二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

以 a_{22} 乘以第一个方程，以 a_{12} 乘以第二个方程，然后两式相减，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

以 a_{21} 乘以第一个方程，以 a_{11} 乘以第二个方程，然后将两式相减，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ，我们得到这个二元线性方程组的解是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

利用中学学过的二阶行列式的知识，设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

二阶线性方程组的解可用二阶行列式表示为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \end{cases}$$

特别要注意 $D \neq 0$.

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

同样可以利用三阶行列式把它的解表示为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \\ x_3 = \frac{D_3}{D} \end{cases}$$

其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

因二阶行列式已有定义，所以这种降阶展开的方法也就由低阶（二阶）行列式给出了三阶行列式的定义。

对于一般的 n 阶行列式，我们也用这种降阶的方法定义它。为了简化展开式的表达形式，我们先引入**代数余子式**的概念。

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为一 n 阶行列式。在 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后剩下所有的元素构成的 $n-1$ 阶行列式叫做 a_{ij} 所对应的**余子式**。记为 M_{ij} 。这个余子式再乘以 $(-1)^{i+j}$ ，得出式叫 a_{ij} 所对应的**代数余子式**。记为 A_{ij} ，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (1.1)$$

例1 三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -8$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} 2 = 2$$

定义 1.1 设已经定义了一阶、二阶、…、 $n-1$ 阶行列式，定义 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1} \quad (1.2)$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(这个行列式下半部分元素都是零)。

解 按 n 阶行列式的定义，

$$D = \sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + \cdots + 0 \cdot A_{n1}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \cdots a_{3n} \\ 0 & a_{44} \cdots a_{4n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\dots\dots\dots \\
&= a_{11} a_{22} \cdots a_{n-2, n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

一般而言，当 n 很大时，按这种降阶展开的方法计算行列式还是很麻烦的。为简化行列式的计算，我们先讨论一些 n 阶行列式的性质。

设 D 是 n 阶行列式，若把 D 的第一行元素变为行列式 D' 的第一列元素，把 D 的第二行元素变为 D' 的第二列元素， $\dots$ ，把 D 的第 n 行元素变为 D' 的第 n 列元素，则称 n 阶行列式 D' 为行列式 D 的转置行列式。

例 若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 的转置行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.1 行列式转置后，其值不变。

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D'$$

由性质 1 可知, 行列式对行所具有的性质, 对列也一定成立. 反之, 行列式对列所具有的性质, 对行也同样成立.

例 3 对于行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

可按第一行展开为: $D = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}$.

证明: 用 a'_{ij} 记 D' 中第 i 行、第 j 列元素, 用 A'_{ij} 记其对应的代数余子式. 故有

$$a'_{ij} = a_{ji}, \quad A'_{ij} = A_{ji}$$

对一切 $i, j = 1, 2, 3, 4, \cdots, n$ 成立. 按行列式的定义有:

$$D' = \sum_{j=1}^n a'_{j1} A'_{j1} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}$$

再利用性质 1.1, $D' = D$. 所以

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

性质 1.2 行列式的两行(列)互换后, 行列式的值改变符号。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} \cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

利用性质 1.1 和性质 1.2, 我们可以得出: 一个 n 阶行列式可按其任何一行或任何一列进行降阶展开。

定理 1.1 对 n 阶行列式 D 有:

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (j=1, 2, 3, \dots, n) \text{ (按第 } j \text{ 列展开)} \quad (1.3)$$

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \text{ (按第 } i \text{ 行展开)} \quad (1.4)$$

证明 仅证(1.4)式。设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 的第 i 行依次与第 $i-1, i-2, \dots, 2, 1$ 行互换, 所得的行列式记为 D^* , 即

$$D^* = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(记成) \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{vmatrix}$$

从 D 得到 D^* , 要进行 $i-1$ 次换行. 由性质 1.2 知, 每进行一次换行, 行列式要改变符号一次, 故 $D^* = (-1)^{i-1} D$. 而由例 3,

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i-1} D^* = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}^* A_{ij}^* \\ &= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}^* (-1)^{i+j} M_{ij}^* \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}^* (-1)^{i+j} M_{ij}^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \end{aligned}$$

于是 (1.4) 式成立.

性质 1.3 若行列式有两行 (列) 元素相同, 则行列式的值为零.

性质 1.3 的证明可由性质 1.2 得到. 留作练习.

性质 1.4 若行式的某行 (列) 有公因子 k , 可将公因子提到行列式之外. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由定理 1.1, 将 D^* 按第 i 行展开, 得

$$D^* = \sum_{j=1}^n ka_{ij} A_{ij} = k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = kD$$

性质 1.5 行列式 D 中的某行 (列) 元素全为零, 则 $D=0$.

性质 1.6 行列式 D 中某两行 (列) 成比例, 则 $D=0$.
即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

性质 1.7 行列式某行 (列) 的各元素如果是两数的和, 则可把这个行列式化为两个行列式的和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.8 如果行列式中一行(列)中每个元素都加上另一行(列)相应元素的 k 倍, 则行列式值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.5 至性质 1.8 的证明, 留作练习。特别是性质 1.8, 是简化行列式计算的有效方法。

性质 1.9 如果行列式的某行(列)元素分别乘以另一行(列)对应元素的代数余子式, 则这些乘积之和为零。即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0 \quad (i \neq j)$$

证明 考虑第 i 行与第 j 行元素相同的行列式 (即 $a_{ik} = a_{jk}$, $k=1, 2, 3, \dots, n$)。利用性质 1.6, 有

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

将 D 按第 j 行展开, 并注意 $a_{jk} = a_{ik}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), 可得

$$D = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$$

从而

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

成立. 同理有

$$\sum_{k=1}^n a_{k,i} A_{k,j} = 0 \quad (i \neq j)$$

§1.2 行列式计算举例

有了 §1.1 中的行列式的性质, 再计算行列式时, 就比较方便了. 但还需要一些技巧. 这必须通过大量的练习, 才能掌握.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -2 & 6 \\ -2 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & -9 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

解 先把公因式提出, 使计算的数字小些. 从第二行提出 2, 然后从第四列提出 3, 得

$$D = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -9 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

为尽量使零元素变得多些, 把第二行的 3 倍加到第四行上, 得:

$$D = 2 \times 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$