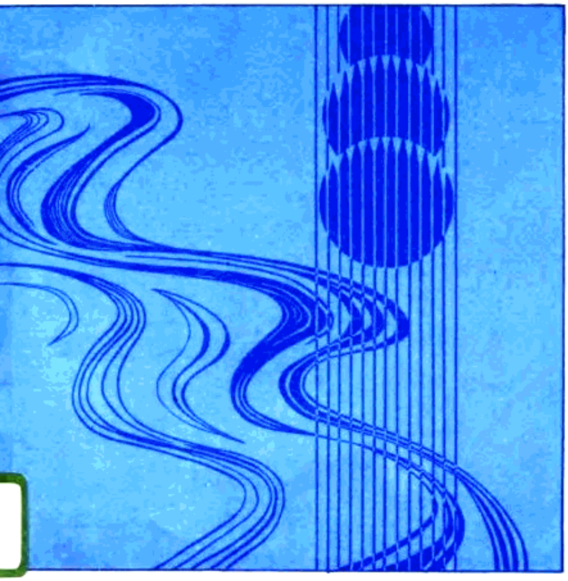
经济应用数学

主编　张爱民　杨学忠



中国商业出版社

前　　言

《经济应用数学》一书是为经济类院校“经济应用数学”课程编写的教材。内容包括“微积分”，“线性代数与线性规划”，“概率论与数理统计”的基本知识。

随着我国社会主义市场经济的建立和发展，以及改革开放的不断深化，经济数学方法在经济管理工作中的应用也日益广泛和深入。为此，我们参考了目前各经济院校有关专业的教学计划，结合以前教材使用情况和作者多年的教学实践，重新修定编写了这本教材。本教材注意了高等数学的系统性，逻辑性以及各专业课对数学课的要求，根据少而够用的原则力求深入浅出，通俗易懂。教材中讲解了有关数学的基础知识，尤其是加强了数学方法的实际应用内容。通过本教材的学习，可使读者在掌握基本理论知识和基本技能的同时，提高分析问题和解决一些实际问题的能力。

本书可作为经济管理类院校经济应用数学课程的教材，亦可作为夜大、函大、同类专业经济应用数学课程的教材或参考书。

《经济应用数学》一书由张爱民副教授、杨学忠教授主编，许桂霞、常成林、谭瑞林同志任副主编。参加编写的同志还有蔡铁生、张丽敏、孙秀钦、樊树鑫、张子杰、王瑞英、刘平、翟桂新、王志民、索秀云、房倩。本书由张丽敏、蔡铁生同志担任主审。还需要指出的是，河北经贸大学的杨桂华副教授在阅读本书初稿后提出了宝贵意见，在此谨表示谢意。

由于编者水平所限，各方面都难免存在一些问题，欢迎本教材的读者给予批评指正。

编　者

1996. 6

目　录

第一篇　微　积　分

第一章　函　数

§1.1　函数的概念

函数是微积分学的研究对象，函数的概念是现实世界中各种变量相依关系的数学抽象。

一、函数的定义及表示法

定义 1.1　在某一变化过程中设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内每取定一个数值时，变量 y 按照某一对应法则都有唯一确定的数值和它相对应，就称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，称 x 为自变量，y 称做因变量。使函数 y 有意义的自变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域。

函数的定义域常用集合或区间来表示，自变量与因变量的对应规律通常用表格、图象和解析式来表示。

当自变量 x 取定义域 D 内的某一个定值 x_0 时，函数 $y=f(x)$有确定的值和它对应，记 x_0 处的函数值为 $f(x_0)$ 或 $y|x=x_0$。函数值的全体叫做函数的值域，用字母 Z 表示。函数的定义域，对应法则及值域称为函数的三个要素，判定两个函数是否相同，须看它们的定义域、对应法则和值域完全相同，此时才能称两个函数是相同的。

例如函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$，它的定义域 $D=\{x|x\neq 1, x\in R\}$，

函数值 $f(o)=-1$，$f(-3)=-\frac{5}{2}$，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 无意义，通常称为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时没有定义。

二、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在实数集 D 内有定义，如果存在常数 $M>0$，对任意 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在实数集 D 内有界；反之，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在实数集 D 内无界。

例如正弦函数 $f(x)=\sin x$，对任意 $x\in R$，存在 $M=1$，使 $|\sin x|\leqslant 1$，$f(x)=\sin x$ 在实数集合 R 内有界。

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 对 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的。

类似地，可以定义在无限区间内函数的单调增加或单调减少。

例如函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的。$y=x^3$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的，也称 $y=x^3$ 是单调的。

3. 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对于其定义域内的任何 x 都满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果函数 $f(x)$ 对于其定义域内的任何 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 为奇函数。

我们已知道，偶函数的图形是关于 y 轴对称的，而奇函数的图形是关于原点对称的。

例如 $y=x^2$, $y=\cos x$ 是偶函数，$y=x^3$, $y=\sin x$ 是奇函数。还有一些函数，既不是奇函数也不是偶函数，如 $y=x^2-\sin x$ 称做非奇非偶函数。

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个大于零的常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 对于其定义域内的所有 x 值都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数。通常称最小正数 T 为周期函数的周期。

例如函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$ 是以 π 为周期的周期函数。

三、反函数

研究变量与变量之间的函数关系时，自变量与因变量的选取是相对的。于是有下面定义：

定义 1.2　设变量 y 是变量 x 的函数 $y=f(x)$，其值域设为 Z。如果将 y 当作自变量，对于 Z 中的每个 y 值，由关系式 $f(x)$ 能唯一确定一个 x 值与之相对应，则得到一个定义在 Z 上的函数 $x=\varphi(y)$，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，$y=f(x)$ 又叫直接函数。

函数 $y=f(x)$ 的反函数常记为 $x=f^{-1}(y)$。

习惯上用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量。因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$。例如直接函数 $y=\frac{2x-1}{3}$ 的反函数为 $x=\frac{3y+1}{2}$，则改写成 $y=\frac{3x+1}{2}$。

在同一个平面直角坐标系中，同时画出函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象，可以证明，它们的图形是关于直线 $y=x$ 对称。

值得指出的是，有些函数对于 y 的某些值满足 $y=f(x)$ 这一等式的 x 值不止一个。如 $y=\sin x$ 当 $y=\frac{1}{2}$ 时，满足 $\sin x=\frac{1}{2}$ 的 x

值有无穷多个……，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$2\pi+\frac{\pi}{6}$……。这样的函数在定义其反函数时须限定 x 的取值范围，保证有唯一确定的 x 值与取定的 y 值相对应。如定义反三角函数时，就限定了 x 的取值范围。

§1.2 初等函数

一、基本初等函数

下面六种常见的函数称为基本初等函数。

(1) 常量 $y=c$（c 为常数）

它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，图形是平行于 x 轴截距为 c 的一条直线。

(2) 幂函数 $y=x^a$（a 为实数）

幂函数的定义域随 a 而异，但不论 a 为何值在 $(0, +\infty)$ 内总有定义，并且 $y=x^a$ 的图象都过 (1，1) 点。

(3) 指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$

指数函数 $y=a^x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$，当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时函数单调减少。指数函数的图象都通过 (0，1) 点。

(4) 对数函数 $y=\log_a^x$ $(a>0, a\neq1)$

对数函数 $y=\log_a^x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少。对数函数的图象都通过 (1，0) 点。

(5) 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 以 2π 为周期的周期函数。

正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 和余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 是以 π 为周期的周期

函数。$y=\mathrm{tg}x$ 在 $x=K\pi+\frac{\pi}{2}$ 处无意义，$y=\mathrm{ctg}x$ 在 $x=K\pi$ 处无意义（$K=0$，±1，$\pm2\cdots$）。

正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$。

（6）反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义域为 $[-1,\ 1]$，主值区间 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$。

反余弦函数 $y=\arccos x$ 定义域为 $[-1,\ 1]$，主值区间 $y\in[0,\ \pi]$。

反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$ 定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，主值区间 $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$。

反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$ 定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，主值区间为 $y\in(0,\ \pi)$。

二、复合函数

为了研究更一般的函数，我们给出复合函数的定义。

定义 1.3　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域或其中一部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 而成为 x 的函数，我们称这个函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$。其中 x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量。

例如，$y=f(u)=\sqrt{u}$，$u\in[0,\ +\infty)$ 而 $u=\varphi(x)=1-x^2$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，则 $y=f[\varphi(x)]=\sqrt{1-x^2}$ 是定义在 $[-1,\ 1]$ 上的复合函数。

复合函数还可以由更多个函数复合而成。例如，$y=2^u$，$u=v^3$，

$v=\sin t$，$t=2x$，复合而成 $y=2^{\sin^3 2x}$，u、v、t 为中间变量。

需要指出的是，并非任意两个函数都可以迭加成复合函数。如，$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$，在 $u=2+x^2$ 的定义域（$-\infty$，$+\infty$）内任何一个 x 值对应的 u 值，都使得函数 $y=\arcsin u$ 无意义。因此，它们不能迭加成一个复合函数。

为了便于对函数进行分析和研究，利用复合函数的概念，往往将一个较复杂的函数看做由若干个简单函数复合而成的。这里所说的简单函数，除了基本初等函数外，也包括多项式或有理式函数。

例 1，将下列函数迭加成复合函数

（1）$y=\sqrt{u}$，$u=\operatorname{tg}v$，$v=\frac{x}{2}$

（2）$y=u^3$，$u=\sin v$，$v=2x-1$

解：（1）u，v 为中间变量，复合函数为 $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

（2）u，v 为中间变量，复合函数为 $y=\sin^3(2x-1)$

例 2，下面函数是由哪些简单函数复合而成？并确定其定义域。

（1）$y=\sqrt{\lg(2x-1)}$　　（2）$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

解：(1) 复合函数 $y=\sqrt{\lg(2x-1)}$ 可以看成由 $y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=2x-1$ 三个简单函数复合而成。其定义域为：$\lg(2x-1)\geqslant 0$，即 $2x-1\geqslant 1$ 即 $x\geqslant 1$。

(2) 复合函数 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=\arcsin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 三个简单函数复合而成，其定义域为：$-1\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$ 且 $1-x^2\geqslant 0$，整理得：$-1\leqslant x\leqslant 1$。

三、初等函数

定义 1.4　由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次

的复合步骤而成的，并可用一个解析式表示的函数，称为初等函数。

例如，$y=\lg\sqrt{1+x}$，$y=\mathrm{arctg}(x^2+1)$ 等都是初等函数。

但是，$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots\cdots}}$ 以及

$$y=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$$ 等都不是初等函数。

§1.3 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，不能用一个数学解析式来表达。例如，

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x-2 & x<0 \end{cases}$$

象这样，用两个以上的解析式来表达的一个函数称做分段函数。用这种方法表示的函数在经济现象的讨论中有广泛的应用。

例 1，由甲地至乙地行李托运费规定如下，不超过 50 公斤时，每公斤收费 0.45 元，超过 50 公斤时，超重部分每公斤收费 0.75 元。写出行李重量 x 和费用 y 之间的函数关系。

解：用分段函数表示为：

$$y=\begin{cases} 0.45x & 0<x\leqslant 50 \\ 22.5+0.75(x-50) & 50<x \end{cases}$$

分段函数是用几个解析式合起来表示的一个函数，它的定义域是各段自变量 x 取值范围的并集。求函数值时，要依据自变量的不同取值范围选用不同的对应法则。在研究分段函数性质时，通常要对分段点进行讨论。

例 2　已知

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

试求 $f(1)$，$f(2)$，$f(-1)$ 的值，画出函数 $f(x)$ 的图象并指出函数的定义域。

解：$x=1$，$x=2$ 时，用 $f(x)=x^2$ 计算得，$f(1)=1^2=1$

$f(2)=2^2=4$。

$x=-1$ 时用 $f(x)=-x$ 计算得，$f(-1)=-(-1)=1$。

定义域为 $(-\infty, 2)$ 图象如图 1—1。

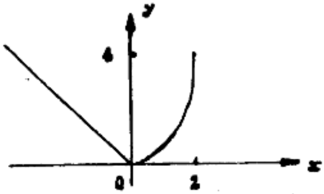


图 1—1

例 3　已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^2 & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$$

求　$f(x-1)$

解：

$$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)+2 & 0\leqslant x-1\leqslant 2 \\ (x-1)^2 & 2<x-1\leqslant 4 \end{cases}$$ 整理得：

$$f(x-1)=\begin{cases} x+1 & 1\leqslant x\leqslant 3 \\ (x-1)^2 & 3<x\leqslant 5 \end{cases}$$

例 4　用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$ 并作出该函数的图象。

解：　根据绝对值定义可知：

当 $x-1<0$ 即 $x<1$ 时，

$|x-1|=-(x-1)$

当 $x-1\geqslant 0$ 即 $x\geqslant 1$ 时，

$|x-1|=x-1$

于是有 $y=\begin{cases} 3+(x-1) & x<1 \\ 3-(x-1) & x\geqslant 1 \end{cases}$

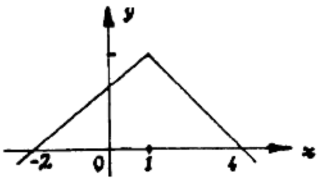


图 1—2

即 $y=\begin{cases}2+x & x<1\\ 4-x & x\geq 1\end{cases}$

其图形如图 1—2。

§1.4 一些经济现象的数学表示

在社会经济现象中，存在诸多变量，如价格、利润、收入、成本、投资等等。一个经济问题如此复杂，它往往和多种因素有关，而且其中一些因素具有不确定性或难以用数量予以表示，显然，掌握大量经济活动的内在联系，加以研究寻求规律是一个相当繁复的工作。

对于一个经济现象，当我们用抽象的方法来研究它的数量关系时，首先要在分析的基础上，从实际出发进行调查，找出影响该问题的主要因素，将那些次要因素或略去不计，或假定为一个常数，从而得出一个简化的分析结构。采用这种蓄意简化的理论，其目的是一开始就把研究问题的侧重点集中到问题的主要因素上，较快地了解实际经济现象的大致轮廓，也便于对所研究的问题继续进行理论上的分析。

象这样，对经济关系进行研究时，只注重影响该问题的主要因素和关系，而得出的简化的分析结构称为经济模型。在这里我们只讨论经济模型的数学表示，即用字母、数字及其它数学符号把所研究的经济变量建立起一组有解的方程式或不等式来描写模型的结构。然后通过有关的数学运算推导出一系列结论，从而进一步认识所研究问题反映的社会经济现象，并且给出适当的经济解释。

一、需求函数

在经济理论中需求关系相当重要。当消费者需要某种商品，在一定的价格下又有购买这种商品的支付能力，就产生了对该商品

的需求量。

需求量是指在一定的价格下，社会对某产品的购买量或总需要量。需求量受多种因素影响，如该商品的价格，相关商品的价格，需要该商品的人数以及消费者的收入水平，消费者的爱好（爱好这样的因素无法准确定量表示）等。

但商品价格的变化，是影响需求量的主要因素。因此，可把需求量简化成价格的函数。

设 P 表示某商品的价格，Q 表示该商品的需求量，需求函数为 Q=f（P）。

一般情况下，需求量随着价格的升高而不断减少，需求是价格的递减函数。但是也有例外，如古董、名画、珍贵邮票等，其价格和它们的珍贵性联系在一起，价格越高，反而使需求量增大。这里所讨论的需求函数，是一般情形下的需求和价格的关系，若建立平面直角坐标系，需求函数是一条递减曲线。

例 1，某种牌号的手表，售价为 60 元时，年销售量 1 万只，若手表价格每提高 3 元，需求量就减少 1200 只，写出需求函数。

解： 由题意可知，需求量的减少数与售价的提高成比例，由此分析可得手表需求量 Q 与售价 P 的关系为：

$$Q=10000+\frac{60-P}{3}\times1200=400\ (85-P)$$

二、供给函数

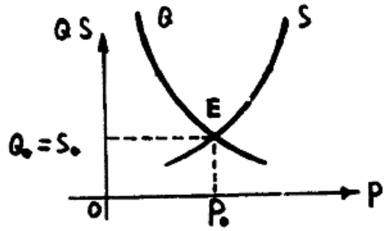


图 1—3

供给量是指在一定价格条件下，生产者能够提供的商品量。它的简化模型是，设生产者在一定的价格条件下愿意并可能出售的产品数量为 S，生产