Wei fen ji he dao yin

黄正中 编著

微分几何导引

南京大学出版社

庆贺南京大学建校九十周年

微分几何导引

黄正中　编著

南京大学出版社
1992·南京

(苏)新登字第011号

内容简介

本书系以作者在南京大学多次授课讲稿为基础，屡经修订扩充而成。内容分十章，合计约56万字。系从多重线性代数讲起，逐步引入微分流形，微分流形上的微积分，李群的基本知识，主丛，仿射连络，黎曼流形，复流形，最后介绍层论和Hodge分解定理，藉以证明著名的De Rham定理，和确定Beltrami-Laplace算子的谱。所论述的都是现代微分几何中最基本的问题，目的在于读者掌握之后，有能力阅读现代微分几何的文献。本书可作为基础数学专业研究生的教材，也可作为大学本科数学专业教师和高年级学生参考之用。

微分几何导引
黄正中 编著

南京大学出版社出版
(南京大学校内)
江苏省新华书店发行　常熟市印刷二厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：21.75　字数：562千
1992年3月第1版　1992年3月第1次印刷
印数：1—2000
ISBN 7-305-01237-8

O·66　定价：9.85元
责任编辑：新　平

序

微分几何是一门极饶兴趣的数学．它的本质是用分析手段来描绘几何不变量．一方面，它既为分析拓广了问题的泉源，又为某些分析上的定理提供了具体形象；另一面，随着分析方法的发展，微分几何内容也愈来愈充实和深刻．自 17 世纪微积分出现之后，大数学家 Euler，Laplace，Monge，Gauss，Riemann 都为这门学科作过奠基性的工作．到 19 世纪中叶，随着内容的充实，迫使微分几何成为数学的一个重要分支．由于 W．Blaschke，E．Cartan 等大师的贡献，微分几何中使用的分析手段已包括微分方程，李群，变分学，泛函分析，代数拓扑，复变函数论等等．学者穷尽毕生精力，能窥其全部秘奥者，在全球范围内已寥寥无几．近年来，数学物理中广泛应用微分几何知识，规范场论反过来又为微分几何服务．Donaldson，Freedman，Uhlenbeck 的工作都够令人耳目一新，诚非始料所及．所以尽管微分几何已有几百年历史，它仍生机勃勃，含葩待放．

作者从事微分几何的学习，始于 30 年代，适逢连年战乱．生活上颠沛流离，居无定所．真正系统学习，实为 1949 年建国以后．岁月如流，韶华易逝，弹指间须发皆白，垂垂老矣．40 年来，总感未学到的内容浩如烟海，心有余而力不足．不少基本问题不弄清楚，则后续部分犹如水上浮萍，空中楼阁．但要彻底了解，又不是短期内所能济事．因此趁退休之闲，将历年对研究生授课讲稿，重新整理成册，希望就教于海内；另一方面，希望后来人少走弯路，有助于本学科在我国的发展，此乃出版本书的目的．

本书第一章介绍所用的代数知识，系假定读者已掌握大学本

科的线性代数．第二章为微分流形的基本知识，要求读者学过尺度空间的点集拓扑学和高等微积分．第三章外微分是在前两章的基础上介绍 É.Cartan 的外微分法．这方法是本书中常用的工具．第四章介绍李群的基本知识，顾名思义，阅读时需要一般的群知识和微分流形上的微积分．没有李群的知识，所谓运动群，主丛，和群空间的几何学均无从谈起．第五章引入连络空间的一般知识，最后用 Ambrose-Singer 定理说明和乐群与曲率的关系．第六章介绍黎曼几何的基本知识，其中讨论的问题是带根本性的．第七章介绍复流形上的几何学．如所熟知，多元复变函数和复流形的研究为当代的热门，其核心手段就是几何方法。第八章介绍 Jacobi 场的理论，藉以引进有关共轭点的 Morse 理论．在整体微分几何中，de Rham 定理和 Hodge 分解定理是极端重要的，然而证明却非常之难，难在用到的预备知识不是一般微分几何学者所能掌握的．为了弥补这个缺陷，本书第九章专门介绍层论，藉以用 H.Cartan 的方法证明 de Rham 定理，而不必假定牵涉的微分流形是紧致的．本书第十章介绍 Hodge 分解定理的证明，最后以 Laplace-Beltrami 算子的谱作为终结．这两章几乎全部采用 F.W.Warner 的 Foundation of Differentiable Manifold and Lie Groups(1983)的处理方式．在此谨向 Warner 教授衷心感谢．

正如本书所用书名所云，它只能作为学习微分几何的导引，为阅读现代文献铺平道路．若欲对各个专题展开研究，还要针对课题阅读专门文献．无所不包的微分几何教材是不存在的，也是没有必要的．

编写本书时采用的参考资料甚多．为节省篇幅和防止挂一漏万，未在用到处分别指出，只在本书末尾开列主要参考书目．

本书插图系蒙南京大学罗亚平同志在百忙中抽出时间代为绘制，谨此致谢．如所熟知，数学书内符号奇形怪状，五花八门，毫末之差，谬以千里，排印校对时，需要特别细心．承南京大学出版社

与印刷厂不辞辛苦，与作者合作，多方迁就，使本书尽快面世，作者谨此衷心感谢．

如所熟知，目前出版学术著作，还存在不少困难．本书出版得力于南京大学郑维行，陈载璋两教授鼎力支持，自始至终关心备至．作者将终生铭感。

由于作者学识肤浅，整理时又值年逾古稀，精力衰退，反应迟钝，两目昏花；本书付印之前，虽经多次批阅，历时五年，疵谬之处仍可能出现．敬希海内专家硕学之士不吝指正是幸．

黄正中

1990年12月于南京大学

目　录

第一章　代数预备知识

§1.1　张量代数

设 F 为一数域(实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$)，V 为数域 F 上一个 n 维矢量空间．映射 $f: V \to F$ 为一线性泛函，即对任何 $v_1, v_2 \in V$ 和任何 $\alpha, \beta \in F$，等式

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$$

恒成立．V 上一切具有这种性质的线性泛函的集合记作 V^*，称为 V 的对偶空间．在 V^* 上也可定义加法以及和 F 中数的乘法：对任何 $f, g \in V^*$，任何 $v \in V$ 与任何 $\alpha \in F$，恒有

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v),$$
$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v).$$

于是 V^* 变成数域 F 上的一个矢量空间(也称为线性空间)．

命 $[e_1, e_2, \cdots, e_n]$ 表示矢量空间 V 的一个基．显然 V 上一个线性泛函 f 可由它在 $e_1, \cdots, e_n$ 上的值完全决定．例如对任何

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \qquad (v^i \in F)$$

有

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i f(e_i).$$

假若我们定义 V^* 中 n 个元素 $f^1, f^2, \cdots, f^n$，使

$$f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j, \\ 0, & \text{当 } i \neq j, \end{cases}$$

这里 $i, j=1, 2, \cdots, n$. 于是 $f^1, f^2, \cdots, f^n$ 是线性独立的. 事实上,若在 F 中存在 n 个数 $l_1, l_2, \cdots, l_n$

使
$$l_1 f^1 + l_2 f^2 + \cdots + l_n f^n = 0,$$

自然等式
$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} l_j f^j\right)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} l_j f^j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} l_j \delta_i{}^j = l_i,$$

对每一个 $i=1, 2, \cdots, n$ 成立. 另一面,任意取 $f \in V^*$, 命 $f(e_i) = a_i$, 则

$$\left(f - \sum_{i=1}^{n} a_i f^i\right)(e_j) = f(e_j) - \sum_{i=1}^{n} a_i f^i(e_j) = a_j - a_j = 0,$$

其中 $j=1, 2, \cdots, n$. 从而 $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i$. 这说明 $f^1, f^2, \cdots, f^n$ 是空间 V^* 的一个基, 从而 $\dim V^* = n$. 由于 $f^i(e_j) = \delta_j{}^i$, 我们称 $[f^1, f^2, \cdots, f^n]$ 是 $[e_1, \cdots, e_n]$ 的对偶基(dual base). 记住它们分别为 V^* 和 V 的基.

既然 V^*是 F 上一个矢量空间, V^* 的对偶空间$(V^*)^*$应该仍是 F 上一个 n 维线性空间. 我们要在 V 和$(V^*)^*$之间建立一个同构关系. 将 $v \in V$ 对应于$(V^*)^*$中一个元素 v^{**},其定义是:对任何 $f \in V^*$ 有
$$v^{**}(f) = f(v) \in F.$$
这样定义的 v^{**} 确是 V^* 上的一个线性泛函. 对应 ϕ: $v \longmapsto v^{**}$ 是一个单射. 事实上, 若 $v_1 \longmapsto v_1{}^{**}$, $v_2 \longmapsto v_2{}^{**}$ 有 $v_1{}^{**} = v_2{}^{**}$, 则对任何 $f \in V^*$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= v_1{}^{**}(f) - v_2{}^{**}(f) \\ &= f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2). \end{aligned}$$

命 $v_1 - v_2 = \sum_{i=1}^{n} l_i e_i$, 取底矢量 $f^j \in V^*$, 要求 $[f^1, \cdots, f^n]$ 为$[e_1, e_2, \cdots, e_n]$的对偶基. 则

$$0 = f^j\left(\sum_{i=1}^{n} l_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} l_i f^j(e_i) = l_j,$$

其中 $j=1, 2, \cdots, n$, 从而 $v_1 - v_2 = 0$. 这就肯定了映射 ϕ 是单射. 可是 $\dim V^{**} = n = \dim V$, 因此,映射 ϕ 必为满射, 从而 ϕ 在 V 与

V^{**}之间建立一个同构对应. 我们不妨就此把 V 与 V^{**} 等同起来，从而 V 也是 V^* 的对偶空间. 这样的约定将给后面的论述带来许多方便. 当 $v \in V, f \in V^*$，数 $f(v)$ 也常写作$\langle f, v\rangle$，并称算符$\langle , \rangle$为 V 与 V^*的配对(pairing). 采用这种写法，更能体现两个矢量空间 V 和 V^* 的对偶性。

下面引进多重线性映射的概念. 若 $V_1, V_2, \cdots, V_r$, Z 为 F 上 $r+1$ 个有限维线性空间，我们说泛函 f: $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \longrightarrow Z$ 是 r 重线性的，意味着，任意取 $v_i \in V_i (i = 1, 2, \cdots, r)$，函数关系

$$f(v_1, v_2, \cdots, v_r) \in Z.$$

对每一个变量 $v_i (i = 1, 2, \cdots, r)$ 都是线性的.

一切这样的线性映射的集合记作

$$\mathscr{L}(V_1, V_2, \cdots, V_r; Z).$$

当然$\mathscr{L}(V_1, V_2, \cdots, V_r; Z)$也可看作是数域 F 上的一个线性空间. 特别在 $Z = F$(1 维线性空间)时，我们称上面定义的 f 为多重线性函数.

若 $\dim V_i = n_i (i = 1, 2, \cdots, r)$，取$V_i$的一个基$[e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{in_i}]$，在 $\mathscr{L}(V_1, V_2, \cdots V_r; F)$ 中取元素

$$f_{j_1 j_2 \cdots j_r} \qquad (j_i = 1, 2, \cdots, n_i; 1 \leqslant i \leqslant r),$$

其定义为 $f_{j_1 j_2 \cdots j_r}(e_{1i_1}, e_{2i_2}, \cdots, e_{ri_r}) = \delta_{i_1}{}^{j_1}\delta_{i_2}{}^{j_2}\cdots\delta_{i_r}{}^{j_r}$，则不难验证：

$$[f_{j_1 j_2 \cdots j_r} \mid 1 \leqslant j_i \leqslant n_i, \ 1 \leqslant i \leqslant r]$$

构成线性空间$\mathscr{L}(V_1, V_2, \cdots, V_r; F)$的一个基. 所以

$$\begin{aligned}&\dim \mathscr{L}(V_1, V_2, \cdots, V_r; F)\\&\quad = n_1 n_2 \cdots n_r = (\dim V_1)(\dim V_2)\cdots(\dim V_r).\end{aligned}$$

一、张量积的定义

现在以多重线性映射为基础，我们来建立张量积的定义. 设数域 F 上有两个线性空间 U 和 V，其维数顺次为 m, n，我们说数域 F 上一个线性空间 T 连同一个双线性映射 θ: $U \times V \longrightarrow T$, $(u, v) \longmapsto \theta(u, v) \in T$ 定义 U 和 V 的张量积，只要满足下面两个

条件：

(i) $\{\theta(u,v)\,|\,u\in U, v\in V\}$张成 T，

(ii) 任取一个线性空间 W 和 $U\times V$ 到 W 内的线性映射ψ：$U\times V\longrightarrow W$，总存在一个线性映射 λ：$T\longrightarrow W$ 使 $\psi=\lambda\circ\theta$，即有交换图：

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T \arrow[d, "\lambda"] \\ & W \end{tikzcd}$$

采用这样的定义，首要问题是：线性空间 T 是否存在和唯一？我们先来解决唯一性问题，然后给出 T 的作法，从而肯定其存在.

定理 1　若(θ,T)定义数域 F 上两个线性空间 U 和 V 的张量积，φ：$U\times V\longrightarrow W$ 是一个双线性映射，则变换 λ：$T\longrightarrow W$ 是由 φ 而唯一确定.

证　若 λ_1：$T\longrightarrow W$ 与 λ_2：$T\longrightarrow W$ 是两个线性映射，都使

$$\lambda_1\circ\theta=\varphi,\quad \lambda_2\circ\theta=\varphi,$$

则
$$(\lambda_1-\lambda_2)\circ\theta(U\times V)=0.$$

由于 $\theta(U\times V)$张成 T，故有$(\lambda_1-\lambda_2)T=0$，从而 $\lambda_1=\lambda_2$.　　注意 $\varphi\longmapsto\lambda$ 是$\mathscr{L}(U,V;W)\longrightarrow\mathscr{L}(T;W)$的一个映射，上面已经肯定这个映射是唯一确定的(只要 T 唯一存在). 显然，有了 λ 之后，必能作出 $\varphi=\lambda\circ\theta$，所以这个映射是满的. $\varphi\rightarrow\lambda$ 也必然是单映射. 因此在$\mathscr{L}(U,V;W)$与$\mathscr{L}(T;W)$之间有一个同构关系，

定理 2　若(θ,T)和(θ',T')均为两个线性空间 U 与 V 的张量积，则在两个线性空间 T 和 T' 之间有一个同构关系.

证　根据这定理的假定，我们有两个线性映射

$$\sigma\in\mathscr{L}(T;T')\ \text{和}\ \sigma'\in\mathscr{L}(T';T)$$

和两个交换图：

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & T \arrow[d, "\sigma"] \\ & T' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\theta'"] \arrow[dr, "\theta"'] & T' \arrow[d, "\sigma'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

也就是 $\theta'=\sigma\circ\theta$，$\theta=\sigma'\circ\theta'$，

从而 $\theta=\sigma'\circ\sigma\circ\theta$ （在 $U\times V$ 上）.

但 $\theta=id\circ\theta$ （在 $U\times V$ 上），

依定理 1 有 $\sigma'\circ\sigma=id$. 对换 T 和 T' 的位置，应得到类似的关系 $\sigma\circ\sigma'=id$. 所以 $\sigma: T\to T'$ 是双向一对一的，又是线性的，故 T 与 T' 同构.

这条定理说明：只要 U 和 V 的张量积 T 存在，它本质上是唯一的，因此，问题归结到如何构造 T.

设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为矢量空间 U 的一个基，$[b_1,b_2,\cdots,b_m]$ 为矢量空间 V 的一个基. U^* 和 V^* 分别表示 U 和 V 的对偶空间. 任取 $f\in U^*$，$g\in V^*$，在 $U^*\times V^*$ 上定义一个双线性函数 $u\otimes v$，其中 $u\in U$，$v\in V$，使 $(u\otimes v)(f,g)=f(u)\cdot g(v)$. 从这个式子一望而知 $u\otimes v$ 对 f,g 是双线性的，即 $u\otimes v\in\mathscr{L}(U^*,V^*;F)$. 在限制 $u\in U$，$v\in V$ 之下，一切这样的 $u\otimes v$ 张成 F 上一个线性空间 T. 自然 $T\subset\mathscr{L}(U^*,V^*;F)$，现在假定

$$u=\sum_{i=1}^{n}u^i a_i,\quad v=\sum_{\alpha=1}^{m}v^\alpha b_\alpha \quad (u^i,v^\alpha\in F).$$

对任何 $f\in U^*$，$g\in V^*$，有

$$\begin{aligned}(u\otimes v)(f,g)&=f(u)\cdot g(v)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m}u^i v^\alpha f(a_i)g(b_\alpha)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m}u^i v^\alpha (a_i\otimes b_\alpha)(f,g).\end{aligned}$$

这里第一个等号是根据 $u\otimes v$ 的定义，第二个等号是因 f,g 均为线性函数，第三个等号是再次引用 $u\otimes v$ 的定义. 因 f,g 顺次为

U^*, V^* 中任意两个元素，依定义

$$u \otimes v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} u^i v^\alpha a_i \otimes b_\alpha.$$

所以线性空间 T 也是由 $m \times n$ 个元素 $\{a_i \otimes b_\alpha\}$ ($1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant m$)张成的．找到空间 T 之后，我们来定义 $U \times V \to T$ 的线性映射 θ：

对任何 $u \in U, v \in V$ 有 $\theta(u, v) = u \otimes v$.

从上面的式子立即看出 θ 对 $u \in U$ 和 $v \in V$ 是双线性的．再任取一个线性空间 Z，假定 $\varphi \in \mathscr{L}(U, V; Z)$，又定义一个线性映射 $\lambda \in \mathscr{L}(T, Z)$，要求

$$\lambda(a_i \otimes b_\alpha) = \varphi(a_i, b_\alpha).$$

这样确定 θ 和 λ 之后，我们有

$$\begin{aligned} \lambda \circ \theta(u, v) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} u^i v^\alpha \lambda \circ \theta(a_i, b_\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} u^i v^\alpha \lambda(a_i \otimes b_\alpha), \end{aligned}$$

其中第一个等号是由于 λ, θ 的线性，第二个等号是用了 θ 的定义．再利用 λ 的定义和 φ 的双线性，便得到

$$\lambda \circ \theta(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} u^i v^\alpha \varphi(a_i, b_\alpha) = \varphi(u, v).$$

因 $\lambda \circ \theta(u, v) = \varphi(u, v)$ 对任何 $u \in U, v \in V$ 成立，所以 $\lambda \circ \theta = \varphi$. 这就肯定了空间 T 确符合 U 与 V 的张量积定义．张量积 T 的构造到此完毕．

上面证明了 U 与 V 的张量积存在，而且本质是唯一的．我们将它记作 $U \otimes V$. 唯须注意 $U \otimes V$ 不仅包含状如 $u \otimes v (u \in U, v \in V)$ 的元素，而且包含这些元素的有限次线性结合．换句话说，它是一切 $u \otimes v$ 张成的空间．

上面的讨论可总结为

定理 3 数域 F 上两个矢量空间 U 和 V 的张量积确实存在，

并在同构的意义下，它也是唯一的.

若在 U 的对偶空间内 $[f^1, f^2, \cdots, f^m]$ 为与 $[a_1, a_2, \cdots, a_m]$ 对偶的基；同样，$[g^1, g^2, \cdots, g^n]$ 为在 V^* 中与 $[b_1, b_2, \cdots, b_n]$ 对偶的基，则依定义

$$(a_i \otimes b_\alpha)(f^j, g^\beta) = f^j(a_i) g^\beta(b_\alpha) = \delta_i{}^j \delta_\alpha{}^\beta.$$

由此推知 $m \times n$ 个元素 $a_i \otimes b_\alpha$ 是线性独立的. 上面已肯定 $U \otimes V$ 是这些元素张成的，所以它们构成 $U \otimes V$ 的一个基，$\dim(U \otimes V) = mn$. 可是

$$T = U \otimes V \subset \mathscr{L}(U^*, V^*; F), \dim \mathscr{L}(U^*, V^*; F) = mn.$$

自然可以得出结论：$U \otimes V = \mathscr{L}(U^*, V^*; F)$. 取其对偶，自然有 $U^* \otimes V^* = \mathscr{L}(U, V; F)$. 就是说，$U^* \otimes V^*$ 中每一元素对应于 $U \otimes V$ 到 F 中一个线性映射，即对应于其对偶空间 $(U \otimes V)^*$ 中一个元素. 这个映射是单射，可是

$$\dim(U \otimes V)^* = \dim(U \otimes V) = \dim(U^* \otimes V^*)$$

故
$$U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*,$$

这里"$\cong$"表示同构.

由于上述同构关系，任取 $f \in U^*$, $g \in V^*$, $u \in U$, $v \in V$，我们不妨把 $f \otimes g$ 作为 $U \otimes V$ 上的线性泛函，其定义为 $(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \cdot g(v) \in F$. 引用前面引入的配对符号 $\langle , \rangle$，应有

$$\langle a_i \otimes b_\alpha, f^j \otimes g^\beta \rangle = f^j(a_i) \cdot g^\beta(b_\alpha) = \delta_i{}^j \cdot \delta_\alpha{}^\beta.$$

现在 $(U \otimes V)^*$ 中任何一个元素可表示为

$$f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} f_{j\beta} f^j \otimes g^\beta,$$

其中 $f_{i\alpha} = f(a_i \otimes b_\alpha) = \langle f, a_i \otimes b_\alpha \rangle$.

张量积的概念可以延伸到多重线性映射构成的空间 $\mathscr{L}(U, V, \cdots, W; F)$ 上. 例如 $f \in \mathscr{L}(V_1, \cdots, V_r; F)$，$g \in \mathscr{L}(W_1, \cdots, W_s; F)$，则 $f \otimes g$ 作用在 $V_1 \times \cdots \times V_r \times W_1 \times \cdots \times W_s$ 上，其定义为：对任何 $v_i \in V_i$, $w_j \in W_j$ $(1 \leqslant i \leqslant r; 1 \leqslant j \leqslant s)$ 有

$$f \otimes g(v_1, \cdots, v_r; w_1, \cdots, w_s) = f(v_1, \cdots, v_r) g(w_1, \cdots, w_s).$$