复变函数题解

复变函数题解

（根据余家荣编《复变函数》1979年版）

《复变函数题解》编写小组

一九八〇年元月

编者的话

为了适应教学需要，我们对余家荣编《复变函数》书中的全部习题，作出了解答，汇编成了这本《复变函数题解》。

《题解》由华中工学院黄先春和武汉师范学院尹传铴两位老师执笔，华中工学院林化夷、武汉大学林玉波、武汉师范学院余家佩、朱忠仁等四位老师进行审阅。

我们的编写工作，得到了余家荣教授的热情关心和指导。对此，我们表示衷心的感谢。在编写过程中，我们还参考了上海师范大学、上海师范学院、南京师范学院、华中师范学院等兄弟院校的有关资料。在此，我们也同样表示感谢。

由于时间紧促，水平有限，因此书中解法会有不妥之处；错误也在所难免。敬请读者批评指正。

《复变函数题解》编写小组

1979.12.

目　录

第一章　复数及平面点集

1．计算：

（1）$(1+i)\pm(1-2i)$（并作图）；

（2）$\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$；

（3）$\sqrt{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

其中：$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha=\operatorname{arc\,tg}2$，$\beta=\operatorname{arc\,tg}3$。

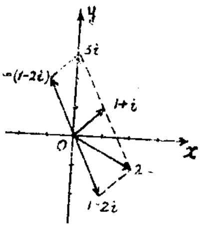
解：（1）$(1+i)+(1-2i)=2-i$；

$(1+i)-(1-2i)=3i$（图1.1）。

（2）$\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}=\dfrac{-i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

$=\dfrac{-i(1+i)(2+i)(3+i)}{(1+1)(2^2+1)(3^2+1)}$

$=\dfrac{-10i^2}{100}=\dfrac{1}{10}$．



（图1.1）

（3）$\because$　$\operatorname{tg}\alpha=2$，$\operatorname{tg}\beta=3$；

$\therefore$　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2+3}{1-2\cdot3}=-1$．

又　$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$　　$\therefore$　　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{4}\pi$．从而

$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

故　原式$=\sqrt{2}[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]=-1+i$．

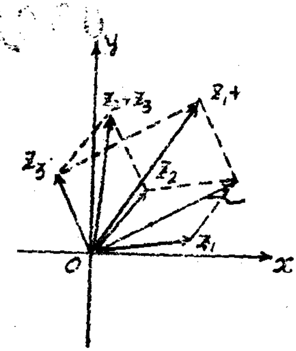
2．证明：

（1）$z_1+(z_2+z_3)$

$=(z_1+z_2)+z_3$（并作图）；

（2）$z_1(z_2+z_3)$

$=z_1z_2+z_1z_3$。



（图1.2）

证：（1）设

$z_k=x_k+iy_k\ (k=1,2,3)$.

$$\begin{aligned}\text{左端}&=(x_1+iy_1)+[(x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)]\\&=(x_1+iy_1)+[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)]\\&=[x_1+(x_2+x_3)]+i[y_1+(y_2+y_3)]\\&=[(x_1+x_2)+x_3]+i[(y_1+y_2)+y_3]\\&=[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]+(x_3+iy_3)\\&=(z_1+z_2)+z_3.\end{aligned}$$

所以原等式成立（图1.2）．

（2）假设同（1）．

$$\begin{aligned}\text{左端}&=(x_1+iy_1)[(x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)]\\&=(x_1+iy_1)[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)]\\&=[x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)]+i[x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)]\\&=[(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3)]+\\&\quad+i[(x_1y_2+y_1x_2)+(x_1y_3+y_1x_3)]\\&=[(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)]+\\&\quad+[(x_1x_3-y_1y_3)+i(x_1y_3+y_1x_3)]\\&=z_1z_2+z_1z_3\end{aligned}$$

所以原等式成立。

证明：（i）当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，复数 z 为实数。

）设 z_1 及 z_2 是两复数，如果 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是实

z_1 和 z_2 或者都是实数，或者是一对共轭复数。

（1）设 $z=x+iy$ 则 $\bar{z}=x-iy$

若 $z=\bar{z}$ 则 $x+iy=x-iy$

故有 $y=-y$ 即 $y=0$， $\therefore z$ 为实数。

反之，若 z 为实数，则 $y=0$，故有 $z=\bar{z}$。

2）设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$。

若 z_1z_2 和 z_1+z_2 都是实数，则有

$$x_1y_2+x_2y_1=0 \quad 及\ y_1+y_2=0 \qquad (1)$$

当 $y_1=0$ 时，那么 $y_2=0$，故 z_1, z_2 都是实数；

当 $y_1\neq 0$ 时，则由（1）可得 $x_1=x_2$；$-y_1=y_2$，

$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_1-iy_1$。

故 z_1，z_2 为一对共轭复数。

求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部。

解：设 $z=x+iy$，

$$则\quad \frac{z-1}{z+1}=\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}=\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\frac{z-1}{z+1}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},\ \mathrm{Im}\frac{z-1}{z+1}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

5．设 z_1 及 z_2 是两复数，求证：

（1）$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$；

（2）$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$；

（3）$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$、并

其几何意义。

证：（1）$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$$=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$

$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-(\overline{z_1\bar{z}_2}+z_1\bar{z}_2)$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

（2）由（1）题知：

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

又$||z_1|-|z_2||^2=|z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||\bar{z}_2|$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\bar{z}_2|。$$

$\because\quad |z_1\bar{z}_2|\geqslant\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$

$\therefore\ |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\geqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\bar{z}_2|。$

即：$|z_1-z_2|^2\geqslant||z_1|-|z_2||^2$。

两边开平方得；$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$。

（3）$\because\quad |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$，

$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$，

两式相加得：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$。

其几何意义是：平行四边形两对角线长的平方和等于两邻边平方和的两倍。

6．设$z=x+iy$，证明：$\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$。

证：∵ $|z|=\sqrt{|x|^2+|y|^2}\leqslant\sqrt{(|x|+|y|)^2}$

$=|x|+|y|$，

$2|xy|\leqslant|x|^2+|y|^2$。

$\therefore 2|z|^2=2(\sqrt{|x|^2+|y|^2})^2=2(|x|^2+|y|^2)$

$\geqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$，

两边开平方并除以$\sqrt{2}$得：$|z|\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)$，

$$\therefore \quad \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|。$$

7. 试证：分别以 z_1,z_2,z_3，及 w_1,w_2,w_3 为顶点的两个三角形同向相似的必要与充分条件是：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=0$$

证：由复数的几何意义及平面几何学中关于相似三角形的判定定理和性质定理，可知这两个三角形同向相似的必要与充分条件是：

$$\frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}=\frac{|w_3-w_1|}{|w_2-w_1|}$$

$$\arg(z_3-z_1)-\arg(z_2-z_1)$$

$$=\arg(w_3-w_1)-\arg(w_2-w_1)$$

也就是：$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$ (*)

又由 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1\\ w_1 & w_2-w_1 & w_3-w_1\end{vmatrix}=$

$$=(z_2-z_1)(w_3-w_1)-(z_3-z_1)(w_2-w_1).$$

及(*)式与 $(z_2-z_1)(w_3-w_1)-(z_3-z_1)(w_2-w_1)=0$ 等价，知(*)式与

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=0$$

等价。故得题中的结论。

8．如果 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且 $z_1+z_2+z_3=0$，证明 z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的一个正三角形的顶点。

证法一：设 $z_k=x_k+iy_k(k=1,2,3)$，由已知条件可知：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ y_1+y_2+y_3=0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x_1{}^2+y_1{}^2=1 & (2) \\ x_2{}^2+y_2{}^2=1 & (3) \\ x_3{}^2+y_3{}^2=1 & (4) \end{cases}$$

由(1)解出 x_1, y_1 代入(2)得：$2x_2x_3+2y_2y_3=1$，(5)

$-1\times(5)+(3)+(4)$ 得：$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=3$，

即：$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$.

同理可得：$|z_1-z_3|=|z_1-z_2|=\sqrt{3}$，故 z_1,z_2,z

正三角形的顶点。

又由已知条件知：z_1,z_2,z_3 都是单位圆上的点，故 z_1，z_2 和 z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

证法二：

由 $z_1+z_2+z_3=0$，得 $z_3=-(z_1+z_2)$.

取共轭复数 $\bar{z}_3=-(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$，

$$\therefore\quad z_3\bar{z}_3=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$$

又 $|z_1|^2=|z_2|^2=|z_3|^2=1$，

∴ $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=-1$,

∴ $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$=|z_1|^2+|z_2|^2-(\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2)=1+1-(-1)=3$,

故 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$.

同理可证：$|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=\sqrt{3}$

∴ z_1，z_2 和 z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

证法三：

考虑方程 $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=0$，显然它的三个根就是 z_1，z_2，z_3。

设多项式

$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\equiv z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$,

比较系数得：$a_1=z_1+z_2+z_3=0$,

∵ $|z_k|=1$，∴ $z_k^{-1}=\bar{z}_k$ $(k=1, 2, 3)$,

∴ $a_2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1z_2z_3(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3)$

$=0$.

因此所考虑的方程变为：$z^3+a_3=0$　　(1)

由于 $z_1^3+a_3=0$ 知 $|a_3|=|-z_1^3|=1$,

因此（1）的三个根 z_1，z_2，z_3 满足关系式：

$cz_1=z_2$，$c^2z_1=z_3$.

其中 $c=\cos 120°+i\sin 120°$.

从而 z_1，z_2 和 z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

9．求证：$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

证：左端$=(2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})^n$

$$=\left[2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)=\text{右端。}$$

10．解方程：$z^2-3iz-(3-i)=0$。

解法一：由求根公式得：$z=\dfrac{3i+\sqrt{3-4i}}{2}$，　（1）

令$\sqrt{3-4i}=a+bi$，则$3-4i=a^2-b^2+2abi$。

比较系数得：$\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=-4.\end{cases}$

解方程组得．$a=\pm2$，$b=\pm1$

因此：$\sqrt{3-4i}=\pm(-2+i)$，代入（1）得：

$$z_1=\frac{3i+(-2+i)}{2}=-1+2i,$$

$$z_2=\frac{3i-(-2+i)}{2}=1+i.$$

解法二：由求根公式得：$z=\dfrac{3i+\sqrt{3-4i}}{2}$．

设$3-4i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$r=5$，$\mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{-4}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$（$\theta$是第四象限角）

所以，$\sqrt{3-4i}=5^{\frac{1}{2}}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{2}+i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{2})$

$(k=0,\ 1)$。

当$k=0$时

$$\sqrt{3-4i}=5^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$$

$$=5^{\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)$$

$$=5^{\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}\right)$$

$$=5^{\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}+i\sqrt{\frac{1}{5}}\right)=-2+i。$$

当 $k=1$ 时，

$$\sqrt{3-4i}=5^{\frac{1}{2}}\left[\cos(\frac{\theta}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)\right]$$

$$=-5^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]=2-i。$$

故方程组的解为：

$z_1=-1+2i$，$z_2=1+i$。

11．求：$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ 的三次方根。

解：∵ $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}$$

$(k=0, 1, 2)$

所求的三次方根为：

$$w_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12},$$

$$w_2=\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_3=\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi.$$

12．设 $|z_0|<1$，证明：

如果 $|z|=1$，那么 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=1$；

如果 $|z|<1$，那么 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|<1$.

证：若 $|z|=1$，则有：

$$|z-z_0|=|z||z-z_0|=|z||\bar{z}-\bar{z}_0|$$

$$=|z\bar{z}-z\bar{z}_0|=|1-z\bar{z}_0|$$

$$\therefore\left|\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|=1.$$

若 $|z|<1$，则 $|z|^2(1-|z_0|^2)<1-|z_0|^2$.

$\therefore$ $|z|^2+|z_0|^2<1+|z|^2|z_0|^2$，

$$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)$$

$$<1+|z|^2|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)=|1-z\bar{z}_0|^2.$$

$$\therefore\left|\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|^2<1$$

由于复数模非负，两边开平方即得：

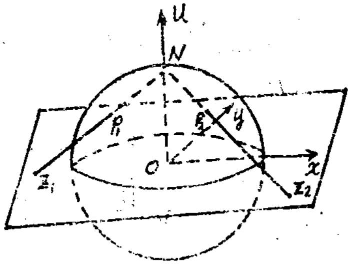
$$\left|\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|<1.$$

13．设有限复数 z_1 及 z_2 在复球面上表示为 P_1 及 P_2 两点。求证 P_1 及 P_2 的距离是：

$$\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

证：如(图1．3)，设复球面上的两点 P_1，P_2 的坐标分别为 (ξ_1, η_1, ζ_1)，(ξ_2, η_2, ζ_2)，球极为 N（0，0，1）。

又设复平面上与 P_1P_2 对应的点分别为 $z_1(x_1, y_1, 0)$，$z_2(x_2, y_2, 0)$。



(图1．3)

由于 P_1，P_2 在球面上，

$\therefore\ \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=1,\quad \xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2=1.$

又由于 N，P_1，z_1 在一条直线上

$$\therefore\quad \frac{\xi_1-0}{x_1-0}=\frac{\eta_1-0}{y_1-0}=\frac{\zeta_1-1}{0-1},$$

$$\text{故}\quad x_1=\frac{\xi}{1-\zeta_1},\qquad y_1=\frac{\eta_1}{1-\zeta_1}.$$

$$\text{又因}\quad |z_1|^2=x_1^2+y_1^2=\frac{\zeta_1^2+\eta_1^2}{(1-\zeta_1)^2}=\frac{1-\zeta_1^2}{(1-\zeta_1)^2}$$

$$=\frac{1+\zeta_1}{1-\zeta_1},$$

$$\therefore\quad \zeta_1=\frac{|z_1|^2-1}{1+|z_1|^2}.$$

故可求得： $\xi_1=\dfrac{2x_1}{1+|z_1|^2}$， $\eta_1=\dfrac{2y_1}{1+|z_1|^2}$。

同理可求得：

$$\xi_2=\frac{2x_2}{1+|z_2|^2},\quad \eta_2=\frac{2y_2}{1+|z_2|^2},$$

$$\zeta_2=\frac{|z_2|^2-1}{|z_2|^2+1}.$$

由两点间的距离公式得；

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}\\&=\sqrt{2(-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2-\zeta_1\zeta_2)}\\&=\sqrt{\frac{4[|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1z_2)]}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}\\&=\sqrt{\frac{2^2|z_1-z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}\\&=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|)^2(1+|z_2|^2)}}.\end{aligned}$$

14．满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么？如果是区域，是单连通区域还是多连通区域？

（1） $\mathrm{Im}z=3$。

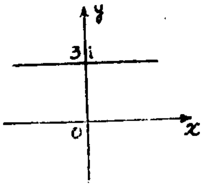
解：满足条件的一切点 z 所组成的点集是过点 $3i$ 且平行于实轴的一条直线（图1．4）。它不是区域。

（2） $\mathrm{Re}z>\dfrac{1}{2}$。

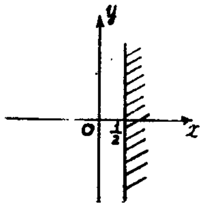
解：满足条件的一切点 z 所组成的点集是以直线

$\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}$ 为左界的半平面（不包括 $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}$）它是单连

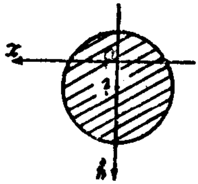
通区域(图1.5)



(图1.4)



(图1.5)



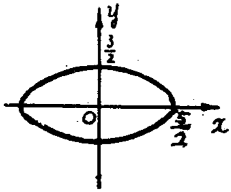
(图1.6)

（3） $|z-i|\leqslant|2+i|$。

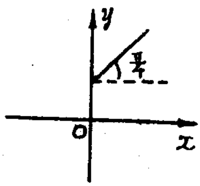
解：上式即$|z-i|\leqslant\sqrt{5}$因此满足条件的一切点z所组成的点集是以点i为圆心，$\sqrt{5}$为半径的闭圆盘（图1.6），它不是区域 而是一个闭区域。

（4） $|z-2|+|z+2|=5$。

解：根据复数差的模的几何意义和椭圆的定义，立即可知满足上式的一切点z所组成的点集是以点±2为焦点，$\frac{5}{2}$为长半轴的椭圆（图1.7）。它不是区域。



(图1.7)



(图1.8)

（5） $arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$

解：满足上式的一切点z所组成的点集是以点i为端点，斜率为1的半射线（不包括端点i）（图1.8）。它不是区域。

（6） $|z|<1$，　$\mathrm{Re}\,z\leqslant\frac{1}{2}$