初中课程补充读物丛书

数学

代数部分

毓佩 著

山西人民出版社

李毓佩 著

初中课程补充读物丛书

数 学

代 数 部 分

山西人民出版社

内 容 提 要

本书通过许多有趣的数学故事和引人入胜的数学问题对初中代数作了如下补充：一、不断扩张的数，二、运算规律的发现，三、方程的解法和传说，四、函数与图象。在每部分后面附有“考考你”习题。

初中课程补充读物丛书
数学——代数部分
李毓佩 著
•
山西人民出版社出版（太原并州路七号）
山西省新华书店发行 山西新华印刷厂印刷
•
开本：787×1092 1/32 印张： $4\frac{1}{4}$ 字数：74千字
1981年11月第1版 1981年11月太原第1次印刷
印数：1—67,100册
•
书号：7088·915 定价：0.40元

出版说明

为了密切配合课堂教学，帮助初中学生掌握基础知识，适当扩大知识面，提高灵活运用的能力，以启发思想，丰富知识，开阔视野，引起学习兴趣，我们编辑出版了《初中课程补充读物》丛书，向初中学生提供一套和教材紧密联系的通俗易懂、生动有趣的知识性读物。

这套丛书分科陆续出版，明年出齐。其内容按照各科教材的顺序，有重点地补充和讲解基础知识；简要介绍一些重要定律、定理的发现和应用，以及各学科上的新成就；联系教学实际提出一些有趣的问题，供学生思考和解答。

这套丛书拟编二十一分册。数学三册（代数、几何、思路与解题技巧各一册），物理四册（力学、热学、电学、光学各一册），语文三册（每年级一册），地理二册（中国地理、世界地理各一册），历史二册（中国古代史、中国近代史和现代史各一册）外语三册（每年级一册），化学、政治、生物、生理卫生各一册。

目　　录

一、不断扩张的数……………………………（1）
神奇的幻方……………………………………（1）
古埃及分数……………………………………（6）
不同颜色的数…………………………………（10）
无理数的谋杀案………………………………（12）
毕达哥拉斯的苦恼（12）希伯斯的背叛（14）
重要的无理数（15）
虚无飘渺的数…………………………………（18）
考考你！………………………………………（23）
二、运算规律的发现…………………………（25）
“幂”字表示什么？…………………………（25）
科学记数法的诞生（26）变乘除为加减（27）
能延长人寿命的运算…………………………（28）
乘方的逆运算（28）“我可以创造一个宇宙”（30）
首批对数表是怎样造成的？…………………（32）
钟表技师的贡献（32）造对数表的困难在
哪儿？（32）
有趣的对数计算三例…………………………（35）

论小道消息传播的速度（35）组成个最大的数（36）如何测算古尸的年代（38）
由算术根引起的麻烦……………………（40）
$\sqrt{4}$等于多少？（41）“$-1=1$”（42）问题出在哪儿？（43）
十三岁少年的发现……………………（44）
$(a+b)^n=?$（44）掷铜板的规律（64）巴斯卡晚了四百年（48）
腓特烈大王的阅兵式……………………（49）
腓特烈大王的要求（49）做一次扑克牌游戏（50）规律找到了！（52）有用的正交拉丁方（54）
考考你！……………………（56）
三、方程的传说和解法……………………（59）
怪画之谜……………………（59）
算珍珠的故事……………………（61）
波斯国王出了一道难题（61）三个聪明的外国人（62）代数胜过算术（63）
解方程有多少种方法？……………………（66）
为什么方程会增根、减根？……………………（70）
方程减根的原因（70）方程增根的原因（72）
巧用韦达定理……………………（74）

围绕着解三次方程的争斗……………………（77）
他的名字叫“结巴”（77）解三次方程的竞
赛（78）卡尔丹公式的来历（79）
阿贝尔和五次方程……………………………（80）
穷孩子阿贝尔（80）立志攀高峰（81）27岁就
离开了人间（82）
丞相买鸡和不定方程…………………………（83）
悬赏十万马克求解……………………………（85）
科学家与方程…………………………………（88）
刁番都的墓志铭（88）百羊问题（89）莲花问
题（90）卖鸡蛋问题（91）瓦里斯提出的问
题（93）给爱因斯坦提的问题（94）
考考你！………………………………………（97）
四、函数与图象…………………………………（101）
蜘蛛给予的启示………………………………（101）
“函数”概念的由来……………………………（103）
真函数与假函数（103）“函数”一词的原意
是什么？（105）
函数关系和定义域……………………………（107）
函数关系的表示法（107）定义域的求法（109）
$f(x)$与欧拉（111）

最简单的函数……………………………………(112)
撒农药遇到的难题……………………………(116)
函数图象的变换………………………………(118)
再解瓦里斯问题………………………………(121)
靠墙围矩形（122） 三角形里的矩形（123）
圆里的矩形（124） 半圆里的矩形（126）
考考你！ ……………………………………………(127)

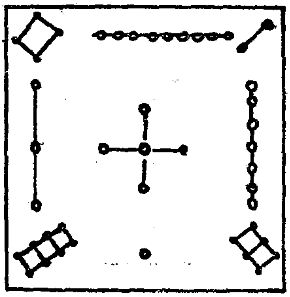
一　不断扩张的数

神奇的幻方

人类最早认识的数就是正整数，也叫自然数。你也许认为正整数很简单，用不着去研究它们。不，正整数写起来是很简单 1，2，3，4，……，但是它的性质却很复杂，研究起来是很困难的。我国著名数学家华罗庚、陈景润都花费了很大精力去研究正整数的性质，并取得了具有世界水平的研究成果。直到现在还有一些关于正整数的性质，人们还不了解。

我们就从正整数开始讲起。

传说在很久很久以前，在我国的洛水中浮出一只大乌龟，乌龟背上有一个奇怪的图。仔细研究才发现，这是由 1



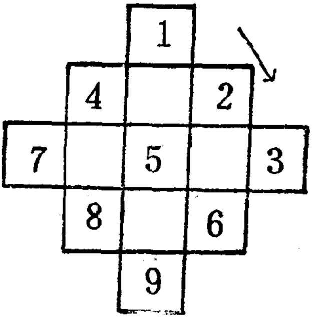
4	9	2
3	5	7
8	1	6

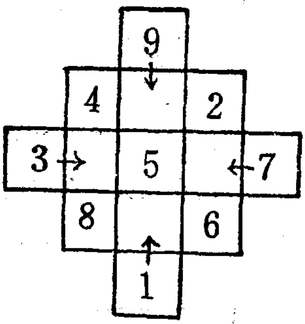
到 9 这九个正整数排列成的三行三列的图。其中黑点表示偶数，圆圈表示奇数。

这个图很有意思，不管你把横着的三个数相加，还是把竖着的三个数相加，或者把斜着的三个数相加，其和都等于15。

你一定想知道，这个图是怎样排出来的。靠瞎碰行吗？不行。我来告诉你一种排列这个图的方法。

画一个图，把 1 到 9 这九个正整数，从小到大斜着排进图中。然后把最上面的 1 和最下面的 9 对调；最左边的 7 和最右边的 3 对调。最后把最外面的四个数，填进中间空格中，就得到了乌龟背上的图了。





4	9	2
3	5	7
8	1	6

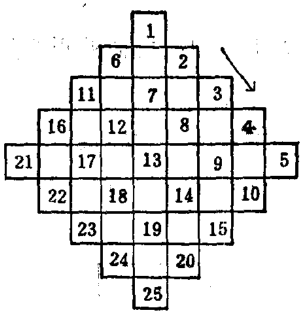
这种排列方法是公元1275年宋朝数学家杨辉最先提出来的。他把这种图叫“纵横图”。

奇怪的是许多民族也很早就

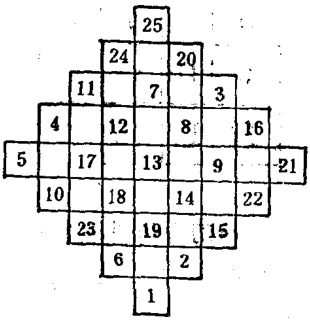
认识到纵横图。比如印度人阿和拉伯人认为纵横图具有一种魔力，能够避邪恶，驱瘟疫。直到现在在印度和中东的有些地方，还可以看到有些人把印有纵横图的金属片挂在脖子上。而犹太人认为纵横图中的奇数数字1、3、9和希伯来文字母对应，刚好写出“耶和华”（上帝）这个词。

传说、宗教当然是不足为信的．但是纵横图却反映了正整数的一种性质。国外又把纵横图叫做“幻方”。

上面我们见到的是三阶幻方，还可以排出阶数更高的幻方，当然，阶数越高排起来越困难，如果不掌握一定的方法，简直别想排出来。



奇数阶幻方可以用杨辉的方法排出来。我们来排一个五阶幻方，就是用1到25这二十五个正整数排成五行五列的图使得每一横行、每一纵列及两条对角线上的五个数相加其和都相等(65)。



首先把1到25按顺序斜着填进右图，然后把上、下、左、右

各三个数对调，再填入中间相应的空格中，就得到一个五阶幻方。五阶幻方的排法只有这一种吗？不是，现代靠电子计算机的帮助，得到五阶幻方共有275305224种。

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

下面我们再排一个四阶幻方。把1到16的十六个正整数排成如下左图；再把外正方形的两组对角的两个数分别对调，内正方形的两组对角的两个数分别对调，其余的数不动，得到如下右图，它的每一横行，每一纵列及两条对角线上的四个数之和都等于34。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

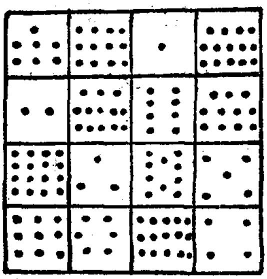
四阶幻方的排法也不只一种，总共可排出880种。这里顺便说明一下，二阶幻方不存在，三阶幻方仅有前面排出的一种。

一般地说，用1、2、3……n^2 排成 n 行 n 列的方阵，如果每一行、每一列以及两对角线上 n 个数的和都相等〔$\frac{n}{2}(n^2+1)$〕，这个方阵叫做 n 阶幻方。要排出一个阶数相当大的幻方的确不容易，要把这个阶数的所有幻方都排出来，那就更困难了，如果不用电子计算机可能办不到。

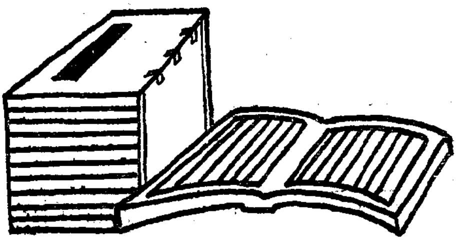
科学家把幻方看成是人类智慧的结晶。在一个博览会上，人们发现地面的方砖上都写着数字。不论你按着横、竖、斜的方向任意找四个相邻的数，加起来都等于34。原来这是由许多四阶幻方组成的地面。

7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4
7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14
2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11
16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5
9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4

为了探索别的星球上是否有宇宙人，人类发射了飞出太阳系的飞船，飞船上有照片，音乐录音，还有一幅四阶幻方图。



古埃及分数



我国是世界上最早使用分数的国家。在公元前成书的我国最早的一部数学、天文著作《周髀（bì）算经》中，记载了一年有$365\frac{1}{4}$日，一月有$29\frac{499}{940}$日，并且有复杂的分数计算。

我国古代主要研究的是真分数，即分子小于分母的分数，形象地把分子称为“子”（儿子），把分母称为“母”（母亲）。

古埃及人也很早就掌握了分数，但是他们表示、计算分数的办法很繁难。他们除去会单独表示$\frac{2}{3}$以外，其它分数都用单位分数表示。什么是单位分数呢？就是正整数的倒数。例如$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$……。古埃及人不会写$\frac{5}{6}$，把$\frac{5}{6}$要写成$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$。后来就把用单位分数之和来表示的分数叫古

埃及分数。

古埃及分数的表示方法往往不止一种，例如$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$，而$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$，所以$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$。可是$\frac{1}{42}=\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$，所以$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1806}$。这个过程甚至可以无限作下去。

后来的数学家在研究古埃及分数时，提出了一个问题：能不能把一个真分数表示成最少项数的、不重复的古埃及分数。首先他们想把1表示成古埃及分数。

直到1976年才发现了把1表示为分母是奇数，而项数又最少的古埃及分数的办法。共有5种表示法，每一种表示法都有9项

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315};$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}.$$

这五种表示法中前六项都相同。

你可能会想，既然1可以表示成古埃及分数，2是否也能表示成古埃及分数呢？

谈到这个问题，还要给你介绍一件有趣的事情：

在古希腊时期，当时的数学家发现了一种具有特殊性质的数，起名叫“完全数”。

比如6，6有4个因数1、2、3、6，除去本身6以外的因数叫真因数。6的真因数是1、2、3。如果一个正整数能表示成自己所有真因数之和，这个正整数就叫做“完全数”。

6就是最小的一个完全数，因为$6=1+2+3$．寻找完全数并不是很容易的。人们虽然很早就发现了前四个完全数6，28，496，8128

$$6=1+2+3;$$

$$28=1+2+4+7+14;$$

$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248;$$

$$8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064.$$

但是，一直到1456年才发现了第五个完全数33550326，到了十九世纪才找到第九个完全数

26584559915698317446546926159538421 76

完全数有许多奇妙的性质，比如每一个完全数都可以写成连续自然数之和

$$6=1+2+3;$$

$$28=1+2+3+4+5+6+7;$$

$$496=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31;$$

$$8128=1+2+3+\cdots\cdots+126+127.$$

完全数还可以表示成连续奇数的立方和（6除外）；

$$28=1^3+3^3;$$

$$496=1^3+3^3+5^3+7^3;$$

$$8128=1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3.$$

最后，完全数与古埃及分数还有关系，每一个完全数所有因数倒数之和都等于2

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2;$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2;$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=2.$$