数学思维方法讲析

SHU XUE SHI WEI FANG FA JIANG XI

余国新　申　波　阮　玮
吴汉民　蒋芳钟　吴亚敏　主编

武汉测绘科技大学出版社

数 学 思 维 方 法 讲 析

主 编 余国新　申　波　阮　玮

吴汉民　蒋芳钟　吴亚敏

主 审 罗凯铭

中 专 数 学 丛 书

武汉测绘科技大学出版社

（鄂）新登字14号

数学思维方法讲析

余国新　申　波　阮　玮
吴汉民　蒋芳钟　吴亚敏　主编
责任编辑：张小玲

武汉测绘科技大学出版社出版发行
武汉测绘科技大学印刷厂印刷

787×1092毫米　32开　13.75印张　295.4千字
1992年3月第一版　　1992年3月第1次印刷
印数　　0001—5000册

ISBN 7-81030-145-4/O·15　　　定价：4.90元

前　言

随着职业技术教育改革的不断深化，中等专业学校数学这门基础课程的教学工作正在普遍受到重视，各类中专数学竞赛活动广泛深入地展开，数学统考作为教学质量的检测手段之一已被经常采用。越来越多的数学教师感到，应该有一套与中专教材配套，适合中专学生阅读的竞赛与统考的辅导读物。现在，我们将自己近年来积累的有关资料整理成《数学思维方法讲析》一书，正是考虑到这种需要。

本书是《中专数学丛书》中的一册，它根据中专通用数学教材中初等数学的内容和体系，以中专数学教学大纲为依据进行编写，共十五章，各章由内容提要、疑难解析和习题及答案提示三部分组成。全书基本上概括了初等数学的重要基础知识和解题方法，对中专数学教学大纲范围的知识作了系统的归纳，同时侧重于数学思维能力的培养和解题技能的训练，所选例习题大多取自近几年中专的竞赛与统考试题，尽可能使其具有典型性、启发性，例题讲解强调解题思路的分析和揭示解题规律，意在既能使学生了解竞赛与统考的基本要求，又能实现启迪思维、开阔视野，提高分析问题和解决问题能力之目的。

本书的编写，是一个分工撰稿，辑集成册的过程。其中，第一章：湖北黄冈地区工业学校吴亚敏、湖北黄冈地区农业学校张克新；第二章：湖北地质学校刘大利；第三章：湖北黄冈地区水利电力学校万兰萍、余剑辉；第四章：湖北

荆州财税会计学校鲁国珍；第五章：湖北孝感地区技校鲁春涛、南方村镇建设学校余国新；第六章：湖北咸宁粮食职工中专学校余朝政、黄晓；第七章：湖北水产学校罗凯铭、武汉船舶工业学校郭江平；第八章：湖北宜昌地区农机学校蒋元加、湖北襄樊师范学校宋清龙；第九章：湖北荆州地区农机学校申波；第十章：湖北水利学校李再好；黄石商业技校王永鑫；第十一章：南方村镇建设学校何志芬；第十二章：湖北咸宁地区财贸学校阮玮；第十三章：湖北宜昌地区卫校薛州恩、廖才静、方宜；第十四章：湖北武昌幼儿师范学校蒋芳钟；第十五章：湖北孝感地区农机学校吴汉民、湖北孝感地区财校黄玉昌。全书由余国新、申波、阮玮、吴汉民、蒋芳钟、吴亚敏组稿主编，最后由罗凯铭统稿总纂。

在丛书编写过程中，王喜芝、桂言志、黄丽华、龚文汉等老师参加了部分章节的组编审稿工作；各作者所在学校对本书的编写给予了热情支持与帮助；武汉测绘科技大学出版社为这本书的出版付出了辛勤劳动；国营武昌造船厂设计室工程师罗彬同志绘制了全书插图，在此致以诚挚谢意。

编写中专数学丛书，对我们来说是初步尝试，为了进一步充实完善这套丛书，我们衷心希望使用丛书的师生及广大读者提出建议和意见。

编　者

1991.7.

目　录

第一章 集 合 与 函 数

集合论是现代数学中的一个重要分支，它的基本知识已被运用于数学的各个领域。函数是数学中的一个极其重要的概念，是学习高等数学、应用数学和其它科学技术必不可少的基础知识。

【内 容 提 要】

一、集 合

1．集合是指具有某种特定性质的对象组成的总体。其中组成某一集合的各个对象叫做这个集合的元素。

构成集合的两个必要条件是：（1）研究的对象是确定的，它们的属性是明显的；（2）能否构成集合与集合内元素是否存在无关。

2．集合内元素的特征：（1）元素的确定性，即对于任何一个对象，都能确定它属于或不属于某一集合；（2）元素的互异性，即一个元素在一个集合里，不能重复出现；（3）元素的无序性，即在一个集合里，不必考虑元素之间的顺序。

3．集合的表示方法：

（1）列举法：把集合中的元素一一列举出来写在大括号{ }内。

（2）描述法：把集合中元素所具有的特定性质描述出来，写在大括号{ }内。

（3）点集直观图法：把集合中元素属性的几何意义在平面直角坐标系中表示出来。

（4）文氏图法：用一条封闭的曲线把元素圈起来。

4．元素与集合的关系：从属关系，用“$\in$”或“$\notin$”表示。

5．集合与集合的关系：有包含与相等的关系。用“$\subseteq$”或“$\supseteq$”和“$=$”表示。

6．子集：对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。

7．真子集：如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作：$A\subset B$或$B\supset A$。

（1）真子集一定是子集，而子集不一定是真子集。

（2）空集是任何集合的子集；空集是任何非空集合的真子集。

8．集合的运算

（1）交集。设A、B是两个集合，把属于A且属于B的所有元素所组成的集合叫做A与B的交集，记为$A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$

①$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

②$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$　③$A\cap B=B\cap A$

（2）并集。设A和B是两个集合，把至少属于A、B之一的所有元素组成的集合叫做A与B的并集，记为$A\cup B$，即

$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$

①$A\cup A=A$　　②$A\cup\varnothing=A$

③$A\cup B=B\cup A$　　④$A\subseteq A\cup B$　　⑤$B\subseteq A\cup B$

（3）差集。设A和B是两个集合，把属于A而不属于B的所有元素组成的集合叫做A与B的差集，记为$A-B$，即$A-B=\{x\mid x\in A,\ x\notin B\}$

①$A-A=\varnothing$　　②$A-\varnothing=A$

③$A-B\neq B-A$

（4）全集：全集是相对于它的一切子集而言的。在研究某些集合时，这些集合是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫全集，记为Ω。

（5）补集：设Ω为全集，A为Ω的子集则差集$\Omega-A$叫做集合A的补集，记为$\overline{B}$，即：

①$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{\Omega}=\varnothing$

②$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$

③$A\cap\Omega=A$，$A\cup\Omega=\Omega$

9．德·摩根（De Morgan）公式

（1）$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　（2）$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

10．两个公式

（1）一个有限集合子集和真子集的个数公式：

①子集个数2^n；②真子集个数2^n-1．

其中n表示集合中元素个数。

（2）两个有限集合并集元素个数公式：若n表示集合中元素的个数，则$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

二、函　数

1．定义：设D是一个数集，如果对于D上的每一个确

定的数值x，按照某个对应关系，y都有唯一确定的值和它对应，那么y就叫做定义在数集D上x的函数，记作$y=f(x)$。

（1）定义域和对应关系，是确定函数的两个要素，这两个要素确定了值域。

（2）$f(a)$表示x在定义域内任取一个确定的值a时，对应的函数值。

2．函数定义域的求法：（1）实际问题，根据所研究的问题的实际意义来确定。（2）对于用数学式子来表示的函数，如果不考虑问题的实际意义，那么定义域就是指能使这个式子有意义的所有实数的集合。

3．函数图象的描绘方法：

（1）函数图象变换法。

①$y=f(x+a)$，当$a>0$时，将$y=f(x)$的图象向左平移a个单位；当$a<0$时，将$y=f(x)$的图象向右平移a个单位。

②$y=f(x)+a$，当$a>0$时，将$y=f(x)$的图象向上平移a个单位；当$a<0$时，将$y=f(x)$的图象向下平移a个单位。

③$y=-f(x)$，作$y=f(x)$关于x轴的对称图形即是。

④$y=f(-x)$，作$y=f(x)$关于y轴的对称图形即是。

⑤$y=f(ax)$，其中$a>0$，将$y=f(x)$图象上的点沿x轴向原点压缩或伸长a倍。

⑥$y=af(x)$，其中$a>0$，将$y=f(x)$图象上的点沿y轴向原点压缩或伸长a倍。

（2）分析函数特征法。函数特征的分析大体包括定义域，值域，在x轴y轴上的截距，极值与最值，单调性，奇偶

性，周期性，延伸趋势等。根据这些特征即可描绘出函数的图象。

4．反函数

（1）定义：设有函数$y=f(x)$，其定义域为D，值域为M，如果对于M中的每一个y值，都可以从$y=f(x)$中确定唯一的x值（$x\in D$）与之对应，这样确定了一个以y为自变量的新函数$x=\varphi(y)$，这个函数$x=\varphi(y)$就叫做函数$y=f(x)$的反函数，记为$x=f^{-1}(y)$。

（2）函数$y=f(x)$的定义域，值域分别是其反函数$x=f^{-1}(y)$的值域，定义域。

（3）如果$y=f(x)$的反函数是$x=f^{-1}(y)$，那么，显然函数$y=f^{-1}(x)$的反函数就是$y=f(x)$。

（4）对于函数式$x=f^{-1}(y)$，习惯写做$y=f^{-1}(x)$。

（5）函数$y=f(x)$的图象和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象是关于直线$y=x$对称。

5．函数的几种特征

（1）单调性：对于给定区间上的函数$f(x)$，如果对于属于这个区间上的任意两个自变量x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)<f(x_2)$，那么就称$f(x)$在这个区间上是增函数；当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$，那么就称$f(x)$在这个区间上是减函数。如果函数$y=f(x)$在某个区间上是增函数或减函数，就称$f(x)$在这一区间上具有严格的单调性，这一区间叫做$f(x)$的单调区间。

①某个区间上的增函数$y=f(x)$的图象，在该区间上是一条上升的曲线；反过来如果一个函数在某个区间上的图象是一条上升的曲线，那么这个函数在该区间上是增函数。

②某个区间上的减函数$y=f(x)$的图象，在该区间上是一条下降曲线；反过来如果一个函数在某个区间上的图象是一条下降的曲线，那么这个函数在该区间上是减函数，

（2）奇偶性：对于函数$f(x)$，如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=-f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做奇函数；如果对于函数定义域内任意一个x，都有$f(-x)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫做偶函数。

（3）奇偶函数图象的对称性

①奇函数的图象关于原点对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数就是奇函数。

②偶函数的图象是关于y轴对称；反过来，如果一个函数的图象关于y轴对称，那么这个函数是偶函数。

【疑难解析】

1．关于集合的概念

集合是一个基本概念，它象几何中的点、线、面的概念一样，是不下定义的原始概念，是以描述形式给出的。

2．求函数值域的主要方法

主要有配方法，须注意考察完全平方式能否为零；平均值法，须注意考察等号能否成立；判别式法，须注意结合函数解析式检查判别式法所得的结论；反函数法，即通过求反函数定义域的方法以求得原函数的值域。

3．关于函数的概念

函数的概念既能反映出两个数集中两种变量的数量对应，又能反映出在对应关系的对应下，因变量y伴随着自变量x的确定而确定，这种对应关系可以是解析法、表格法和

图象法等给出的。

【思路方法】

例1　若$A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$
$B=\{-4,\ a+3,\ a^2-2a+2,\ a^3+a^2+3a+7\}$
且$A\cap B=\{2,\ 5\}$，试求实数a的值。

分析　由$A\cap B=\{2,\ 5\}$得A已有元素2，另一代数式的值必为5，可求a，将所求a值分别代入B中的代数式，进一步确定a值。

解　由已知$a^3-2a^2-a+7=5$

即$(a+1)(a-1)(a-2)=0$

$a=-1,\ 1,\ 2$

但将$a=1$，2分别代入B中的三个元素$a+3$，a^2-2a+2，a^3+a^2+3a+7时不能同时得到2，5，仅$a=-1$代入时有$a+3=2$，$a^2-2a+2=5$，即B中有元素2与5，故$a=-1$。

例2　33名学生在自习课时做数学和物理作业，18人做完了数学作业，23人做完了物理作业，若每人至少完成了一科作业，问同时完成数理两科作业的有几人？

解　解法一：设完成数学、物理作业的学生分别构成集合A、B，则$n(A)=18$，$n(B)=23$，$n(A\cup B)=33$

故　$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=18+23-33=8$

解法二：将$A\cup B$分成三部分，

即　$A\cup B=(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

三部分$A-B$，$B-A$，$A\cap B$的人数分别为x、y、z，

则 $\begin{cases}x+y+z=33\\x+z=18\\y+z=23\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10\\y=15\\z=8\end{cases}$

故同时完成两科作业的学生有8人.

例3 求下列函数的值域

(1) $y=2^x-2^{2x}+\frac{3}{4}$ (3) $y=\frac{x^2+1}{x}$

(2) $y=x^2+\frac{1}{x^2}+3$ (4) $y=\frac{x+1}{x+2}$

解 (1) $y=-(2^x-\frac{1}{2})^2+1$，则$y\in(-\infty, 1]$

(2) $y=(x-\frac{1}{x})^2+5$，则$y\in[5, +\infty)$

或 $y=x^2+\frac{1}{x^2}+3\geqslant 2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+3=5$，结果相同.

但是若变形为$y=(x+\frac{1}{x})^2+1$得$y\in[1, +\infty)$，就错了，原因是$x+\frac{1}{x}\neq 0$，y值也不能取1了。

(3) $|y|=|x+\frac{1}{x}|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2$

$\therefore\ y\in(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$

或 $y=\frac{x^2+1}{x}$，$x^2-yx+1=0$，$\Delta=y^2-4\geqslant 0$，结果相同。

(4) $y=1-\frac{1}{x+2}$，因$\frac{1}{x+2}\neq 0$，得$y\in(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$，或由$y=\frac{x+1}{x+2}$得$x=\frac{1-2y}{y-1}$，知$y\neq 1$，

结果相同。

说明 （1）题是用配方法；（2）题是用配方法或平均值法；（3）题是用平均法或判别式法；（4）题是用分析观察法或反函数法。

例4 证明奇函数$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$仍是奇函数。

证明 由$y=f(x)$是奇函数，可得$y=f(-x)=-f(x)$

$$\therefore\quad f^{-1}(-y)=f^{-1}[-f(x)]=f^{-1}[(-x)]=-x$$
$$=-f^{-1}(y)$$

故反函数$x=f^{-1}(y)$仍是奇函数。

例5 设x和$f(x)$都是实数，且$f(x)-3f(\frac{1}{x})=2x$，求$f(x)$及其值域。

解 $f(x)=2x+3f(\frac{1}{x})$ ①

以$\frac{1}{x}$代x，　$f(\frac{1}{x})-3f(x)=\frac{2}{x}$ ②

从①、②消去$f(\frac{1}{x})$得$f(x)=-\frac{x}{4}-\frac{3}{4x}$

去分母　$x^2+4x[f(x)]+3=0$

因x为实数，知$\Delta=[4f(x)]^2-12\geqslant 0$

$$f(x)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2},\ f(x)\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

即$f(x)=-\frac{x}{4}-\frac{3}{4x}$ 且值域为$(-\infty,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{3}}{2},\ +\infty)$

例6 设$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，解方程$f(x)=f[f(x)]$。

解 $\because\quad f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

$\therefore\quad f(x)=x^2-2$

又 $\quad f(x)=x^2-2$

得 $\quad x^2-2=(x^2-2)^2-2$

$$(x^2-2)^2-x^2=0$$

$$(x^2+x-2)(x^2-x-2)=0$$

$$(x-1)(x+2)(x-2)(x+1)=0$$

即 $x=-2,\ -1,\ 1,\ 2$

例 7 已知 $A=\{0,\ 1\}$，$B=\{x\,|x\subseteq A\}$，说明 A 与 B 的关系，并写出 B 的元素。

分析 由题意 $B=\{x\,|x\subseteq A\}$，知 B 中元素是 A 的所有子集。

解 因为 $A=\{0,\ 1\}$ 的子集是 $\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,\ 1\}$ 所以 $B=\{x\,|x\subseteq A\}=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{0\},\ \{0,\ 1\}\}$

因此集合 A 是集合 B 的一个元素。即 $A\in B$，注意不能写成 $A\subset B$。

例 8 求 $y=3^{x^2-4x+4}$ 的单调区间。

解 $\because\quad y=3^{x^2-4x+4}=3^{(x-2)^2}$

$\therefore\quad$ 定义域为 $x\in(-\infty,\ +\infty)$

设 $\quad u=(x-2)^2$，则 $\quad y=3^u$

对于 $u=(x-2)^2$，当 $x=2$ 时 $\quad u=0$

故将 $(-\infty,\ +\infty)$ 分成 $(-\infty,\ 2)$，$[2,\ +\infty)$

当 $-\infty<x_1<x_2<2$ 时

$$u_1-u_2=(x_1-2)^2-(x_2-2)^2$$
$$=(x_1+x_2-4)(x_1-x_2)$$

$\because\quad x_1<x_2 \qquad \therefore\quad x_1-x_2<0$

$\because\quad -\infty<x_1<2,\ -\infty<x_2<2$

$\therefore\ x_1+x_2<4$， $\therefore\ x_1+x_2-4<0$

即$u_1-u_2>0$ 从而$u_1>u_2$.

因$y=3^u$的底数大于1，故$y=3^u$是单调增加函数，于是当$x_1<x_2$时有$u_1>u_2$，即$y_1>y_2$. 故$y=3^{(x-2)^2}$在$(-\infty, 2)$内是单调减少函数，从而得出$(-\infty, 2)$为单调减少区间。

同理$[2, +\infty)$为单调增加区间。

评注 此题是关于函数$y=f[\varphi(x)]$的单调性问题。在使$y=f[\varphi(x)]$有意义的某个范围内：

1．若$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$的单调性相同，即都是增函数，或都是减函数，则函数$y=f[\varphi(x)]$是增函数。相应的区间是单调增加区间。

2．若$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$的单调性相异，即一个是增函数另一个是减函数；或一个是减函数另一个是增函数，则函数$y=f[y(x)]$是减函数，相应的区间是单调减少区间。

例9 设$y=\log_a\sqrt{-x^2+4x-3}$ $(a>0$，且$a\neq1)$求函数的：①定义域；②单调区间；③最大值最小值.

解 ①$-x^2+4x-3>0$ 得 $1<x<3$

故定义域是$(1, 3)$

②设$u=\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{1-(x-2)^2}$

当$1<x<2$时，$u=\sqrt{-x^2+4x-3}$是增函数；

当$2\leqslant x<3$时，$u=\sqrt{-x^2+4x-3}$是减函数.

故当$a>1$时，有$y=\log_a u$是增函数，从而$(1, 2)$是增区间，$[2, 3)$是减区间；当$0<a<1$时，$y=\log_a u$是增函数，从而$(1, 2)$是减区间，$[2, 3)$是增区间。