

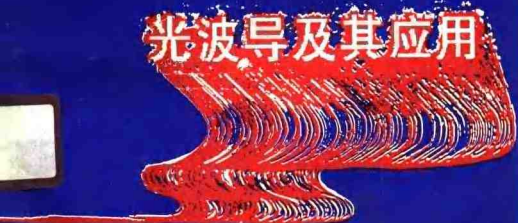
徐森禄

凌世德 编

Loulergue

浙江大学出版社

光波导及其应用



内 容 简 介

光通信和光集成电路的迅速发展,促进了光波导技术基本理论与应用技术的研究。本书主要阐述了电磁理论,介电波导和光纤的几何光学及电磁理论,光纤的制造、检测和应用,同时对近年来发展的非线性波导作了概要的论述。

本书可作为光通信、光纤传感、激光、物理等专业的研究生和高年级大学生的教材,也可作为大专院校教师及科技人员的教学用书及参考书。

光波导及其应用

徐森祿 凌世德

Loulergue 编

责任编辑 涂红

*

浙江人民出版社出版

上虞科技外文印刷厂排版

萧山东湘印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*

开本 850×1168 1/32 印张: 10.625 字数: 266 千字

1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷

印数 0001—2000

ISBN 7-303-00484-8

TP·034 定价: 2.75元

序

由徐森祿、凌世德和 Louergue 教授撰寫的《光波導及其應用》一書敘述了近代光學的一個重要分支,在當前具有十分重要的意義。全書既闡明了基本理論,又有豐富的应用內容。本書共分九章。首先敘述了電磁理論的基礎知識,以後几章用幾何光學和電磁理論分別探討和分析了平板波導和光纖的各種特性。鑒於飛速發展的光通訊技術中光纖的重要作用,第七和第八章分別討論了光纖的製造、檢測和它的主要应用。在第九章中 Louergue 教授根據導波光學與非线性光學相互交叉和滲透的發展趨向,敘述了非线性光導波的理論和主要应用,指出了本學科前沿的發展狀況。內容安排十分恰當。這一全面論述光波導的著作不僅可作為大學學生和研究生的教科書,而且可使有志學習近代光學知識的研究人員深受其益。

法國巴黎第六大學名譽教授 M·弗朗松

编 者 的 话

这本供光学仪器和计量测试技术专业研究生用的教材终于与读者见面了。本书起源于1984年浙江大学光仪系为研究生初次开设“导波光学”时编写的一本油印教材，经浙江大学和上海机械学院多年使用，效果比较满意。

近十年来，作为近代光学学科分支的纤维光学和集成光学发展很快，与它们有密切联系的光波导技术的应用日益广泛，前景更为诱人，很多读者被它们吸引而转入这一领域工作。这样促使我们产生了一个强烈的愿望，想把原来的教材修改、增补，构成一本较完整的光波导方面的教材，供渴望掌握这一领域知识的研究生和科技人员学习。1986年底，徐森椿同志应邀去法国访问，他利用这一难得的机会与法国光学学院的Loulergue教授商定了合作计划，请他撰写非线性光波导一章，因为非线性光学与导波光学的有机结合构成了一个重要的发展方向，增补这一章将使教材更为完整。因此对这本书的诞生既体现了中法两国学者合作的成果，又反映了研究生教材建设的一个侧影。

我们的导师和挚友弗朗松教授为本书提出了很多建议并写了序，我们衷心感谢他的支持和对本书的评价。我们也感谢博士生王唯质在译编第九章中所做的部分工作。由于我们水平有限，其不当之处欢迎读者指正。

编者

1989年10月

目 录

第一章 电磁场的基本性质

§ 1.1 麦克斯韦方程组	2
§ 1.2 物质方程	3
§ 1.3 电磁场的边值关系	4
§ 1.4 电磁场的能量守恒和坡印亭矢量	8
§ 1.5 波动方程	9
§ 1.6 标量平面波	12
§ 1.7 标量球面波	16
§ 1.8 波群、群速	17
§ 1.9 矢量平面波	20
§ 1.10 程函数和程函方程(eikonal 方程)	22
§ 1.11 光线方程(射线方程)	26

第二章 平面介质波导的射线分析法

§ 2.1 均匀平面波在两介质交界面上的反射、透射和全反射	29
§ 2.2 表面波(消逝波)和辐射波	37
§ 2.3 Goos-Hänchen 位移	40
§ 2.4 平面介质波导的导波、辐射波和截止区	43
§ 2.5 导波射线分析法——导波色散方程、模式	46
§ 2.6 导模截止条件和模式的数量	53
§ 2.7 平面介质波导有效厚度和功率流	57

第三章 平面介质波导的电磁理论分析

§ 3.1	麦克斯韦方程及波动方程	60
§ 3.2	TE 波的场解	63
§ 3.3	TE 波的模式分析和截止条件	69
§ 3.4	TE 波传输的电磁功率	74
§ 3.5	TM 导模	78
§ 3.6	导入模的总数目	83
§ 3.7	群速度	84
第四章 光纤的射线分析法		
§ 4.1	圆柱坐标表示的光线方程及其解	92
§ 4.2	光线特征参数及 C_1 、 C_2 和 C_3 的意义	98
§ 4.3	光线导入光纤条件的一般讨论	101
§ 4.4	光线在阶梯折射率分布的光纤中的传播	104
§ 4.5	阶梯折射率分布光纤的数值孔径	114
§ 4.6	阶梯折射率分布光纤的导模分析	117
§ 4.7	阶梯折射率分布光纤中消逝波的模式数分析	123
§ 4.8	非均匀芯层光纤中的光线传播	126
§ 4.9	非均匀芯层光纤的导模分析	141
第五章 阶梯折射率分布光纤的电磁场理论		
§ 5.1	均匀介质中圆柱坐标形式的电磁场方程	149
§ 5.2	阶梯折射率光纤的传播波	156
§ 5.3	传播模的模式	164
§ 5.4	TE 模和 TM 模	167
§ 5.5	传播模的截止条件	171
§ 5.6	弱导入光纤	178
§ 5.7	线偏振模	185
§ 5.8	光纤的色散和带宽	190
第六章 折射率非均匀分布光纤的 WKB 分析法		
§ 6.1	基本概念	195
§ 6.2	导模、漏泄模和辐射模	200
§ 6.3	导模的 WKB 法	201
§ 6.4	漏泄模的 WKB 法	215

§6.5	多模光纤传播特性的 WKB 法	217
第七章	光纤制造工艺与检验方法	
§7.1	光纤制造工艺的技术难度和产生损耗的由来	222
§7.2	光纤制造工艺	224
§7.3	损耗的测量	230
§7.4	折射率断面的测量	236
§7.5	色散测量	242
§7.6	单模光纤及其性能测试	246
第八章	光纤的应用(光通信、光纤传感及其它)	
§8.1	光通信的一般概念	261
§8.2	光通信系统中的元器件	264
§8.3	光通信系统与网络	277
§8.4	光纤传感技术	281
第九章	非线性光波导及其应用	
§9.1	引言	284
§9.2	非线性波导	289
§9.3	两次谐波产生(SHG)	292
§9.4	参量过程	295
§9.5	相干反斯托克斯拉曼散射(CARS)	299
§9.6	简并四波混频	302
§9.7	非线性导波	308
§9.8	非线性器件的应用	317
参考文献		

第一章 电磁场的基本性质

在 19 世纪麦克斯韦(J·C·Maxwell, 1831~1879 年)以前, 光学和电磁学几乎独立地沿着各自的方向发展着。

麦克斯韦总结了前人关于电磁学方面的成就, 建立了一组方程式(人们称它为麦克斯韦方程组)。根据这一方程组, 麦克斯韦指出, 变化着的电场与磁场是密切相关联的, 而且是以波动的形式存在的。他还纯粹用电磁学方法推算出电磁波的传播速度等于光速, 并由此断言, 光波是电磁波的一种。麦克斯韦关于电磁波的预言在他逝世后 9 年被赫兹的实验所证实。

麦克斯韦方程组尽管在处理光与物质的相互作用, 解释光的发射过程和吸收过程方面还有严重的缺陷, 但圆满地阐明了光波在传播过程中所出现的各种现象, 显示了强大的生命力。特别是随着激光的问世, 可以将电磁学在工程技术中的辉煌成就直接应用到光学领域, 使得近代光学得到迅猛发展, 例如傅里叶光学、光学信息处理、导波光学、光通信理论以及光雷达和光计算等等。这些都是建立在光的电磁学说的基础上的。

本章是全书的基础。前几节扼要地总结了麦克斯韦方程组的微分形式以及由此而得出的电磁波动。考虑到读者已经熟悉电磁学的内容, 因此不再讨论麦克斯韦方程组的由来及麦克斯韦在建立这一方程组的过程中所做出的特殊贡献。这几节也讨论了边值关系和物质方程。麦克斯韦方程组, 边值关系和物质方程, 是本书

理论赖以建立的基本公式，读者一定要熟知。接下去几节是讨论波动方程的解的主要形式，如平面波、球面波的解，与本书无关的一些解，如柱面波和高斯形式的解，我们在这里不再赘述，读者有兴趣可多阅其它有关的书籍。利用边值关系讨论光波在界面上的反射和折射问题，由于与第二章内容联系更为紧密，在第二章中再予以介绍。

§ 1.1 麦克斯韦方程组

在经典电磁学中，电磁场是用两个物理量，即电矢量 $\mathbf{E}$ 和磁矢量 $\mathbf{H}$ 来描述的。而电矢量和磁矢量又与电荷、电流密切相关。为了描述电荷，引入电荷体密度 ρ (单位体积内的电荷)。为了描述电流，引入电流密度 $\mathbf{j}$ (与电流方向相垂直的单位面积内的电流)。它包括传导电流和运动电流。前者是良导体中的电子移动，半导体中电子和空穴的移动或电解液中离子的移动，其密度用 $\mathbf{j}_0$ 来表示。后者是电子、离子或宏观带电体在真空中的运动等，其密度以 $\mathbf{j}_1$ 记之。这二类电流之和记为 $\mathbf{j}$ ，即 $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1$ 。

此外，在电磁场的作用下，物质中的束缚电荷和束缚电流会重新分布，为了考虑这一影响，必须引入第二组物理量来描述电磁场，即电位移矢量 $\mathbf{D}$ 和磁感应矢量 $\mathbf{B}$ 。它们与 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 的关系将在 § 1.2 节中给出。而 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{j}$ 、 ρ 间的关系可用下列的麦克斯韦方程组 (MKS 单位制) 表示

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.1-4)$$

第一个方程是法拉第电磁感应定律的微分形式，第二个方程是麦克斯韦发展了安培环路定律的微分形式，其中 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 称为位移电流，是麦克斯韦引入的，是他的特殊贡献，它奠定了电磁场运动学说。这两个方程描述了电磁场的空间变化和时间变化之间的关系。第三个方程是高斯定律的微分形式，它也可以看作电荷的定义方程。第四个方程是磁通连续性原理，即磁力线是封闭的，不存在自由磁荷。

对式(1.1-2)两边取散度，并注意到任何旋度场的散度必为零 ($\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$)，就得到

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

再利用式(1.1-3)就得到

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.1-5)$$

它类同于流体力学中连续方程，称之为电流连续方程，它是麦克斯韦方程组的一个衍生式。根据散度的物理意义不难知道，式(1.1-5)表示任一体元内的电荷增加等于从这一体元表面流入的电荷。这表明，场空间任一点的电荷是守恒的。

§ 1.2 物 质 方 程

上面已经提到，麦克斯韦方程组还隐含着场与物质的相互作用，这可以通过矢量 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 之间的关系表示出来。这些描述场和物质之间相互影响的关系式称为物质方程。

最简单的是各向同性介质。它的物质方程为

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.2-1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.2-2)$$

式中, ϵ 和 μ 对于非吸收介质为两个实标量; 对于吸收介质为复标量。它们分别称为介电常数和磁导率。本书中也常用相对介电常数 ϵ_r 和相对磁导率 μ_r 来描述物质的特性。它们的定义为

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1.2-3)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (1.2-4)$$

式中 ϵ_0 是真空中介电常数, 其值为 $8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$; μ_0 是真空中磁导率, 其值为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。

在非均匀介质中 ϵ, μ 或 ϵ_r, μ_r 是坐标矢径 $\mathbf{r}$ 的函数。在均匀介质中, 它们是不随空间坐标变化的常数。

在本书中, 还将会遇到非线性物质和色散物质。各种介质的差别表现在它们的物质方程不同。其它形式的物质方程将在有关章节中介绍。

除上述这些物质方程, 尚有两个关系式, 即

$$\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (1.2-5)$$

$$\mathbf{j}_v = \rho \mathbf{v} \quad (1.2-6)$$

式(1.2-5)表明传导电流的强弱不仅决定于所在点的电场强度, 还决定场空间介质的导电率 σ , 它实际上是微分形式的欧姆定律。式(1.2-6)中 $\mathbf{v}$ 为运动电荷的速度, 该式不难从物理概念和式子两边的量纲得出。

§ 1.3 电磁场的边值关系

麦克斯韦方程组是电磁学的基本定律, 对电磁场的问题是普遍适用的。不过, 在电磁学、光学中经常会遇到两种介质的界面。在界面处, 由于介质的性质(用 ϵ 和 μ 描述)发生了突变, $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 也要发生突变。因此, 微分形式的麦克斯韦方程组不

便直接应用,我们需要分析界面两侧的电磁场的变化。

D 的变化 如图 1.1 所示, T 表示两种介质的界面。 T 两侧的介电常数、磁导率分别为 ϵ_1, μ_1 和 ϵ_2, μ_2 。 两侧的 D 矢量分别为 D_1 和 D_2 。 设 δA 是 T 面上的任一微小面元, 通过 δA 作垂直于 T 面的小圆柱体(见图 1.1), 柱顶和柱底紧挨 δA 。 根据散度的物理意义和式(1.1-3)可以知道: 在圆柱体中, D 的通量应等于其内所包含的电荷。 于是得到

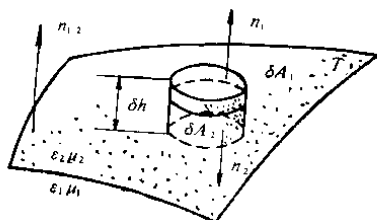


图 1.1 B, D 法线分量的边值关系

$$-D_1 \cdot n_{12} \delta A + D_2 \cdot n_{12} \delta A + \text{柱体侧面的通量} = \sigma \delta A$$

式中 n_{12} 是小面元 δA 的法向单位矢量, 方向从介质 1 指向介质 2; σ 是 δA 面上的面电荷密度。

当柱体的高度趋于零时, D 在其侧面的通量可以忽略。于是从上式得到

$$(D_2 - D_1) \cdot n_{12} = \sigma \quad (1.3-1a)$$

或者

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (1.3-1b)$$

式中 D_{1n}, D_{2n} 分别是 D_1, D_2 沿法向 n_{12} 的分量。当界面上不存在面电荷时,

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (1.3-1c)$$

B 的变化 比较式(1.1-3)和式(1.1-4), 用完全类似的方法可得

到

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0 \quad (1.3-2a)$$

或者

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1.3-2b)$$

这说明在界面两侧磁感应矢量的法向分量连续, 这是磁力线封闭的直接结果。

$\mathbf{H}$ 的变化 如图 1.2 所示, δl 是界面 T 上的任一小线元, 沿界面的单位方向矢量为 $\mathbf{t}$ 。通过这个线元两端作 T 的法线 P_1P_2 和 Q_1Q_2 , 并令 $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \parallel \delta l$, 这样就构成了一个包含界面的小矩形, 它的法向单位矢量为 $\mathbf{b}$ 。在小矩形上对式(1.1-2)的两边取面积分

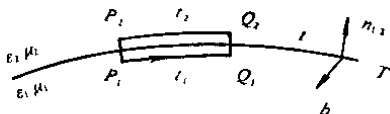


图 1.2 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 界面上的边值关系

$$\int_{\text{小矩形}} \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{b} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{小矩形}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} dS + \int_{\text{小矩形}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} dS$$

对上式左方应用斯托克斯定理就得到

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{小矩形}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} dS + \int_{\text{小矩形}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} dS$$

式中 l 代表小矩形的边界。由于线元 δl 很短, 有理由认为, 在 P_1Q_1 线段上磁矢量处处相同, 其值为 $\mathbf{H}_1$; 在 P_2Q_2 段上磁矢量也处处相同为 $\mathbf{H}_2$, 因此得到

$$-\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} \delta l + \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} \delta l + P_1P_2, Q_1Q_2 \text{ 元段上 } \mathbf{H} \text{ 的贡献}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} \delta h \delta l + \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} \delta h \delta l$$

式中 δh 等于 P_1P_2 与 Q_1Q_2 的长度。令 $\delta h \rightarrow 0$, 由于 $\mathbf{H}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 是有限的, 上式左方最后一项和右方第一项均趋于零, 而 $\mathbf{j} \delta h \rightarrow \mathbf{J}$ 。这里 $\mathbf{J}$ 代表界面上通过与电流方向相垂直的单位线段的电流, 称为线电流密度。于是得到

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{b} \quad (1.3-3a)$$

或

$$H_{2t} - H_{1t} = J_b \quad (1.3-3b)$$

式中 H_{1t}, H_{2t} 表示界面两侧磁矢量沿界面 $\mathbf{t}$ 方向的分量; J_b 是线电流密度在 $\mathbf{b}$ 方向的分量。从图 1.2 易见

$$\mathbf{t} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}$$

将上式代入式(1.3-3a), 并利用恒等式 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ 就得到

$$\mathbf{b} \cdot [\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{b}$$

因为界面上小线元的方向可以任意取, 因此上式对 T 面内任意方向的矢量 $\mathbf{b}$ 都成立, 而且 $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)$ 和 $\mathbf{J}$ 又都在 T 面内, 因此必须有

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J} \quad (1.3-3c)$$

它与式(1.3-3a)或式(1.3-3b)等效。它们都表明: 界面两侧的磁矢量沿界面上任一切线方向的分量之差等于在该切线的单位长度内所流过的线电流。

$\mathbf{E}$ 的变化 比较式(1.1-1)和式(1.1-2), 用完全类似的方法可以得到

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (1.3-4)$$

即界面两侧的电矢量沿界面上任一切向的分量是连续的。

总之, 式(1.3-1)至式(1.3-4)描述了界面两侧的电磁场的变化关系。它们是界面上的麦克斯韦方程组。在以后各章、节中常会用到这些边值关系。

§ 1.4 电磁场的能量守恒和坡印亭矢量

在空间空间的任一体积内,电磁储能的变化由两部份组成:一是电磁能通过该体积界面流进或流出;二是由于电磁场对电荷作功而消耗或由于做负功而累积。电磁场的能量守恒定律要求电磁储能的减少应该等于通过界面流出的能量和电荷所作的功之和。由此可以推导出电磁能流密度的表示式。电磁能流密度就是在单位时间内在与能流方向相垂直的单位面积内所流过的电磁能。在光学领域内,它就是光的强度。由于一切光探测器(包括眼睛)只对能量起反应,所以这个量在光学中是至关重要的。下面由麦克斯韦方程组出发来进行分析。

在单位时间单位体积内,电场对于体电荷密度为 ρ 、运动速度为 $\mathbf{v}$ 的电荷所做的功为 $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j}_v \cdot \mathbf{E}$;对传导电流密度为 $\mathbf{j}_c$ 的电荷所做的功则为 $\mathbf{j}_c \cdot \mathbf{E}$ 。因此,在单位时间单位体积内电场对运动电荷所做的功可写为

$$(\mathbf{j}_v + \mathbf{j}_c) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (1.4-1)$$

磁场对运动电荷所做的功为多少呢?从运动电荷 q 在磁场中所受的洛伦兹力 $\mathbf{F}_M = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 知道,磁场不能使静止电荷($v=0$)受力,而它对运动电荷的作用力始终垂直于电荷的运动方向,即 $\mathbf{F}_M \perp \mathbf{v}$ 。因此磁场只能改变运动电荷的方向,不能改变其速度大小。这样一来,磁场对电荷不做功。所以,单位时间单位体积内,电磁场对运动电荷所做的总功仍由式(1.4-1)表示。

将式(1.1-2)的两边点乘以 $\mathbf{E}$,即得到

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

利用恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$ 和式(1.1-1)就可得到

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \quad (1.4-2)$$

若进一步假定介质是线性的（即 ε 和 μ 不依赖于场强），方程 (1.4-2) 可写成

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (1.4-3)$$

式中标量 w 和矢量 $\mathbf{S}$ 定义为

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (1.4-4)$$

和

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.4-5)$$

在电磁学中已经知道，由式 (1.4-4) 表示的 w 代表电磁能的体密度。这样一来，式 (1.4-3) 的左方就代表单位时间单位体积内电磁能的减少；右方第一项是单位时间单位体积内电磁场对电荷所做的功。根据电磁能守恒定律，右方第二项应该是单位时间内从单位体积流出的能量，亦即等于能流密度 $\mathbf{S}$ 的散度。因此，将式 (1.4-5) 给出的 $\mathbf{S}$ 定义为能流密度矢量是合理的。事实也表明，这样的定义是与实验结果符合的。有关能流密度矢量的公式 (1.4-5) 是由英国物理学家坡印亭 (J·H·Poynting, 1852--1912 年) 在 1884 年首先建立的，因此常将能流密度矢量称为坡印亭矢量。它不仅代表能流密度的大小，而且代表了它的方向。

§ 1.5 波动方程

麦克斯韦方程组是将随时间、随空间变化的电磁场参量密切地联系起来，为了求解电磁场，自然要通过消元法求出电矢量和磁矢量单独随时间、空间变化的方程式。在这里我们只讨论各向同性介质，物质方程由式 (1.2-1) 和 (1.2-2) 给出。另外，在光学所涉

及的场空间内，往往是不含空间电荷和电流的。因此，可以假定 $\rho = 0$ 和 $\mathbf{j} = 0$ 。

将物质方程(1.2-2)代入式(1.1-1)，两边各除以 μ 并取旋度得到

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$$

将式(1.1-2)代入上式，并利用物质方程(1.2-1)就得到

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0 \quad (1.5-1)$$

引用矢量恒等式

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \frac{1}{\mu} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \times \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.5-2a)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.5-2b)$$

和

$$-\mu \nabla \left(-\frac{1}{\mu} \right) = \nabla (\ln \mu) \quad (1.5-2c)$$

式(1.5-1)变成

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (1.5-3)$$

由式(1.1-3)和物质方程(1.2-1)可得

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0$$

应用恒等式 $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \nabla \varepsilon$ ，上式左方展开可得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \ln \varepsilon)$$

将它代入式(1.5-3)得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + (\nabla \ln \mu) \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \nabla (\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon) = 0 \quad (1.5-4)$$

用完全类似的方法可以得到有关磁矢量的方程