高 等 微 積 分 詳 解

（下冊目錄）

第十章　勒白格積分

Upper functions

10.1 證明 $max(f,g)+min(f,g)=f+g$，及 $max(f+h, g+h)=max(f,g)+h$，$min(f+h, g+h)=min(f,g)+h$

證明：任取 $x\in I$

(I)若 $f(x)\geq g(x)$

則 $max(f(x), g(x))+min(f(x), g(x))=f(x)+g(x)$

$max(f(x)+h(x), g(x)+h(x))=f(x)+h(x)=max(f(x), g(x))+h(x)$

$min(f(x)+h(x), g(x)+h(x))=g(x)+h(x)=min(f(x), g(x))+h(x)$

(II)若 $f(x)\leq g(x)$ 亦同理可證上式，$\Rightarrow \forall x\in I$

$max(f(x), g(x))+min(f(x), g(x))=f(x)+g(x)$

$max(f(x)+h(x), g(x)+h(x))=max(f(x), g(x))+h(x)$

$min(f(x)+h(x), g(x)+h(x))=min(f(x), g(x))+h(x)$

$\Rightarrow max(f, g)+min(f, g)=f+g$

$max(f+g, g+h)=max(f, g)+h$

$min(f+h, g+h)=min(f, g)+h$

10.2 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ 爲區間 I 上之上升函數列

令 $\mu_n=max(f_n, g_n)$，$\nu_n=min(f_n, g_n)$

(a)證明 $\{\mu_n\}$，$\{\nu_n\}$爲 I 上之上升函數列

證明：$\forall x\in I$，$\forall n\in N$

$\mu_{n+1}(x)\uparrow= max(f_{n+1}(x), g_{n+1}(x))\geq max(f_n(x), g_n(x))=\mu_n(x)$

$\Rightarrow \mu_n\uparrow$，$x\in I$

(1)若 $f_{n+1}(x)\geq g_{n+1}(x)$

$\nu_{n+1}(x)=min(f_{n+1}(x), g_{n+1}(x))=g_{n+1}(x)\geq g_n(x)\geq$
$min(f_n(x), g_n(x))=\nu_n(x)$

(2)若 $f_{n+1}(x)\leq g_{n+1}(x)$

$\nu_{n+1}(x)=min(f_{n+1}(x), g_{n+1}(x))=f_{n+1}(x)\geq f_n(x)\geq$
$min(f_n(x), g_n(x))=\nu_n(x)$

由(1)(2) $\Rightarrow \nu_n\uparrow$

(b)若 $f_n\uparrow f$，a.e. on I，且 $g_n\uparrow g$，a.e. on I，

試證 $\mu_n\uparrow max(f, g)$，$\nu_n\uparrow min(f, g)$

證：令 $\mu_n \nearrow \mu$，$\nu_n \searrow \nu$

(1) $\mu_n = max(f_n, g_n) \leq max(f, g)$ $a.e.$

$\Rightarrow \mu \leq max(f, g)$

(2) $f_n \leq \mu_n = max(f_n, g_n)$ $a.e.$，$\forall n \in N$

$\Rightarrow f \leq \mu$

同理　$g \leq \mu$

$\Rightarrow max(f, g) \leq \mu$

由(1)，(2) $\Rightarrow \mu = max(f, g)$ 即 $\mu_n \nearrow \mu = max(f, g)$

由 10.1 知　$min(f, g) = f + g - max(f, g)$

$\nu_n = min(f_n, g_n) = f_n + g_n - max(f_n, g_n)$

$\Rightarrow (n \to \infty)$ $\nu = f + g - max(f, g) = min(f, g)$

$\Rightarrow \nu_n \nearrow min(f, g)$

10.3 $\{s_n\}$ 爲上升之階梯函數，在區間 I 上逐點收斂到 f，若 I 無界，且 $f(x) \geq 1$，$a.e.$ on I，試證

$\int_I s_n$ 發散

證明：利用反證法證明之

若 $\int_I s_n$ 收斂（即 $lim \int_I s_n < \infty$）

由定義　10.4　知 $\{s_n\}$ 產生 f，$f \in U(I)$

且 $\int_I f = \lim_{n \to \infty} \int_I s_n < \infty$

$\because$ I 無界，任予 $M > 0$

$\exists J \subseteq I$，使得　$\ell(J) > M$

$\because f \geq 1$

$\therefore \int_I f \geq \int_I \chi_J = \ell(J) > M$

$\Rightarrow \int_I f = \infty$

$\Rightarrow \int_I s_n$ 發散

10.4 $I = [0, 1]$，令 $\{r_1, r_2, r_3 \cdots\cdots\}$ 表 I 上之有理數，

$I_n = [r_n - 4^{-n}, r_n + 4^{-n}] \cap I$

令 $f(x) = 1$，若 $x \in I_n$，for $some$ n

否則　$f(x) = 0$

(a)定義 $\begin{cases} f_n(x)=1 & 若\ x\in I_n\ , \\ f_n(x)=0 & 若\ x\notin I_n\ , \end{cases}$

$s_n = max\,(f_1, f_2, \cdots\cdots f_n)$

試證 $\{s_n\}$ 是一上升階梯函數列產生 f，即 $f\in U(I)$。

證：∵ f_n 是階梯函數，$\forall n\in N$

$\therefore s_n = max\,(f_1, f_2, \cdots\cdots f_n)$ 亦是階梯函數

且 $s_{n+1} = max\,(f_1, f_2, \cdots\cdots f_n, f_{n+1})$

$\geq\ max\,(f_1, f_2, \cdots\cdots f_n) = s_n$

$\Rightarrow s_n \nearrow$,

若 $x\in I_n$, for some $n\in N$

則 $f(x)=1$，且 $f_n(x)=1=s_n(x)=s_{n+1}(x)=\cdots\cdots\cdots\cdots$

若 $x\notin I_n$ $\forall n\in N$

則 $f(x)=0$，且 $f_n(x)=0=s_n(x)$ $\qquad \forall n\in N$

$\Rightarrow s_n(x)\nearrow f(x) \Rightarrow s_n$ 產生 $f \Rightarrow f\in U(I)$

(b)證明 $\displaystyle\int_I f \leq \frac{2}{3}$

證：$\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to\infty}\int_I S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4^n}$

$\displaystyle = \frac{\frac{2}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

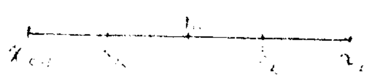
(c)若 s 為一階梯函數，滿足

$s(x)\leq -f(x)$，試證 $s(x)\leq -1$, a.e. on I

證：∵ s 為一階梯函數。

$\Rightarrow \exists\quad 0=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots\cdots<x_n=1$

使得 $s(x)=c_k\ \forall x\in(x_{k-1}, x_k)$



$\forall\ 1\leq k\leq n$，取 $(\alpha_k, \beta_k)\subseteq(x_{k-1}, x_k)$

使得 $\ell(x_{k-1}, \alpha_k) > \frac{1}{4}\ell(x_{k-1}, x_k)$

$\ell(\beta_k, x_k) > \frac{1}{4}\ell(x_{k-1}, x_k)$

∵有理數稠密，故存在無窮多之 $r_n\in(\alpha_k, \beta_k)$

取 $r_n\in(\alpha_k, \beta_k)$，使得 $4^{-n} < \frac{1}{4}(x_k - x_{k-1})$

則 $I_n \subseteq (x_{k-1}, x_k)$

$\forall\ x \in I_n \subseteq (x_{k-1}, x_k)$，$f(x) = 1$

$c_k = s(x) \leq -f(x) = -1$

$\Rightarrow c_k \leq -1$　，　$0 \leq k \leq n$

故可能除了 x_k 之外，$s(x) \leq -1$　，$0 \leq k \leq n$

$\Rightarrow s(x) \leq -1$ $a.e.$ on I

$$\Rightarrow \int_I s \leq -1$$

(d)假設 $-f \in U(I)$ 利用(b)及(c)導至矛盾

解：設若 $-f \in U(I)$

(1)由(a)知 $f \in U(I)$

$$則 \int_I f + \int_I (-f) = \int_I f + (-f) = 0$$

$$\Rightarrow \int_I (-f) = -\int_I f \geq \frac{-2}{3} \quad (由(b))$$

(2)若 $-f \in U(I)$ 則由定義 10.4

$\exists \{s_n\}$ 上升階梯函數列 $s_n \uparrow (-f)$ $a.e.$ on I

$s_n \leq -f$　，$a.e.$ on I，

且 $lim \int_I s_n$ 存在

由(c)知 $\int_I s_n \leq -1$

$$\Rightarrow lim \int_I s_n \leq -1$$

(由定義 10.4)

$$\int_I (-f) = lim \int_I s_n \leq -1$$

但此和(1)矛盾，故 $-f \notin U(I)$

收斂定理

10.5 令 $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$

證明 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$

$$證：\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-nx} - 2e^{-2nx})\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-1}{n} e^{-nx} + \frac{2e}{2n} e^{-2nx}\right]_{x=0}^{\infty}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1-1\right]=0$$

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-nx}-2e^{-2nx})dx$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}\right)dx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}+e^{-2x}-2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}(1-e^{-x})}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\log 2$$

10.6 驗證下列方程式

(a) $\displaystyle\int_0^1\log\frac{1}{1-x}dx=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}dx$

$$=\sum\frac{1}{n}\int_0^1 x^n dx=1$$

(b) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1-x}\log\left(\frac{1}{x}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p)^2}\quad(p>0$

解：(a) $\because\log(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\int_0^1 log\frac{1}{1-x}dx=\int_0^1-\log(1-x)dx$$

$$=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}dx\qquad\left(\because\frac{x^n}{n}\geq 0\ on\ I\right)$$

利用定理 10.25

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^n}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^n dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

(b) $\because\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\ \forall\ 0\leq x<1$

$$\therefore\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1-x}\log\frac{1}{x}dx$$

$$=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+p-1}\log\frac{1}{x}dx$$

$\because x^{n+p-1}\log\dfrac{1}{x}\geq 0\quad\forall_n,\ 0<x<1$

$\Sigma\ x^{n+p-1}\log\frac{1}{x}$ 收斂，由定理 10.25 可以逐項積分。

$$\text{原式}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{n+p-1}\log\frac{1}{x}\,dx\quad(\text{令 } t=\log\frac{1}{x}\Rightarrow x=e^{-t})$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\int_{\infty}^{0}e^{-(n+p-1)t}\cdot t\cdot e^{-t}dt\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(n+p)t}\,t\,dt\qquad(\text{令 } y=(n+p)t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-y}\frac{y}{(n+p)}\cdot d\left(\frac{y}{n+p}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p)^2}\int_0^{\infty}e^{-y}\cdot y\cdot dy$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p)^2}\Gamma(2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p)^2}$$

10.7 證明 *Riemann* 積分之 *Tannery* 收斂定理：任給一函數列 $\{f_n\}$ 及一上升實數列 $\{p_n\}$，當 $n\to\infty$ 時 $p_n\to\infty$。

假設

(a) $f_n\to f$，在 $[a,b]$ 上是均勻的 $\forall\ b\geq a$

(b) f_n 在 $[a,b]$ 上爲 *Riemann* 可積 $\forall\ b\geq a$

(c) $|f_n(x)|\leq g(x)$ a.e. 在 $[a,\infty)$ 上其中 $g\geq 0$ 且在 $[a,\infty)$ 上是 *Riemann* 瑕可積

則 f 及 $|f|$ 在 $[a,\infty)$ 上爲 *Rimann* 瑕可積，數列

$$\left\{\int_a^{p_n}f_n\right\}\text{收斂，且}\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^{p_n}f_n(x)\,dx$$

(d) 利用 *Tannery* 定理證明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^p\,dx=\int_0^{\infty}e^{-x}x^p\,dx\ ,\qquad(p>-1)$$

解：由(b) f_n 在 $[a,b]$ 上爲 *Riemann* 可積及(a) $f_n\to f$ 在 $[a,b]$ 上均勻地 $\forall\ b\geq a$。

$\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上亦爲 *Riemann* 可積，$\forall\ b\geq a$

由(c) $|f_n|\leq g$，a.e. on $[a,\infty)$，$\forall\ n\in N$

$\Rightarrow |f|\leq g$ a.e on $[a,\infty)$

$$\Rightarrow\int_a^b|f|\leq\int_a^b g\leq\int_a^{\infty}g=M$$

由定理 10.33 知

f 及 $|f|$ 在 $[a,\infty)$ 皆是 *Riemann* 瑕可積

現在證明數列 $\{\int_a^{p_n} f_n\}$ 之極限存在，僅須證明 $\{\int_a^{p_n} f_n\}$ 爲一柯西數列即可，

由(c)知 g 是 $[a,\infty)$ 上之 Riemann 瑕可積，即 $\int_a^{\infty} g$ 存在。

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists M>0$，使 $\forall \alpha\geq\beta\geq M$，$\int_{\alpha}^{\beta} g<\varepsilon$

再由(a) $f_n\rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上是均勻地，對此 $\varepsilon>0$，可取 $L_1\in N$

使得 $\forall m,n\geq L_1$

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq\frac{\varepsilon}{M-a}$$

又因 $\{p_n\}$ 是一上升實數列，且 $p_n\rightarrow\infty$，當 $n\rightarrow\infty$ 時，

故存在 $L_2\in N$，使得 $\forall n\geq L_2$ 時，$p_n>M$

現取 $L=max(L_1, L_2)$

則 $\forall n\geqslant m\geq L$，$\forall x\in[a,\infty)$

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{M-a},$$

$$p_m, p_n\geq M$$

$$\int_a^{p_n} f_n-\int_a^{p_m} f_m$$

$$=\int_a^M f_n+\int_M^{p_n} f_n-(\int_a^M f_m+\int_M^{p_m} f_m)$$

$$=\int_a^M (f_n-f_m)+\int_M^{p_n} f_n-\int_M^{p_m} f_m$$

故 $|\int_a^{p_n} f_n-\int_a^{p_m} f_m|$

$$\leq\int_a^M |f_n-f_m|+\int_M^{p_n}|f_n|+\int_M^{p_m}|f_m|$$

$$\leq(M-a)\frac{\varepsilon}{(M-a)}+\int_M^{p_n} g+\int_M^{p_m} g$$

$$\leq\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

故知 $A_n=\int_a^{p_n} f_n$ 爲柯西數列

$\Rightarrow A_n$ 之極限存在。

現欲證

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\int_a^{p_n} f_n=\int_a^{\infty} f$$

∵已證得 f 在 $[a, +\infty)$ 為

瑕 Riemann 瑕可積，$\exists\ K > M$ 使得

$$\left| \int_K^\infty f \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^\infty f - \int_a^{p_n} f_n \right|$$

$$= \left| \int_a^K f + \int_K^\infty f - \int_a^{p_n} f_n \right| \leq \left| \int_K^\infty f \right| + \left| \int_a^K f - \int_a^{p_n} f_n \right|$$

$$\leq \varepsilon + \left| \int_a^M f + \int_M^K f - \left(\int_a^M f_n + \int_M^{p_n} f_n \right) \right|$$

$$\leq \varepsilon + \int_a^M |f - f_n| + \int_M^K |f| + \int_M^{p_n} |f_n|$$

$$\leq \varepsilon + (M - a) \frac{\varepsilon}{M - a} + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_a^{p_n} f_n = \int_a^\infty f$$

(d) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p\, dx$ ， $p > 0$

$$= \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^p\, dx$$

10.8 證明 Fatou's lemma 給定在 $L(I)$ 中非負之函數列 $\{f_n\}$，滿足

(a) $\{f_n\}$ 收斂至 f，a.e. on I

(b) $\displaystyle\int_I f_n \leq A$，for some $A > 0$；$\forall\ n \geq 1$

則 $f \in L(I)$，且 $\displaystyle\int_I f \leq A$

證明：令 $g_n(x) = \inf\ \{f_n(x), f_{n+1}(x) \cdots\cdots\}$

則 $g_n \uparrow f$ a.e. on I

∵ $g_n \leq f_n$

$$\Rightarrow \int_I g_n \leq \int_I f_n \leq A$$

而 $\left\{\int_I g_n\right\}$ 是一上升數列，且上方有界

故 $\lim \int_I g_n$ 存在，且 $\lim \int_I g_n \leq A$

利用定理 10.24 ，知 $f \in L(I)$ 且

$$\lim \int_I g_n = \int_I \lim g_n = \int_I f \leq A$$

Riemann 瑕積分

10.9 (a)當 $p > 1$，證明 $\int_1^\infty x^{-p} \sin t\, dt$ ，同時以 *Riemann* 瑕積分及 *Lebesque* 積分存在。

(b)當 $0 < p \leq 1$，證明(a)中積分以瑕積分存在，但對 *Lebesque* 積分而言不存在。

證明：(a)利用定理 10.31 證明之

$\because x^{-p} \sin x$ 在 $[1, b]$ 上（ $b \geq 1$ ）是 *Lebesque* 可積（見定理 10.11）且

$$\int_1^b |x^{-p} \sin x|\, dx \leq \int_1^b x^{-p}\, dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^b$$

$$= \frac{1}{-p+1}\,[\,b^{1-p} - 1\,] \to \frac{1}{p-1} \quad (\because 1-p < 0)$$

由定理 10.31 知

$x^{-p} \sin x \in L([1, \infty))$ 且 $\in R([1, \infty))$

(b)當 $0 < p \leq 1$

$$\int_1^b x^{-p} \sin x\, dx = -\int_1^b x^{-p}\, d(\cos x)$$

$$= -x^{-p} \cos x \Big|_1^b + \int_1^b \cos x\,(-p)\, x^{-p-1}\, dx$$

$$= (-b^{-p} \cos b + \cos 1) + (-p) \int_1^b x^{-(p+1)} \cos x\, dx$$

$$= A(b) + B(b)$$

上式中 $A(b)$，$B(b)$ 極限值皆存在（當 $b \to \infty$）（ $\because p > 0$ ）

故 $\int_1^\infty x^{-p} \sin x\, dx$ 當 $0 < p \leq 1$ 時 *Riemann* 瑕積分仍然存在。

但 *Lebesque* 積分不存在。若其 *Lebesque* 積分存在，

定義 f_n 如下：（ $f(x) = x^{-p} \sin x$ ）

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x)|, & 1 \leq x \leq 2n\pi \\ 0, & x > 2n\pi \end{cases}$$

則 $\{f_n\}$ 爲上升函數列，且 $f_n \to |f|$

$\because$ 假設 $f \in L([1, \infty))$ 故 $|f| \in L([1, \infty))$（定理 10.16）

且 $|f_n| \leq |f| \quad \forall x \in [1, \infty)$

故由 Lebesgue dominated 收斂定理（定理 10.27）知

$\{\int f_n\}$ 收斂

但 $\int_I f_n = \int_1^{2n\pi} |f|$

$$=\int_1^{2n\pi} |x^{-p}\sin x|\,dx \geq \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}} x^{-1}|\sin x|\,dx$$

$$\geq \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}} x^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\,dx$$

$$\geq \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{(k+\frac{3}{4})\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{2n-1} \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{(k+\frac{3}{4})\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} \to \infty \quad (\text{當 } n\to\infty)$$

故知，當 $0<p\leq 1$

$x^{-p}\sin x \notin L([1,\infty))$

10.10 (a)利用三角恒等式 $\sin 2x$

$= 2\sin x\cos x$，及公式 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$

證明 $\int_0^\infty \frac{\sin x\cos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$

證明：$\int_0^\infty \frac{\sin x\cos x}{x}\,dx$

$$=\int_0^\infty \frac{(1/2)\sin 2x}{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{2x}\,d(2x)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

(b)由(a)及部份分式導出公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

解：$\int_\varepsilon^M \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_\varepsilon^M \left(-\frac{\sin^2 x}{1}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=\left[-\frac{1}{x}\sin^2 x\right]_\varepsilon^M + \int_\varepsilon^M \frac{1}{x}2\sin x\cos x\,dx$$

而 $\left[-\frac{1}{x}\sin^2 x\right]_\varepsilon^M \to 0$，當 $M\to\infty$，$\varepsilon\to 0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin x\cos x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

(c)利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，及(b)

得 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

解：∵ $\sin^4 x=\sin^2 x\cdot\sin^2 x$

$$=\sin^2 x(1-\cos^2 x)=\sin^2 x-\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(\sin 2x)^2}{(2x)^2}d(2x)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

(d)利用(c)得 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$

解：$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}dx=-\frac{\sin^4 x}{3x^3}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \frac{4}{3}\frac{\sin^3 x\cos x}{x^3}dx$

$$=-\frac{2}{3}\frac{\sin^3 x\cos x}{x^2}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty \frac{2}{3x^2}\left[-\sin^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x\right]dx$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$$

10.11 $a>1$，證明積分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^p(\log x)^q dt$，同時對 *Riemann* 瑕積分及 *Lebesque* 積分而言皆存在，此時

當 $p<-1$ 時 q 可任意實數；當 $p=-1$ 時 $q<-1$

解：當 $p<-1$ 時

$$\int_a^\infty x^p(\log x)^q dx$$

$$=\int_a^\infty x^{p+1}\cdot\frac{1}{x}(\log x)^q dx$$

$$=\int_a^\infty x^{p+1}(\log x)^q d(\log x)$$

$$=\int_{\log a}^\infty e^{(p+1)t}t^q dt\ (\log a>0)$$

現模仿 $p.277$ 之例 1，即可得證，

當 $p<-1$

$\int_{\log a}^{\infty} e^{(p+1)t}\, t^{q}\, dt$ 皆存在（對 *Riemann* 瑕積分或 *Lebesque* 積分而言）

$\parallel$

$\int_{a}^{\infty} x^{p}\,(\log t)^{q}\, dx$

當 $p=-1$

$$原式=\int_{a}^{\infty} x^{-1}(\log x)^{q}\, dx$$

$$=\int_{a}^{\infty}(\log x)^{q}\, d(\log x)$$

$$=\int_{\log a}^{\infty} t^{q}\, dt\ ,\ (\ y=\frac{1}{t}\ )$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{\log a}} y^{-q}\ \frac{-1}{y^{2}} dy$$

$$=-\int_{0}^{\frac{1}{\log a}} y^{-q-2}\, dy$$

由 p . 270 之例 1 知，當 $-q-2>-1$ 時，上式積分同時將 *Riemann* 瑕積分和 *Lebesque* 積分而言皆存在，

而 $-q-2>-1$

$\Longleftrightarrow\ q<-1$ ，得證。

10. 12 證明下列各積分同時對 *Riemann* 瑕積分及 *Lebesque* 積分而言，皆存在。

(a) $\int_{1}^{\infty} \sin^{2}\frac{1}{x}\, dx$

(b) $\int_{0}^{\infty} x^{p}\, e^{-x^{q}} dx$

解：令 $y=\dfrac{1}{x}$

$$\int_{1}^{\infty} \sin^{2}\frac{1}{x}\, dx=\int_{1}^{0} \sin^{2}y\cdot\frac{(-1)\,dy}{y^{2}}$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{\sin^{2}y}{y^{2}}\, dy$$

$$\because \lim_{y\to 0}\frac{\sin^{2}y}{y^{2}}=1$$

而 $\dfrac{\sin^{2}y}{y^{2}}\in M(I)$ ，且 $\dfrac{\sin^{2}y}{y^{2}}\le 1$

$\dfrac{\sin^2 y}{y^2} \in L([0,1])$，即在 *Lebesque* 意義下

積分存在 $\int_0^\infty \sin^2\frac{1}{x}dx$，而顯然 $\int_0^1 \frac{\sin^2 y}{y^2}dy = \int_0^\infty \sin^2\frac{1}{x}dx$

在 *Riemann* 瑕積分下存在

(b) $\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx \ (p, q>0)$

令 $y = x^q$ ，$x = y^{\frac{1}{q}}$

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q}dx = \int_0^\infty y^{\frac{p}{q}} e^{-y} \frac{1}{q} y^{\frac{1-q}{q}} dy$$

$$= \frac{1}{q}\int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{p+1}{q}-1} dy$$

$= \dfrac{1}{q}\Gamma\left(\dfrac{p+1}{q}\right)$ 在 *Lebesque* 積分及 *Riemann* 積分下皆存在。

∵ $\Gamma(y)$ 以 *Lebesque* 積分及 *Riemann* 瑕積分存在，

$\forall y>0$（見 *p*.277 例 2）

10.13 判定下列是否以 *Riemann* 瑕積分或 *Lebesque* 積分存在

解：(a) $\int_0^\infty e^{-(t^2+t-2)}dt \le \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

故對二種積分皆存在。

(b) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$

爲 *Riemann* 瑕可積，但不絕對可積，故不是 *Lebesque* 可積

(c) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x(x^2-1)^{1/2}}dx$

∵ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x(x^2-1)^{1/2}} = 0$ ，且當 x 充分大時

$\frac{\log x}{x(x^2-1)^{1/2}} \sim \frac{1}{x^2}$ 而 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ 存在

故 $\int_1^\infty \frac{\log x}{x(x^2-1)^{1/2}}$ 是 *Riemann* 瑕可積，亦是 *Lebesque* 可積

(d) $\int_0^\infty e^{-x}\sin\frac{1}{x}dx$

∵ $\int_0^\infty \left|e^{-x}\sin\frac{1}{x}\right|dx \le \int_0^\infty e^{-x}dx < \infty$

⇒ 兩種積分皆存在。

(e) $\int_0^1 \log x \sin\frac{1}{x}dx$

令 $y=\frac{1}{x}$

則 $\int_0^1 \log x \sin\frac{1}{x}dx$

$=\int_1^{\infty} \log\frac{1}{y}\cdot\frac{\sin y}{y^2}dy$

$=\int_1^{\infty}\frac{(-\log y)\sin y}{y^2}dy$

當 y 充分大時 $\frac{(-\log y)\sin y}{y^2}\sim\frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow\int_0^1 \log x\sin\frac{1}{x}dx$,兩種積分皆存在。

10.14 決定 p、q 之值使下列 *Lebesgue* 積分存在。

(a) $\int_0^1 x^p(1-x^2)^q dx$

$\because\int_0^1 x^p(1-x^2)^q dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}x^p(1-x^2)^q dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p(1-x^2)^q dx$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^p(1-x^2)^q dx$ 之 *Lebesgue* 積分存在

$\Longleftrightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}x^p dx$ 之 *Lebesgue* 積分存在。

$\Longleftrightarrow p>-1$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p(1-x^2)^q dx$ 之 *Lebesgue* 積分存在

$\Longleftrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1 x^1(1-x^2)^q dx$ 之 *Lebesgue* 積分存在

$(\because\lim_{x\to1}\frac{x^p(1-x^2)^q}{x(1-x^2)^q}=1)$

而 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x(1-x^2)^q dx$

$=\frac{-1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x^2)^q d(1-x^2)=\frac{-1}{2}\int_{\frac{3}{4}}^0 t^q dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{4}}t^q dt$

之 *Lebesgue* 積分存在

$\Longleftrightarrow q > -1$

故 $\int_0^1 x^p(1-x^2)^q\,dx$ 之 Lebesque 積分存在

$\Longleftrightarrow p > -1$，且 $q > -1$

(b) $\int_0^\infty x^x e^{-x^p}\,dx$

$$\int_0^\infty x^x e^{-x^p}\,dx = \int_0^\infty e^{x\log x} e^{-x^p}\,dx$$

$= \int_0^\infty e^{(x\log x - x^p)}\,dx$ 之 Lebesque 積分存在

$\Longleftrightarrow x\log x - x^p < 0$，當 x 充分大時

$\Longleftrightarrow p > 1$

(c) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx$

(1) $p = q \quad \int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx = 0$

(2) $p > q \qquad \because \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}}{\dfrac{x^{p-1}}{x}} = 1$

$\therefore \int_{\frac{3}{2}}^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx$，Lebesque 積分存在

$\Longleftrightarrow \int_{\frac{3}{2}}^\infty \frac{x^{p-1}}{x}\,dx = \int_{\frac{3}{2}}^\infty x^{p-2}\,dx$ 收斂

$\Longleftrightarrow p-2 < -1$，$\Longleftrightarrow p < 1$

$$\because \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}}{x^{q-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{p-q}-1}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(p-q)x^{p-q-1}}{-1} = -(p-q)$$

$\therefore \int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx$，Lebesque 積分存在

$\Longleftrightarrow \int_0^1 x^{q-1}\,dx$ Lebesque 積分存在

$\Longleftrightarrow q-1 > -1 \Longleftrightarrow q > 0$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx \text{ ，} Lebesgue \text{ 積分存在}$$

$\Longleftrightarrow$ $0<q<p<1$

(3)若 $p<q$ ，亦可得 $0<p<q<1$

綜合(1)，(2)，(3)

知 $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx$ ，Lebesgue 積分存在

$\Longleftrightarrow$ $0<p$ ，$q<1$

(d) $\int_0^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx$ 。當 $p>0$ ，

$\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^q}\,dx$ ，$y=x^p$ ，$x=y^{\frac{1}{p}}$，

$$=\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^{q/p}}\cdot\frac{1}{p}\cdot y^{\frac{1}{p}-1}\,dy$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^\infty (\sin y)\,y^{\frac{1}{p}-1-\frac{q}{p}}\,dy$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^1 \sin y\cdot y^{\frac{1-p-q}{p}}\,dy+\frac{1}{p}\int_1^\infty \sin y\cdot y^{\frac{1-p-q}{p}}\,dy$$

要第一項積分存在 $\Longleftrightarrow \frac{1-p-q}{p}+1>-1$

$\Longleftrightarrow$ $1-q>-p \Longleftrightarrow q-p<1$

要第二項積分存在 $\Longleftrightarrow \frac{1-p-q}{p}<-1 \Longleftrightarrow q>1$

故當 ，$p>0$ ，$q>+1$ ，$q-p<1$ 時

$\int_0^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx$ ，積分存在 。 當 $p=0$ 時

$$\int_0^\infty \frac{\sin 1}{x^q}\,dx=\int_0^1+\int_1^\infty$$

要使第一項積分存在 $q<1$

而要使第二項積分存在 $q>1$ 　　矛盾

故，當 $p=0$ 時 ，原積分不存在。當 $p<0$ 時

$$\because \int_0^\infty \frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx=\frac{+1}{p}\int_{+\infty}^0 (\sin y)\cdot y^{\frac{1}{p}-1-\frac{q}{p}}\,dy$$

$$=\frac{-1}{p}\int_0^\infty (\sin y)\,y^{\frac{1}{p}-1-\frac{q}{p}}\,dy$$

$$=\frac{-1}{p}\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)$$