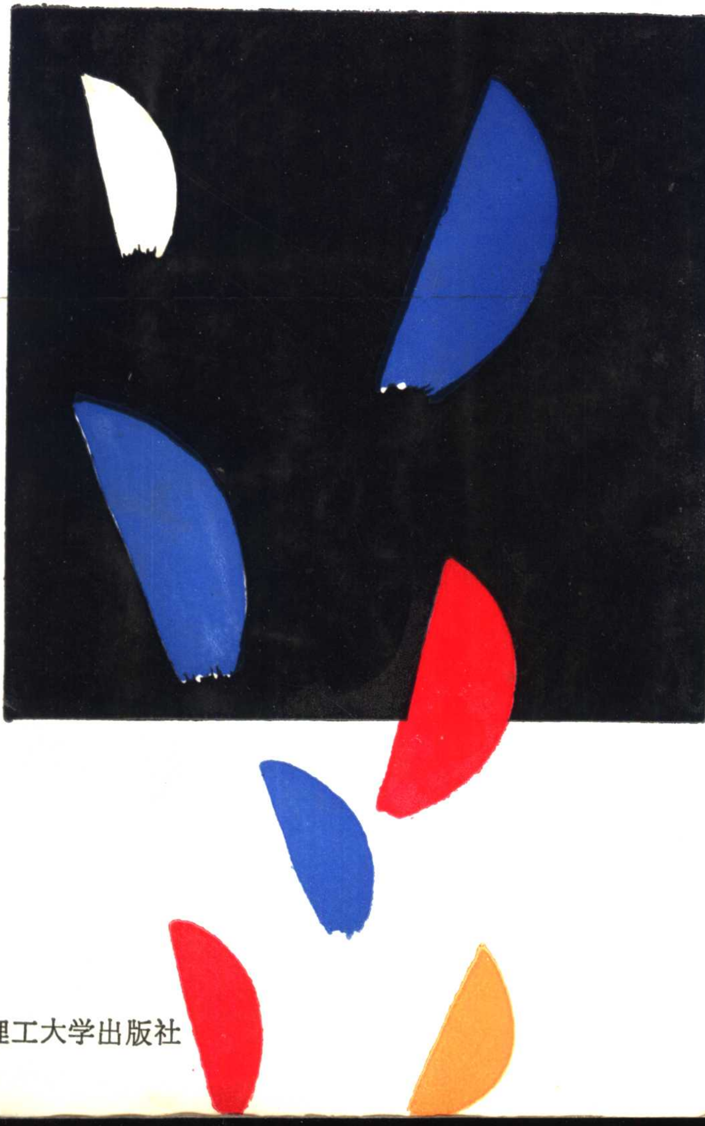
皮明智　雷远学　著

多变量形象的投影理论及应用



华中理工大学出版社

多变量形象的投影理论与应用

华中理工大学出版社

多变量形象的投影理论与应用
皮明智　雷远学　著
责任编辑　弘　菱
*
华中理工大学出版社出版发行
（武昌喻家山）
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：7.5　字数：181 000
1991 年 6 月第 1 版　1991 年 6 月第 1 次印刷
印数：1-1 000
ISBN 7-5609-0594-3/TH·50
定价：3.90 元

内 容 简 介

本书阐述了多变量形象的图示问题，简明、系统地介绍了多维画法几何的理论，提供了计算机绘制多维图形的多面正投影图、轴测图、透视图的数学模型，并对多维空间中的投影变换与坐标变换进行了数学描述，书中还举例说明多维线性问题和多维非线性问题的计算机处理与应用.

本书为科学技术领域中的多变量问题提供了数据形象化的方法，它可作为工程图学专业研究生的教学用书，以及广大的工程图学工作者、计算机图形学工作者、工程技术人员和高等院校师生的参考用书.

前　言

对于科学研究领域内的多参数、多变量和实际的工程课题中的多元素、多成分等各种多维问题，现已有多种数学方法求解，然而用图形来研究它们的图示与图解有其特有的直观和简捷的优点. 但是，长期以来由于图解多维问题时的繁琐、复杂使其实际应用受到限制. 计算机图形学的出现，为多维画法几何理论的研究和发展、多变量形象的图示图解带来了生机. 自 1982 年以来，我们将多维 画法几何学的研究与计算机绘图结合起来，立足于"形"与"数"结合，图解与解析并举，提出了适于计算机处理的多维空间的投影变换及多面正投影图、轴测投影图和透视投影图的数学模型.

该书综合我们近年来在国际国内有关刊物和学术会议上发表的近 20 篇论文写成. 全书共分八章，一～四章主要根据皮明智著的若干篇论文(参考文献[5]、[6]、[12]、[14]等)写成；五～八章主要根据皮明智、雷远学等著的若干篇论文(参考文献[4]、[7]、[8]、[9]、[10]、[11]、[13]、[15]、[16]等)写成. 在这里需指出，在六～八章中分别有华中理工大学工程图学与计算机图学教研室的陈和平、朱林和该室 1985 届研究生班的魏修亭、谭建荣四位同志参加研究的成果. 全书由武汉水利电力学院宋炳罗教授审阅；书中插图全部由华中理工大学庞小勤同志描绘. 在此谨致谢意.

由于作者水平有限，书中的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正.

皮明智　雷远学

1990 年 9 月于武汉

目　录

第一章　E^n画法几何引论

§1-1　概　述

一、 图示多变量形象的理论基础

画法几何的历史是由法国蒙若(Gaspard Monge)开创的.世界各国出版的大学画法几何教材,尽管各具风格,但它的理论和方法基本上还是蒙若法(后人作了大量的工作,完善它、丰富它、发展它);它的内容基本上局限于三维画法几何,即局限于在二维平面上图示和图解三维空间的几何问题.然而,画法几何在几何学领域内是比较年轻的一门学科,三维画法几何是把三维空间的几何关系用图显示出来,建立在平面几何和立体几何的基础上.如此推论,则四维画法几何是把四维空间的几何关系用图显示出来,建立在四维几何的基础上.而等于或高于四维的 n 维画法几何则是把 n 维空间的几何关系用图显示出来,建立在 n 维几何的基础上.我们用 E^n这个符号表示 n 维欧氏空间,把用投影的方法研究 n 维欧氏空间几何关系的画法几何学称为 E^n画法几何.

不论是多变量的线性问题还是多变量的非线性问题若要图示出多变量形象,只有在 n 维坐标系和与之相适应的 n 维投影系中进行.在本书中,由于篇幅有限,不再论及其他体系中的多维画法几何,只研究蒙若体系中的 E^n画法几何.以此作为图示多变量形象的理论基础.

二、 研究 E^n画法几何的思维方法

三维的立体是一个具体的、直观的、生动的形象.其极易被人们领会,E^3中的图示和图解都较易被人们所接受,从几何学的观点

来看，高于三维或低于三维的几何元素都是抽象的，用 $E^0 \sim E^n$ 表示 0～n 维空间，例如点是 E^0，可看作是半径为零的球，不占有空间，即零维空间. 直线是 E^1，是点沿某一方向移动的结果，没有宽度，即一维空间. 平面是 E^2，是直线沿不属于直线方向的某个方向移动的结果，没有厚度，即二维空间. 现在人们对这些现象能够理解，究其原因是由于我们能够在高于它们的三维空间里去认识它们. 然而对于四维以上的几何现象就难于直观理解了，例如在 E^4 中，直线和平面不可能相交，两平面若相交，则相交于一点；在 E^5 中，两平面不可能相交，也不可能平行，只能是相错. 诸如此类的几何现象，如果企图以直观想象去认识，那是不可能办到的，这是由于我们生活在三维的物质世界里去认识高于三维的几何现象所产生的困难之处，设想人们生活在 E^n 之中，有一个 n 维空间的头脑，去认识属于它的子空间，那就像人们在 E^3 中去认识 E^2，E^1 一样容易. 下面将要论述 n 维空间的基本概念和 n 维空间的几何现象，关键是认识的方法不能靠直觉，而是要用逻辑推理和抽象思维，只有这样，才易理解 E^n 画法几何.

三、 n 维空间的基本概念

对于 n 维空间的基本概念的理解：可用解析的方法，即用多变量代数方程来处理，使其研究对象的变量数为维数；也可用几何的方法建立 n 维空间.

点在某一空间里运动时所具有的自由度数就是该空间的维数，已经被人们理解的点，没有自由度，是零维空间；直线上的点有一个自由度，故直线是一维空间；平面上的点有二个自由度，一个是直线本身所具有的，另一个是由它运动方向所决定的，故平面为二维空间；立体有长、宽、高、三个度量，是三维空间；如此升维上去，一点在四维空间里有四个自由度，其中三个是立体本身所具有的，第四个是它的运动方向；那么 n 维空间的点就有 n 个自由度，即 E^n 是 E^{n-1} 沿着不属于它的某个方向运动形成的. 类似地可以得出：任一 E^k，沿不属于它的某个方向运动，则形成 E^{k+1}，在 E^{k+1} 中

的点有 $k+1$ 个自由度，k 个自由度为 E^k 本身所有，再加一个自由度就是运动方向，于是任一维数的空间 E^k，可以由不属于 E^{k-1} 中的 $k+1$ 个点确定，因此空间中线性无关的点的数目减 1 也就是该空间的维数. 换一个说法，每两个无关的点决定一个向量，任一 E^k 有 $k+1$ 个无关的点确定，即有 k 个线性无关的向量，即线性无关的向量数也就是该空间的维数. 由 1, 2, 3, …, $(k+1)$, …, n, $(n+1)$ 个线性无关的点分别确定 E^0, E^1, E^2, …, E^k, …, E^{n-1}, E^n. 由这些点绘出的图形叫做相应维数的单纯形，显然单纯形是一个点群，群中点的数目比空间的维数多 1，这些单纯形可以在 n 维坐标系中图示出来.

四、 n 维空间的基本几何元素

任一维数空间的基本几何元素都可以用相应维数的单纯形给出. 单纯形是最简单的图形，点是零维单纯形；直线是一维单纯形；三点形是二维单纯形；四点形是三维单纯形. 如此推理，不在同一个 E^3 中的五点形是四维单纯形；不在同一个 E^{n-1} 中的 $n+1$ 点形是 n 维单纯形. 于是 E^3 中的基本几何元素为 E^0（点）、E^1（直线）、E^2（平面）；E^4 中的基本几何元素为 E^0（点）、E^1（直线）、E^2（平面）、E^3（超平面）；E^n 中的基本几何元素为 E^0（点）、E^1（直线）、E^2（平面）、……E^{n-1}（超平面）. 其中省略掉的基本几何元素称为相应维数的线性子空间. 任一维数空间的单纯形数是不难计算的，例如 E^5 的单纯形是一个六点形. 它包含的较低维的单纯形是：E^0——6 个（C_6^1 计算）、E^1——15 个（C_6^2 计算）、E^2——20 个（C_6^3 计算）、E^3——15 个（C_6^4 计算）、E^4——6 个（C_6^5 计算）. 如图 1-1 所示.

要在 E^n 坐标系中图示出单纯形，则因单纯形上的每一个点有 n 个自由度，需 n 个坐标值即 n 个条件才能决定. 例如要图示出图 1-1，则图中的六个点在 E^5 坐标系中，每个点都要有五个坐标值才能绘出.

E^n 中的一点有 n 个自由度. 如指出该点属于 E^n 中的某条直线，则因直线上的点有一个自由度，所以就只需给出 $(n-1)$ 个条件，即

自由度为$(n-1)$；若该点属于E^n中的一个平面，则该点的自由度为$(n-2)$；若该点属于E^n中的某线性子空间E^k，则该点的自由度为$(n-k)$；为了确定E^k，需要$(k+1)$个点，显然E^k的自由度应为$(k+1)(n-k)$. 即确定E^n中的E^k所需的条件数是等于E^k的自由度数.

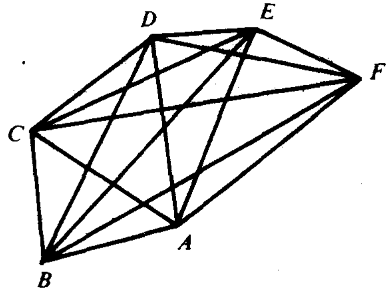


图 1-1

五、 n维空间中的对偶原理

已知在E^3中E^0(点)和E^2(平面)是互为对偶的空间，E^1(直线)是自身对偶的空间. 在三维的射影几何里，由于点和平面对偶，直线自身对偶. 在两个命题中，若有一个命题得到证明，与之对应的对偶命题也就得到证明，使研究大为方便. E^n中几何元素间相互对偶的条件是自由度数相同. 可用E^n中任一维数线性子空间E^k的自由度数$(k+1)(n-k)$计算得出表 1-1.

表 1-1

维空间	d_f^0	d_f^1	d_f^2	d_f^3	d_f^4	…	d_f^{n-1}
E^3	3	4	3				
E^4	4	6	6	4			
E^5	5	8	9	8	5		
⋮							

注：d_f表示自由度数，上角标为几何元素的空间维数.

E^n中的几何元素E^k，其自由度为$(k+1)(n-k)$，在E^n中的几何元素E^{n-k-1}，其自由度也是$(k+1)(n-k)$，因为$[(n-k-1)+1]\times[n-(n-k-1)]=(k+1)(n-k)$，所以，在$E^n$中$E^k$与$E^{n-k-1}$是对偶

的．这样，就能很容易地写出在 E^n 中 E^0 与 E^{n-1} 对偶；E^1 与 E^{n-2} 对偶；E^2 与 E^{n-3} 对偶；……E^{k-1} 与 E^{n-k} 对偶．例如 E^5 中：点（E^0）与超平面（E^4）对偶；直线（E^1）与三维子空间（E^3）对偶；平面（E^2）自身对偶．

应用对偶原理研究 E^n 中几何元素间关系的命题是带来很大方便的．在已经建立的有关命题中，将某一几何元素换成与之对应的对偶几何元素，即可得到 E^n 中几何元素间从属关系的新命题．例如由 E^3 中的公设"属于一直线的两个点确定这条直线"应用对偶原理，在 E^4 中，因点和超平面对偶，直线和平面对偶，于是可得出在 E^4 中"属于一平面的两个超平面确定这个平面"的命题．可见在多维空间里运用对偶原理是十分重要的．

§1-2　E^n 中几何元素间的相交与关联度

一、 E^n 中两几何元素的相交概念

设 E^p 是 E^n 中的 $(p+1)$ 点单纯形，E^q 是 E^n 中的 $(q+1)$ 点单纯形，若它们不相交（即没有公共点），则有 $(p+q+2)$ 个点确定 E^{p+q+1}．E^p 和 E^q 同位于 E^{p+q+1} 内不相交；若 $p+q+1>n$，$E^p\cap E^q=E^r$，E^r 由 $(r+1)$ 点单纯形确定，为确定 E^p，需 $(p+1)-(r+1)$ 个点，即 $(q-r)$ 个点；为确定 E^q，需 $(q+1)-(r+1)$ 个点，即 $(q-r)$ 个点；这样共有 $(p-r)+(q-r)+(r+1)$ 个点，确定 E^{p+q-r}，E^p 和 E^q 同位于 E^{p+q-r} 内且相交，即 E^p 和 E^q 同位于 E^n 内且相交，得出 $n=p+q-r$，即 $r=p+q-n$．

当 $p+q=n$ 时，　E^p 和 E^q 交于 E^0；

$p+q>n$ 时，　E^p 和 E^q 交于 E^r；

$p+q<n$ 时，　E^p 和 E^q 不相交或相交于 E^{-r}．

E^n 中 m 个维数分别为 E^{p_1}、E^{p_2}、…、E^{p_m} 的几何元素，它们相交的结果可用下式计算：

$$E^{p_1}\cap E^{p_2}\cap\cdots\cap E^{p_m}=E^r,$$

$$r = p_1 + p_2 + \cdots + p_m - (m-1)n.$$

例如：

(1) E^3中三个平面相交于一点，

$$E^2 \cap E^2 \cap E^2 = E^{2+2+2-(3-1)\times 3} = E^0.$$

(2) E^4中四个超平面相交于一点，

$$E^3 \cap E^3 \cap E^3 \cap E^3 = E^{3+3+3+3-(4-1)\times 4} = E^0.$$

(3) E^5中五个超平面相交于一点，

$$E^4 \cap E^4 \cap E^4 \cap E^4 \cap E^4 = E^{4+4+4+4+4-(5-1)\times 5} = E^0.$$

读者可以自己计算任一维数空间里诸几何元素相交的结果.

二、 交维数 r 的数值分析

r 的定义 若 $E^p \subset E^n, E^q \subset E^n$，令 $p+q \geqslant n, q \leqslant p$，则 $E^p \cap E^q = E^r$，$r = p+q-n, r \geqslant 0$.

引理 1 $E^p \cap E^q = E^r$，$r = p+q-n$ $(r \geqslant 0)$，令 $q = 1,2,3,\cdots,i,j,k,\cdots,n-3,n-2,n-1$，$p = n-t$，$t = 1,2,3,\cdots,j$，若 n 为偶数，取 $j = n/2$，则 E^i与 E^j 是互为对偶子空间；若 n 为奇数，取 $j = (n-1)/2$，则 E^j是自身对偶子空间，E^i和 E^k是互为对偶子空间. 令 $q \leqslant p$，则 $p = n-j$ 为 E^p与 E^q相交的最低维空间的维数，若 n 为偶数时，$q = j$ 为 E^q与 E^p相交的唯一的 E^q的维数；若 n 为奇数时，$q = j$ 和 $q = k$ 为 E^q与 E^p相交的两个 E^q 的维数.

证 在 E^n中 E^q与 E^{n-q-1}是对偶的（自由度数相同），令 $q = 0,1,2,3,\cdots,i,j,k,\cdots,n-3,n-2,n-1$，则 E^0与 E^{n-1}对偶；E^1与 E^{n-2}对偶；……E^i与 E^{n-i-1}对偶. 令 $j = n/2$（n 为偶数），则 $i = (n/2)-1$，于是 $E^{(n/2)-1}$与 $E^{n-[(n/2)-1]-1}$对偶，即 E^i与 E^j对偶；令 $j = (n-1)/2$（n 为奇数），$i = [(n-1)/2]-1$，$k = [(n-1)/2]+1$，于是 $E^{\frac{n-1}{2}-1}$与 $E^{n-(\frac{n-1}{2}-1)-1}$对偶，即 E^i与 E^k对偶，而 E^j 为自身对偶.

由 $r = p+q-n$，令 $p = n-j$，$q = j$，则 $r = 0$；令 $p < n-j$，则 $r < 0$，即 E^p与 E^q在 E^n 中交于负空间，与相交定义不符；故 $p = n-j$ 为 E^p与 E^q相交的最低维空间的维数.

当 n 为偶数时，$p=n-j=\frac{n}{2}$，$q=j=\frac{n}{2}$ 为 E^q与 E^p相交的唯一 E^q的维数；当 n 为奇数时，$p=n-j=n-\frac{n-1}{2}=\frac{n-1}{2}+1=k$，故 $q=j=\frac{n-1}{2}$ 和 $q=k=\frac{n-1}{2}+1$ 为 E^q与 E^p 相交的两个 E^q的维数.

表 1-2

n \ p (r \ q)		① $q\geqslant n-p$. ② $q\leqslant p$. ③ n 为偶数，$j=\frac{n}{2}$；n 为奇数，$j=\frac{n-1}{2}$.												
n	p	1	2	3	4	5	…	i	j	k	…	$n-3$	$n-2$	$n-1$
2	$n-1$	0												
3	$n-1$	0	1											
4	$n-1$	0	1	2										
	$n-2$		0											
5	$n-1$	0	1	2	3									
	$n-2$		0	1										
6	$n-1$	0	1	2	3	4								
	$n-2$		0	1	2									
	$n-3$			0										
⋮														
n	$n-1$	0	1	2	3	4	…	$i-1$	$j-1$	$k-1$	…	$n-4$	$n-3$	$n-2$
	$n-2$		0	1	2	3	…	$i-2$	$j-2$	$k-2$	…	$n-5$	$n-4$	
	$n-3$			0	1	2	…	$i-3$	$j-3$	$k-3$	…	$n-6$		
	⋮		左边空格 $t>q$					…	…	…	右边空格 $q>p$			
	$n-j$	[n 为偶数时]→							0					
	$n-j$	[n 为奇数时]→							0	1				

注：$r=q-t$；$t=1,\cdots,j$.

定理 1　$E^p\cap E^q=E^r$，$r=p+q-n$ $(r\geqslant 0)$，令 $q=t$，…，j，k，…，$n-t$，$p=n-t$，$t=1$，2，…，j，则 $r=q-t$（t 为位置关系参数）.

证　$r=p+q-n=n-t+q-n=q-t$.

推论 1　当 $t=q$ 时，$r=0$.

推论 2　当 $t<q$ 时，$r>0$.

推论 3　当 $t=q=j$ 时，若 n 为偶数，$E^{n-j}\cap E^{j}=E^{0}$；若 n 为奇数，$E^{n-j}\cap E^{j}=E^{0}$，$E^{n-j}\cap E^{k}=E^{1}$[引理 1].

E^n中 E^p与 E^q的交维数 r 的数值列表 1-2.

三、 E^n 中两几何元素的关联度

关联度是指两几何元素结合的程度，当 E^n中的 E^p包含 E^q时，由$(r+1)$点构成的几何元素单纯形 E^r和由$(q+1)$点构成的几何元素单纯形 E^q是重合的，用 d_i表示关联度，则 $d_i=(r+1)/(q+1)=1$，因此 E^n中是从属关系的两几何元素是完全关联的. 当 E^n中的两几何元素无公共的固有点时，即 $E^p\cap E^q=E^{-r}$，则 $d_i=(-r+1)/(q+1)\leqslant 0$，因此 E^p和 E^q在 E^n中全不关联；当 E^n中的 E^p和 E^q是相交的两几何元素时，因 $r\geqslant 0$，计算出的关联度是大于 0 而小于 1 的.

四、 关联度 d_i的数值分析

d_i的定义　若 $E^p\subset E^n$，$E^q\subset E^n$，$p+q\geqslant n$，$q\leqslant p$，$E^p\cap E^q=E^r$，$r=p+q-n$，用 d_i表示关联度，则 $d_i=(r+1)/(q+1)$，且 $0\leqslant d_i\leqslant 1$.

定理 2　$0<d_i<1$ 是 $r\geqslant 0$ 条件下的关联度，$d_i=(q-t+1)/(q+1)$，$q=t,\cdots,j,k,\cdots,n-t$，$t=1,\cdots,j$.

证　$\because$　$r=q-t$(定理 2)，

$\therefore$　$d_i=(r+1)/(q+1)=(q-t+1)/(q+1)$.

推论 4　当 $t=0$ 时，即 $r=q$，$d_i=1$，E^p与 E^q完全关联，$E^q\subset E^p$.

推论 5　当 $t>q$ 时，即 $r<0$，$d_i\leqslant 0$，E^p与 E^q全不关联，$E^p\cap E^q=E^{-r}$.

推论 6　当 $t=q=j$ 时，若 n 为偶数，E^{n-j}与 E^j 的 d_i为 $1/(j+1)$；若 n 为奇数，E^{n-j}与 E^j的 d_i为 $1/(j+1)$、E^{n-j}与 E^k的 d_i为 $2/(k+2)$[引理 1].

E^n中 E^p与 E^q的关联度 d_i的数值列表 1-3.

表 1-3

n \ p	d_t \ q	1) $q \geqslant n-p$. 2) $q \leqslant p$. 3) n 为偶数，$j=\frac{n}{2}$；n 为奇数，$j=\frac{n-1}{2}$.												
		1	2	3	4	5	…	i	j	k	…	$n-3$	$n-2$	$n-1$
2	$n-1$	$\frac{1}{2}$												
3	$n-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$											
4	$n-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$										
	$n-2$		$\frac{1}{3}$											
5	$n-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$									
	$n-2$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$										
6	$n-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$								
	$n-2$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$									
	$n-3$			$\frac{1}{4}$										
⋮														
n	$n-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	…	$\frac{i}{i+1}$	$\frac{j}{j+1}$	$\frac{k}{k+1}$	…	$\frac{n-3}{n-2}$	$\frac{n-2}{n-1}$	$\frac{n-1}{n}$
	$n-2$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	…	$\frac{i-1}{i+1}$	$\frac{j-1}{j+1}$	$\frac{k-1}{k+1}$	…	$\frac{n-4}{n-2}$	$\frac{n-3}{n-1}$	
	$n-3$			$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	…	$\frac{i-2}{i+1}$	$\frac{j-2}{j+1}$	$\frac{k-2}{k+1}$	…	$\frac{n-5}{n-2}$		
	⋮		左边空格 $t>q$					…	…	…	右边空格 $q>p$			
	$n-j$	[n 为偶数时]→							$\frac{1}{j+1}$					
	$n-j$	[n 为奇数时]→							$\frac{1}{j+1}$	$\frac{2}{k+1}$				

注：$d_t=(q-t+1)/(q+1)$；$t=1,\cdots,j$.

§1-3 E^n中几何元素间的平行与平行度

一、 E^n中两几何元素的平行概念

关于平行的概念，在不同的几何书中是有不同的说法，在这里，将要把平行的概念引申到E^n中去理解. 在E^3中，当两直线的非固有点重合时，两直线平行；当两平面的非固有直线重合时，两平面平行. 那么，如同E^3中的直线有非固有点、平面有非固有直线那样，E^n中有非固有超平面. 当两个$(n-1)$维的超平面的交是一个$(n-2)$维的非固有元素时，则这两个$(n-1)$维的超平面是平行的，这就意味着两几何元素的平行关系可以用两几何元素的非固有元素的完全关联来表示. 正如上面讨论E^n中两几何元素的交与关联度一样，E^n中两几何元素的平行关系也将出现完全平行、全不平行、和部分平行的区别，于是引入E^n中两几何元素平行度的概念. 可以认为平行度就是非固有元素的关联度.

设E^n中E^p和E^q两几何元素相交于非固有几何元素E^r_∞，(无公共的固有元素)，用d_p表示平行度，则$d_p=(r+1)/q$. 由此可以看出当E^n中E^{n-1}与E^q平行时必定为完全平行，因$E^{n-1}\cap E^q=E^{(n-1)+q-n}$，即$r=q-1$，$d_p=(q-1+1)/q=1$，即与$d_i$一样，当$d_p\leqslant 0$时，两几何元素全不平行；当$d_p$大于0而小于1时为部分平行.

二、 平行度d_p的数值分析

d_p的定义 若$E^p\subset E^n$，$E^q\subset E^n$，$p+q\geqslant n$，$q\leqslant p$，E^p与E^q平行可以理解为E^p与E^q相交于非固有几何元素，即$E^p\cap E^q=E^r_\infty$，用d_p表示平行度，则$d_p=(r+1)/q$，且$0\leqslant d_p\leqslant 1$.

定理3 $0<d_p\leqslant 1$是$r\geqslant 0$条件下的平行度，$d_p=(q-t+1)/q$，$q=t,\cdots,j,k,\cdots,n-t$，$t=1,\cdots,j$.

证 $\because$ $r=q-t$(定理2)，

$\therefore$ $d_p=(q-t+1)/q$.

推论7 当$t=1$时，则$d_p=1$，E^p与E^q完全平行，且$q=1,2,3$，