分析动力学

陈文良 洪嘉振 周鉴如 编著

FENXI DONGLIXUE FANGFA

上海交通大学出版社

内容提要

本书从工程需要出发，系统介绍了研究复杂机械系统动力学的方法，包括建立系统的数字模型方法、定性以及定量地求解动力学方程的基本方法.

本书自成体系，将建模与求解方法融为一体来研究系统的动态特性，这在国内外同类书籍中还不多见.

全书共分 8 章，包括：1.基本概念与力学的变分原理；2.完整系统的数学建模；3.非完整系统的数学建模；4.运动稳定性基本概念及定常系统几何方法；5.定常系统的运动稳定性；6.非定常系统的运动稳定性；7.非线性振动的近似解析法(Ⅰ)；8.非线性振动的近似解析法(Ⅱ)

本书可作为工科大学大学生和研究生的教学用书，书中附有例题和习题，便于自学．也可供科技人员参考.

分析动力学

出　版：上海交通大学出版社
　　　（淮海中路1984弄19号）
发　行：新华书店上海发行所
印　刷：常熟市印刷二厂
开　本：850×1168（毫米）1/32
印　张：11.75
字　数：315,000
版　次：1990年12月　第一版
印　次：1991年1月　第一次
印　数：1—1500
科　目：238—296
ISBN7—313—00785－x/TK

定价：2.85元

前　言

当前科学技术的迅速发展使得如航天器、机器人、车辆等各种机械系统愈来愈复杂，在研制和开发这些系统时必须深入研究它们的力学性态，这就要求涉及这些系统的工科大学的大学生和研究生以及相关的工程技术人员能有效地解决这些问题．这里是指如何将具体的工程对象抽象为物理模型；针对这个物理模型建立数学模型；然后利用各种方法处理数学模型并研究工程对象的动力学性态．

在建立数学模型方面，牛顿的矢量力学提供了很好的方法，这些内容在大学的理论力学中已经作了详细介绍．但是随着工业的发展，需要处理诸如机器等约束系统的动力学问题．当应用矢量力学的方法来建立约束系统动力学的数学模型时，常常由于未知的约束力出现在微分方程中而不便于求解，因此需要发展新的约束系统动力学的数学模型的方法．1788 年拉格朗日的《分析力学》一书问世，开始了用分析的方法来研究力学，主要研究约束系统动力学的数学建模和通过坐标变换来寻找初积分．以后哈密顿等人进一步发展了拉格朗日的工作．

分析力学的方法能有效地处理受约束离散系统的数学建模问题，也能处理连续系统和混合系统的数学建模问题。因此本书的前 3 章介绍了分析力学的方法及其新进展．

对于复杂的机械系统来说，所建立的数学模型常常属非线性的常微分方程类型，甚至可能是强的非线性方程．因此仅仅依靠坐标变换的方法来求解非线性方程是远远不够用的．客观的需要促进了非线性动力学的发展，现在求解非线性方程的方法已比较多，除了利用计算机对微分方程直接进行数值积分的方法以外，

求解方法基本上可分为两大类．一类是定性研究方法，就是研究解在给定运动邻近的动力性态（即稳定性），另一类是定量研究方法，就是用摄动理论研究系统的动态特性．

庞加莱在19世纪末为这两类方法做了奠基性的工作．本书从第四章开始介绍这两类方法及其新的进展．

本书从工程需要出发，力图系统地阐明处理复杂机械系统动力学的方法，包括建立系统的数学模型和定性或定量地求解的基本方法．

本书自成系统，目的是使读者在阅读本书以后，能够掌握这些方法的基本内容，并在工程实践中加以应用．

本书可以作为工科大学的教材．作者曾多年将本书内容在工程力学、造船和海洋工程、机械工程、动力机械工程和土木建筑工程等专业课上讲授，教学效果良好．本书是在整理讲稿基础上写成．

本书亦可作为在职工程技术人员的参考书，书上有例题和习题，便于自学．有工科大学数学、力学基本知识者均可阅读本书．

参加本书编写工作的有陈文良（第一至三章）、洪嘉振（第四至六章）和周鉴如（第七至八章）．由于编者学识所限，错误不当之处在所难免，敬请读者批评指正．

编者　　1990年4月

目 录

第一章 基本概念与力学的变分原理

1.1 基本概念

分析动力学方法是以离散系统为主要研究对象的．所谓离散系统是指这样的力学系统，它在空间的位置可由有限个独立的参数来确定，例如由有限个质点和刚体组成的系统．如果需要无限多个独立的参数来描述力学系统的位置，则称为连续系统，如包含弹性体、流体等变形体在内的系统即是．在大量的自然界和工程系统中，离散的力学模型常可足够精确地反映系统的动力学性态，并且由于离散系统较连续系统容易处理，因此离散系统动力学有着十分广泛的应用价值．

由于力学系统的原理和方程都与一些基本概念有关，因此本节将首先讨论这些概念．

1.1.1 完整系统

当一个工程上的力学系统运动时，总是对系统中点的位置和速度事先加上一些几何的或运动学特性的限制，这些限制称为约束．例如当一个曲柄连杆机构运动时，各个点的位置受到几何约束；当一个球在粗糙平面上作纯滚动时，球与平面接触点的速度为零，即速度受到限制．

一个离散系统总可用有限个坐标参数 u_1、u_2、…、u_n 来描述其位置．例如由 N 个质点组成的系统可用 $3N$ 个笛卡儿坐标来确定其位置．如这一系统受到 l 个约束，而约束方程中只包含这些坐标参数或者除此之外还包含时间 t，即

$$f_r(u_1, u_2, \cdots, u_n) = 0, r = 1, 2, \cdots, l, \qquad (1\text{—}1)$$

或

$$f_r(u_1,u_2,\cdots,u_n;t)=0, r=1,2,\cdots,l. \tag{1—2}$$

这种形式的约束和能化成这种形式的约束称为完整约束. 完整约束是对系统在时刻 t 的可能位置加以某种限制. 约束方程中不显含时间t的称为定常约束，而显含t的称为非定常约束.

图 1-1 所示曲柄连杆机构中，如选坐标参数$u_1=\theta$, $u_2=\varphi$, $u_3=x$，则显然 θ, φ 与 x 不是完全独立的，它们之间受到如下方程的约束：

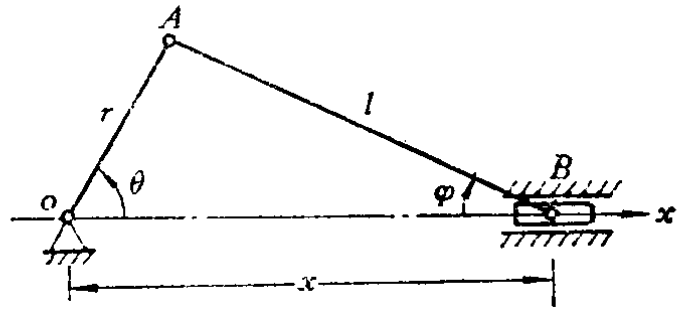
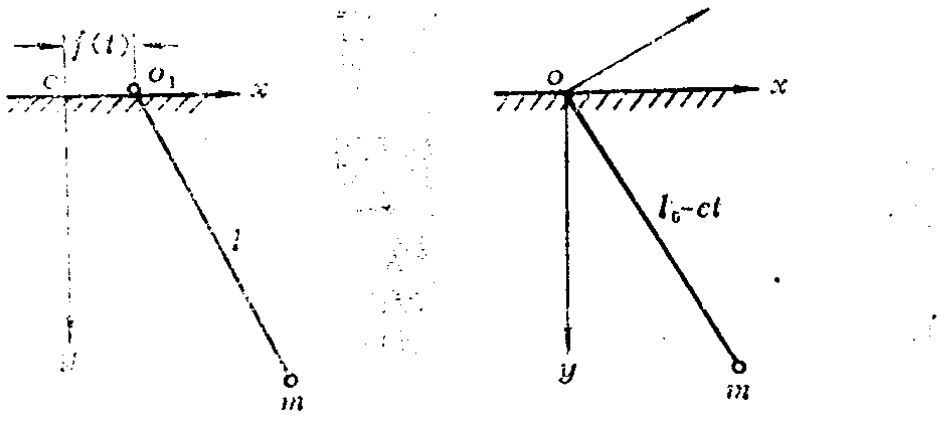


图1-1 曲柄连杆机构

$$x=r\cos\theta+l\cos\varphi.$$

$$r\sin\theta-l\sin\varphi=0.$$

它们是定常的完整约束.



(a) (b)

图1-2 单摆的约束

(a) 单摆支点以已知规律$f(t)$运动 (b) 单摆长度以匀速c变化

再看图 1-2(a)单摆支点 o_1 以已知运动规律 $f(t)$沿 ox 轴运动，若选质点 m 的坐标为 u_1、u_2 参量，即 $u_1=x$, $u_2=y$,则约束方程为

$$[x-f(t)]^2+y^2=l^2.$$

在图 1-2(b)中，单摆长度以匀速 c 变化，设 $t=0$ 时长度为 l_0，则约束方程为

$$x^2+y^2=(l_0-ct)^2.$$

显然上述两个约束方程表示了非定常的完整约束.

当方程(1—1)和(1—2)中函数 f_r 对各个自变量的一阶,偏导数存在且连续时，则将这两组方程求导，分别得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial u_s}\dot{u}_s=0,\quad r=1,2,\cdots,l, \tag{1—3}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial u_s}\dot{u}_s+\frac{\partial f_r}{\partial t}=0,\quad r=1,2,\cdots,l \tag{1—4}$$

(1—3)与(1—4)式中虽然包含了速度 $\dot{u}_s$，但显然可以积分成(1—1)或(1—2)式，只是相差一个积分常数。(1—3)与(1—4)式亦可写成微分形式，即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial u_s}\mathrm{d}u_s=0,\quad r=1,2,\cdots,l,$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial u_s}\mathrm{d}u_s+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0,\quad r=1,2,\cdots,l. \tag{1—5}$$

当一个力学系统受到的约束全是完整约束时称为完整系统.

1.1.2 非完整系统

上面讨论了完整约束，其特点是对系统的位置加以某种限制. 我们现在讨论约束对系统的速度加以限制的情形. 先来看一个例子，图1-3(a)表示一冰撬上装一冰刀，在平滑冰面上运动时，接触点 $P(x,y)$的速度只能沿着冰刀方向，这个限制 P 点速度的约束方程可表示为

$$\dot{y}/\dot{x}=\mathrm{tg}\theta, \tag{1—6}$$

亦可写成

$$\sin\theta\mathrm{d}x-\cos\theta\mathrm{d}y=0 \tag{1—7}$$

形式，我们注意到上述约束只是对冰撬上 P 点的速度方向进行了限制，并没有限制冰撬的位置，即坐标 x、y、θ可任意给定，

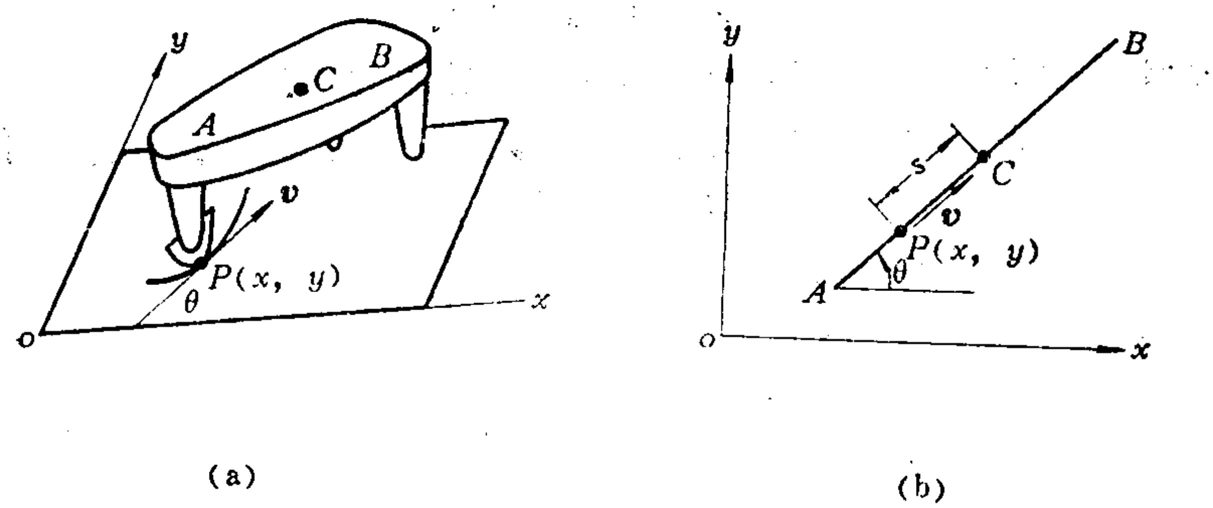


图1-3 冰撬运动

但在给定位置上，P 点速度必须满足约束方程式(1—6)．即将证明，这个约束方程是不可积分的．如果可以积分，那么积分后约束方程中将只出现位置参量而不出现速度，于是约束也就成为完整约束了．图1-3(b)则是冰撬的力学模型，以后要用到．

如果约束方程中包含速度而又不可积分或者约束方程表示为微分形式而又不可积分，如式(1—6)或(1—7)那样，则这种约束称为非完整约束．非完整约束是对系统速度的限制．若系统受到 m 个非完整约束，则一般地约束方程可表示为

$$f_r(u_1,u_2,\cdots,u_n;\ \dot{u}_1,\ \dot{u}_2,\cdots,\dot{u}_n;t)=0,\quad r=1,2,\cdots,m. \tag{1—8}$$

由于约束方程中只包含不高于一阶的导数，所以这种约束称为一阶非完整约束，当方程(1—8)为速度 $\dot{u}$ 的非线性函数时称为一阶非线性非完整约束．通常碰到的则多是速度的线性函数的情形，这时称为一阶线性非完整约束，可表示为

$$\sum_{s=1}^{n} A_{rs}\dot{u}_s+A_r=0,\quad r=1,2,\cdots,m, \tag{1—9}$$

或

$$\sum_{s=1}^{n} A_{rs}\dot{u}_s=0,\quad r=1,2,\cdots,m, \tag{1—10}$$

式中的 A_{rs} 和 A_r 可以是常数或 u_s 和 t 的函数．上述方程常常写成所谓普法夫形式，即

$$\sum_{s=1}^{n} A_r \mathrm{d}u_s + A_r \mathrm{d}t = 0, \quad r = 1,2,\cdots,m, \quad (1\text{—}11)$$

或

$$\sum_{s=1}^{n} A_{rs} \mathrm{d}u_s = 0, \quad r = 1,2,\cdots,m \quad (1\text{—}12)$$

的形式．当 $A_r \equiv 0$ 时，方程(1—10)或(1—12)对速度$\dot{u}_s$是线性齐次的，所以称为线性齐次非完整约束；当 $A_r \neq 0$ 时，则方程对 $\dot{u}_s$ 是非齐次的．

如果约束方程中包含了加速度而又不可积分，则非完整约束称为是二阶的．同样地可定义高阶非完整约束．由于一阶线性非完整约束应用上最重要而理论上又发展得最完备，因此以后的讨论将只限于这种情况．

一个力学系统只要受到一个非完整约束，就称为非完整系统．

1.1.3 判别约束是否完整的几个定理

完整系统与非完整系统在其特征和动力学处理方法上各有自己的特点，而系统的完整与否是根据约束是否完整来区分的．因此有必要建立判断约束是否完整的准则．我们将讨论（1—11）和(1—12)形式的约束方程，也就是普法夫形式．下面给出几种普法夫型方程完整与否的判别定理，但不加以证明．

(1) 三个变量的单个普法夫型约束方程

$$A(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_1 + B(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_2 + C(u_1,u_2,u_3)\mathrm{d}u_3 = 0, \quad (1\text{—}13)$$

可积的充要条件为

$$A\left(\frac{\partial C}{\partial u_2} - \frac{\partial B}{\partial u_3}\right) + B\left(\frac{\partial A}{\partial u_3} - \frac{\partial C}{\partial u_1}\right) + C\left(\frac{\partial B}{\partial u_1} - \frac{\partial A}{\partial u_2}\right) = 0. \quad (1\text{—}14)$$

推论：如果满足条件：

$$\frac{\partial A}{\partial u_2}=\frac{\partial B}{\partial u_1},\quad \frac{\partial A}{\partial u_3}=\frac{\partial C}{\partial u_1},\quad \frac{\partial B}{\partial u_3}=\frac{\partial C}{\partial u_2},\quad (1—15)$$

则方程(1—13)一定是可积的。

方程(1—15)是约束方程(1—13)左端为某一函数的全微分的必要与充分条件，但却不是方程(1—13)可积所必需的。

对于冰撬滑行时的约束方程(1—6)来说，如设

$$u_1=x,\quad u_2=y,\quad u_3=\theta,$$

则

$$A=\sin\theta,\ B=-\cos\theta,\ C=0.$$

于是代入判别约束是否完整的方程(1—14)的左端，得

$$\sin\theta(\sin\theta)+(-\cos\theta)(-\cos\theta)=1\neq 0$$

可见条件(1—14)不满足，约束方程(1—7)不可积，因此是非完整的。

(2) n 个变量的单个普法夫型约束方程

对于 n 个变量 u_s(其中之一可以是时间)的约束方程：

$$\sum_{s=1}^{n}A_s(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_s=0, \qquad (1—16)$$

可积的充要条件为

$$A_\gamma\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}\right)+A_\beta\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\gamma}-\frac{\partial A_\gamma}{\partial u_\alpha}\right)$$
$$+A_\alpha\left(\frac{\partial A_\gamma}{\partial u_\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial u_\gamma}\right)=0,\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,n.$$

(1—17)

推论：如果满足条件：

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial u_\alpha},\qquad \alpha,\beta=1,2,\cdots,n,$$

则方程(1—16)一定可积。

(3) n 个变量的 l 个独立的普法夫型约束方程

n 个变量 u_s(其中之一可以是时间)的 l 个独立的约束方程：

$$\sum_{s=1}^{n}A_{rs}(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_s=0,\ r=1,2,\cdots,l<m,$$

(1—18)

完全可积的充要条件为

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial A_{r\beta}}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial A_{r\alpha}}{\partial u_\beta}\right)X_\alpha Y_\beta=0, r=1,2,\cdots,l,$$

式中 X_α、Y_β 是代数方程：

$$\sum_{s=1}^{n}A_{rs}x_s=0,\quad r=1,2,\cdots,l$$

的任两解组.

推论： 如果约束方程组(1—18)满足

$$\frac{\partial A_{r\beta}}{\partial u_\alpha}=\frac{\partial A_{r\alpha}}{\partial u_\beta},\ \alpha,\beta=1,2,\cdots,n,\ r=1,2,\cdots,l,$$

那么一定是完全可积的.

1.1.4 广义坐标、虚位移与自由度

(1) 广义坐标

对于由 N 个质点组成的系统，总共有 $3N$ 个笛卡儿坐标 u_1、u_2、…、u_{3N} 来描述它在空间的位置，这些坐标的集合称为系统的位形. 若系统承受 l 个完整约束：

$$f_r(u_1,u_2,\cdots,u_{3N};t)=0,\ r=1,2,\cdots l, \qquad (1—19)$$

则确定系统在每一时刻的位形的独立参量数目就不再是 $3N$ 个了，这些确定系统位形的独立参量称为系统的广义坐标，常用 q_1、q_2、…、q_n 表示. 显然由 N 个质点组成的系统受到 l 个几何约束时，广义坐标的数目

$$n=3N-l.$$

若系统还承受 m 个非完整约束，

$$\sum_{s=1}^{3N}A_{rs}\mathrm{d}u_s+A_r\mathrm{d}t=0,\ r=1,2,\cdots,m, \qquad (1—20)$$

则因非完整约束不能积分，它们只限制速度，不影响确定系统位形的独立参量数目，所以广义坐标数 n 不变.

一旦选定广义坐标，则各质点的径矢 $\boldsymbol{r}_i$ 均可表为广义坐标的函数. 若约束是非定常的，则总可以表示为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots q_n;\ t),\quad i = 1, 2, \cdots, N. \qquad (1\text{—}21)$$

若约束是定常的，则通常可表示为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n),\quad i = 1, 2, \cdots, N. \qquad (1\text{—}22)$$

如在坐标变换关系式中不显含 t，如(1—22)那样，则系统称为定常系统；如显含 t，如(1—21)那样，则称为非定常系统。

当用广义坐标来描述系统位形时，完整约束自动满足；但若系统还受到 m 个非完整约束(1—20)，则这些约束方程亦可用广义坐标 q_i 及其导数 $\dot{q}_i$（或微分 $\mathrm{d}q_i$）表示为

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ri}\mathrm{d}q_i + a_r\mathrm{d}t = 0,\quad r = 1, 2, \cdots, m, \qquad (1\text{—}22)$$

式中的 a_{ri} 与 a_r 可以是常数，或者是广义坐标和时间的函数．当 $a_r \equiv 0$ 时，则约束方程对广义速度是齐次的．

(2) 虚位移与自由度

上面已讨论到 N 个质点组成系统受到 l 个完整约束(1—19)和 m 个非完整约束(1—20)，如果将完整约束写成(1—5)那样的微分形式，并令 $\dfrac{\partial f_r}{\partial u_s} = A_{rs}$ 和 $\dfrac{\partial f_r}{\partial t} = A_r$，则约束方程(1—19)与(1—20)可合在一起写成如下形式：

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs}\mathrm{d}u_s + A_r\mathrm{d}t = 0,\quad r = 1, 2, \cdots, g,\ g = l + m < 3N. \qquad (1\text{—}23)$$

因为有了约束，各质点的位移就不再是彼此无关．凡是从时刻 t 的实际位形出发，在微小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内，系统中各质点满足约束方程(1—23)的位移称在可能位移．各质点的可能位移 $(\mathrm{d}u_1\ \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{3N})^T$ 构成了一组可能位移，或者说，一个可能位移矢量．因为 $g < 3N$，因此可能位移组（可能位移矢量）不止一个，而有多个．

我们知道系统运动时真实的位移也必须满足约束条件，因此真实位移必然是可能位移中的一个．但真实位移除了满足约束条件外，还必须满足运动微分方程和初始条件，所以可能位移未必是

真正发生的位移.

在完整系统或非完整系统力学中都广泛应用虚位移的概念. 我们把在任一给定时间、从给定位置出发作约束所允许的假想的无限小位移，这种位移称为虚位移. 如果系统中各质点的虚位移用 $\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_{3N}$ 表示，则它们必须满足方程

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs}\delta u_s = 0,\ \ r = 1, 2, \cdots, g, g = l + m < 3N. \tag{1—24}$$

比较可能位移必须满足的方程(1—23)与虚位移必须满足的方程(1—24)，可见后者没有包含 $\mathrm{d}t$ 的这一项，这是由于计算虚位移时时间 t 给定不变的缘故。注意到这里 δ 是表示变分的记号。

将方程(1—24)与方程(1—23)和(1—5)比较可知：对于受定常的完整约束和齐次的线性非完整约束的系统来说，可能位移与虚位移是一致的；对于有非定常的完整约束或非齐次的线性非完整约束的系统，则两种位移是不一致的.

现在我们来看图 1-2 中单摆运动的例子，由图(a)中的约束方程，可求得 m 点的可能位移分量 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 满足

$$[x - f(t)](\mathrm{d}x - \dot{f}\mathrm{d}t) + y\mathrm{d}y = 0,$$

而虚位移的分量 δx 与 δy 则满足

$$[x - f(t)]\delta x + y\delta y = 0.$$

由于约束是非定常的，所以可能位移与虚位移不一致. 我们还可以从图 1-4 中更形象地看到可能位移与虚位移的区别：图(a)中表示 m 点的可能位移由两部分合成，一部分是沿 x 方向分量 $\dot{f}\mathrm{d}t$，另部分是垂直于 o_1m 的分量 $l\mathrm{d}\theta$；图(b)中表示 m 点的虚位移仅为垂直于 o_1m 的矢量 $l\delta\theta$，这是由于取虚位移时时间 t 固定不变，即 $\delta t = 0$，相当于动点 o_1 凝固不动. 对于图 1-2(b)中质点 m 的可能位移与虚位移，读者可自行比较.

一般地讲，对于非定常的完整系统中各点取虚位移时，可以设想在时刻 t 时约束被“凝固”而瞬时具有定常系统的特征. 也就