数学规划模型建立与计算机应用

〔英〕H.P.威廉斯 著

孟国璧 等译 王昌曜 校

国防工业出版社

integer pro-

数学规划模型建立与计算机应用

〔英〕 H.P.威廉斯 著

孟国璧 等译

王昌曜 校

国防工业出版社

内 容 简 介

数学规划是运筹学的一个重要分支，是现代经济管理的重要手段之一。本书作者根据长期从事管理工作和教学工作的经验，编写了这本如何建立实际管理问题的数学规划模型的著作，旨在培养人们利用数学规划来解决管理工作中实际问题的能力。全书共十四章分为四个部分。主要内容有：建立数学规划模型的原理和方法；从不同经济领域提出的二十个管理问题；给出这些问题合理的数学规划模型及其最优解。本书内容丰富实用，阐述深入浅出，便于阅读。

本书适合各级管理人员、工程技术人员、科研工作者以及大专院校有关专业师生阅读。

Model Building in Mathematical Programming

H. P. Williams

John Wiley & Sons, 1978

*

数学规划模型建立与计算机应用

〔英〕 H. P. 威廉斯 著

孟国璧 等译

王昌曜 校

*

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码 100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张$11^1/_4$ 294千字

1991年6月第一版 1991年6月第一次印刷 印数：0,001—2,400册

ISBN 7-118-00510-X/O·38 定价：9.15元

译 者 的 话

近些年来，数学规划所达到的高度成就，已成为国民经济各部门、各企事业单位日常规划的工具。目前，这种技术正向纵深发展，并取得越来越大的成就，因此，引起人们的普遍关注。

人们要想用数学规划来解决实际问题，必须先将该问题的实质抽象为数学规划模型。但是，迄今大多数有关数学规划的书籍，对于系统地提出和研究建立数学规划模型问题重视不足，给这种技术的推广应用带来困难。

为了弥补这种缺陷，本书作者在书中以主要篇幅从理论与实际的结合上阐述了如何建立数字规划模型问题。然后举出二十个实际问题逐一建立其模型，同时给出数字计算机求解的结果，从而使读者能够了解在工作中应该如何应用数学规划来解决经济管理中的实际问题。

书中所列举的二十个实例，虽然取材面广，但都能用国内外现有的程序包程序方便地求解。个别实例可能与我们的国情不符，但在求解方法上仍具有参考价值。

所以，本书对那些熟悉本职业务又迫切希望将数学规划技术用于自己专业中去的人们，无疑是一本比较好的入门书。

翻译过程中，我们对原书中的一些错误和遗漏作了补正，重要之处加了注释。由于我们的水平所限，译文中定有不少欠妥甚至错误之处，望读者批评指正。

本书由丁济川译了第三章、常伯浚译了第五章，孟国璧译了其余部分。全书由王昌曜校对。在翻译过程中得到不少同志的热情鼓励和支持，在此一并表示衷心的谢意。

前　言

数学规划是运筹学中应用极其广泛的技术之一。在许多情况下，采用这种技术取得了如此成功，以致它的用途已超出了运筹学的范畴，成为人们日常的规划工具。但是，令人奇怪的是，文献中对于数学规划模型的建立问题却很少给予重视，甚至连判断在何种情况下可采用这样模型的问题也很少涉及。现有的大多数著作倾向于两个方面：第一类是研究具体问题的实际应用，它发表在运筹学杂志和专门的工业杂志上；第二类是研究特种问题的新算法，在偏重理论研究的一些杂志上有这方面的大量论著。本书的第一部分讨论了建立数学规划模型的一般原理，想以此填补上述两类著作的空白。第二部分介绍二十个能用数学规划求解的实际问题。为使问题简化，研究实例时力求避免繁琐的细节推导，只保留问题的实质，以便于理解。最后，第三和第四部分给出了这些问题的数学模型和解答。

现有的数学规划方面的书，尤其是线性规划方面的已有很多。但这类书籍大多数是把重点放在计算方法上。鉴于这方面的内容已经很多且充分地在这类书籍中论述了，故本书不再过多地涉及算法方面的内容，主要是把重点放在模型的建立和解释上，而不在求解的过程上。尽管如此，仍然期望本书也能够激发读者深入钻研数学规划在算法上经常碰到的一些难题。但是，作者认为应将研究实际问题与建立其数学模型放在首位。这可以激发人们去寻求这类模型的解法。其实，只要实际问题能用数学规划形式表示出来，就不一定需要懂得算法了，因为现在已可以利用第二章中所讨论的一些市售程序包，使实际模型的求解高度自动化。

对于已经具备了一些初步数学规划知识的读者来说，本书的部分可能价值不大，故可跳过不读，或一览而过。但其余部分

却是先进的，介绍了一些相当新的材料，尤其是整数规划一章更是如此。事实上，本书可不按章节顺序阅读，有些章节可以交叉参照，故读者阅读本书时可以从一个章节跳到另外一个有关章节。

本书以下列三类读者为对象：

（1）本书打算为综合性大学和工科院校的大学生像传统教育那样既要在极其严格的数学规划的计算方法上，又要在建立模型的原理上打下一个扎实的基础。对于最终要采用数学规划解决实际问题的那些大学生来说，建立模型方面的知识大概更加重要。本书第二部分的那些问题可作为列公式的练习。先将模型表示成公式，然后借助于计算机求解，使学生掌握列公式的技巧，以便列出尽可能满意的公式。他可以把他的数值解与其他同学用不同方式建立的模型所得到的数值解进行对照。依靠这种办法，他就能学会建立一个有效模型的方法。

同时也希望这些问题能对研究生探索数学规划问题的新算法有所裨益。他们经常不得不依靠一些无效的模型或随意建立的模型去试验他们的计算程序。其实这样的模型已远远失去了客观问题的特征。况且，他们还可能在一个或多个步骤上脱离了实际情况。因此，他们就难以弄清所需要的有效公式和算法。

（2）本书还打算为管理人员提供一种相当好的评价方法，以便对数学规划的范围和局限性等问题进行非技术性的评价。而且，在看过了第二部分的实例以后，他们也许能认识到在自己的机构中也可以应用数学规划工具，对于这一点在过去却没有意识到。

（3）最后，建立一个机构的数学模型是了解该机构的最好方法之一。希望广大的读者能够应用本书所介绍的原理建立数学模型，从而将那些单靠言语难以解释清楚的系统所起的作用揭示出来。作者有这样的经验，建立一个机构的数学模型的过程，甚至比求得这个模型的解受益还要大。任何人要想真实地建立一个机构的模型，他就不得不去透彻地了解该机构内部各方面所存在的复杂的相互关系。

本书的第一部分介绍了建立数学规划模型的原理，并阐

怎样从实际问题中得到这些模型。重点介绍了线性规划模型、整数规划模型和可分规划模型。这部分还对求解这些模型的一些实际情况进行了讨论。此外，还对所得到的解，进行了十分细致地讨论。

第二部分详细介绍了二十个实际问题中的每个问题，以使读者能用所给的数据建立数学规划模型。

第三部分详细地讨论了每个问题，并列出合理的数学规划模型公式。

第四部分给出了第三部分所列公式的最优解。同时还介绍了一些计算经验，使读者对于求解具体模型所遇到的计算技术上的困难有些感性认识。

希望读者在学习第三和第四部分之前，要亲自将这些问题列成公式并尽可能求出其解。

所有的问题都能够用一种以上方法列出其数学规划模型公式。有些问题，采用其他方法求解可能比用数学规划好。但这已超出了本书的范围。显然，某些问题可以相当明确地确定，比如，在最高“利润”或最低“成本”的意义下，可以预料有一个唯一的最优解（尽管如第六章所述，也许还存在另外的最优解）。然而，对于另外一些问题，可能连一个正确的解答也没有。把实际情况变成数学规划模型公式的过程也许要作某些近似和假设，由此就产生不同的最优解。根据这些解与第四部分所给解的接近程度，就能够看出，采用数学规划去研究此问题的价值。

由范围广泛的二十个实例的介绍中可以看出，数学规划技术作为处理这些问题的一种统一方法，充分显示出它的效能。我们有意安排了一些“不寻常”的问题，目的在于希望通过这些问题启示人们将数学规划应用到较新的领域中去。

H.P.威廉斯

目 录

第一部分

第一章　引　　论

1.1　模型的概念

在众多的科学应用中，常常要用到模型。“模型”一词，通常是指人们为揭示某一研究对象的性能和特征而建立的结构。一般地说，模型中只保留研究对象的少数几项性能和特征，这取决于所赋予模型的任务。有时，模型是有形的，如风洞试验用的飞机模型。但在运筹学中，经常用到的却是抽象模型。这些模型通常是以能反映研究对象（通常它是一个机构）内在关系的代数式来表示的，故称做数学模型。虽然“模型”的含义有时要广泛得多，包括一些纯描述性的模型，但是，我们所要研究的主要限于数学模型。

在运筹学中，数学模型的基本特点是有一组反映客观事物间实实在在关系（如技术关系、物理定律、销售约束条件等）的数学关系式（如方程式、不等式、逻辑关系式等）。

建立这种模型的动机是：

（1）通过建立模型经常能揭示出许多人所不明了的关系，其结果加深了对建模对象的了解。

（2）模型建成后，就有可能从数学上对它进行分析，从而帮助我们提出那些也许不是显而易见的行动方针。

（3）用模型作试验是可能的，而用建模对象去作试验却往往是不可能或不希望的。如果在一个国家中采用可能造成灾难性后果的不寻常的经济措施去作试验，显然，这种作法既不会被人们所欢迎又要冒政治上的风险。而采用数学模型进行这种大胆的实验研究则是更为（虽说并非完全）可取的。

重要的是，要认识到一个模型实际上是用组成该模型的一些关系式来定义的。这些关系式在很大程度上与模型的数据无关。一种模型可用于诸如成本、技术系数、资源利用率等不同数据的多种场合。即使模型的某些系数改变了，通常仍然应当认为该模型是不会变的。当然，这一特性也不是绝对的。如果数据有了根本的变动，通常应该认为原关系式及模型都将变动。

在运筹学（以及如工程、经济等其他领域）中所采用的许多模型都取标准型，本书所考虑的许多模型属于最普通的标准型。其他一些比较通用的数学模型有仿真模型、网络规划模型、经济模型和时序模型。但在实际工作中，还常常会涌现出许多其他类型的模型。因而，就这些模型本身来说，已成为不少值得认真研究的方面。应当强调的是，任何这样一种标准型模型的清单都不可能是毫无遗漏的和唯一的，因为总还会有一些实际情况尚不能用标准方法建立其模型的。因此，建立，分析和试验这样一些新类型的模型仍然是件有意义的工作。对于一些实际问题，通常能用不止一种的标准方法（以及非标准方法）来建立其模型。运筹学工作者早就认识到，将不同类型的模型所得结果进行对比，是十分有价值的。

对于数学模型的价值，尤其是用于规划方面的价值，有着许多不正确的概念。一种极端的情况是，有些人完全否认模型在规划方面的应用。他们的批评往往是以不可能满意地将所需大量特性用数量表示出来为根据的，例如把成本或效用附加到社会价值中去。个别严厉的责难是围绕着那些列入一个数学模型里的大量数据的精度可能不高而提出的，例如，一个模型里有 100000 个系数有疑问，那么怎能相信由这种模型所得到的答案呢？要答复前一种批评比较困难，好在这种批评已由许多分析成本受益的辩护人作了极其详尽的说明而解决了。但有一点看来是不能否认的，即许多决策往往要涉及一些难以用定量表示的概念，如果要作出决策，其中势必要给这些概念以一种不可避免的隐含定量。通过将它编入数学模型使这样的量变得明确，看来就更真实、更

科学了。对于有关数据精度的第二种批评，将在各个特定模型中加以回答。虽然模型中的许多系数也许不够精确，但仍然有可能由于模型结构而使其解的误差并不太大。在6.3节中要对这个问题作进一步探讨。

另一个极端与上述情况恰好相反，有些人完全不顾上述批评，却形而上学地信赖作决策用的数学模型（特别是如果还要利用计算机作决策）。模型解答的质量显然取决于模型结构的精度和数据的精度。就数学规划模型而言，显然研究对象的定义也影响答案。无批判地信赖模型显然是不对的，也是危险的，这种态度是由于对应该怎样使用模型这个总概念有误解而造成的。不作进一步分析和提问就接受由数学模型所得出的首次解答，是极少有的。应该把模型作为作决策的多种手段之一。对于模型所产生的答案须仔细审查，如果模型所提供解答是一个不能接受的工作方案，则应阐明其原因。如有可能，还应在修正模型时把它考虑进去。如果这是个可以接受的解答，明智的做法也只是把它作为一个备选方案来考虑。规定另一个目标函数（在数学规划情况下）可得另外的备选方案。通过对许多解答连续的提问和更改模型（或它的目标函数），就有可能澄清其中合理的备选方案，并且还能更好地理解哪个方案是可取的。

1.2 数学规划模型

应该指出，数学规划（Mathematical Programming）与计算机程序设计（Computer Programming）大不相同。数学规划一词中的"Programming"是指"规划"的意思。因此，它并不需要计算机做什么。由于采用"Programming"一字引起的混乱是非常普遍的，令人遗憾[一]。因为实际问题几乎总要涉及大量的数据和计算，而这只能靠计算机的运算能力求得合理解决，

[一] 英文的数学规划(Mathematical Programming)与计算机程序设计(Computer Programming)两词中都含有Programming一字，因此容易引起二者之间概念上的混淆，而在中文里却无此问题。——译者

所以在数学规划中利用计算机就变得不可避免了。然而应该弄清计算机程序设计与数学规划之间的正确关系。

各种数学规划模型所具有的共同特点是，它们都涉及最优化问题。我们希望某些东西有最大值或最小值。希望它是最大或最小的量，称为目标函数。可惜，由于数学规划一次只能优化一个目标，这往往使人们误以为数学规划不适用于目标不清晰或有多个目标的实际情况。正如第三章中所说，这种看法往往是不正确的，当实际情况中不存在清晰的单一目标时，对模型的某一方面进行优化也常常是有价值的。

在本书中，我们把注意力放在一些特种模型上，并且能够十分容易地把它们分成线性规划模型、非线性规划模型和整数规划模型三类。现在先用一个小型例子来说明什么是线性规划模型。

例 1 线性规划模型（产品混合）

某工厂采用研磨和钻孔两种加工工艺生产五种产品：PROD1，PROD2，…，PROD5。

扣除原材料的成本后，每件产品可获得的利润如下：

	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
利润(镑)	550	600	350	400	200

每件产品在每一种加工中所花费的工时为：

	PROD 1	PROD 2	PROD 3	PROD 4	PROD 5
研磨(h)	12	20	—	25	15
钻孔(h)	10	8	16	—	—

此外，每件产品的最后装配需要工时 20 h。

该厂有三台磨床和两台钻床，每周工作 6 d，每天两班，每班 8 h。另用 8 名工人进行装配，每人每天一班。为获取最大的总利润，试求每种产品各应生产多少？

这是应用线性规划求解所谓“产品混合”问题的一个很简单的例子。

为了建立数学模型，引进变量 x_1、x_2、…、x_5，它们分别表示一星期内 PROD 1、PROD 2、…、PROD 5 应生产的件数。

因为PROD 1 每件可获得利润550镑，PROD 2 每件可获得600镑，等等，故可用下式表示可获得的总利润：

$$550x_1+600x_2+350x_3+400x_4+200x_5 \qquad (1)$$

工厂的目标是选取 x_1、x_2、…、x_5 以使上式的值尽可能地大。故式（1）是我们希望使之成为最大值的（就此问题而言）目标函数。

显然，我们的工艺和劳力，在某种程度上限制了 x_j 的取值范围。因只有3台磨床，每台一星期工作96 h，共有磨床工时288 h。PROD 1 每件需要磨床工时12 h，x_1 件将需 $12x_1$ h。同理，x_2 件 PROD 2 将需 $20x_2$ h。一星期所用的磨床总工时以不等式（2）的左边项来表示：

$$12x_1+20x_2+25x_4+15x_5\leqslant 288 \qquad (2)$$

式（2）以数学形式说明每星期可用的磨床工时不得超过288 h。式（2）即为约束条件。它限制（或约束）了变量 x_j 的取值范围。

钻床每星期的工时为192 h。故可给出如下的约束条件：

$$10x_1+8x_2+16x_3\leqslant 192 \qquad (3)$$

最后，装配工作总共只用8名工人，每人每星期工作48 h，可给出工作时间为384 h。由于装配每件产品花费工时均为20 h，故得如下的约束条件：

$$20x_1+20x_2+20x_3+20x_4+20x_5\leqslant 384 \qquad (4)$$

现在，我们已把原来的实际问题用数学规划模型表示出来了。该模型所具有的这种特殊形式就是线性规划模型。这个模型就是一个意义明确的数学问题。我们要找出这样大小的一组变量 x_1、x_2、…、x_5，使表达式（1）即目标函数的值尽可能地大并满足约束条件（2）、（3）和（4）的要求。这里应认识到，在这个具体问题中为什么使用“线性”一词。这是因为表达式（1）以及约束条件（2）、（3）、（4）的左边项全是线性的，即哪里也不会出现如 x_1^2、x_1x_2 或 $\lg x$ 等项。

还应该看到，在这个模型中有许多隐含的假设。首先，显然

必须假定变量 x_1、x_2、…、x_5 不能取负值，也就是说，哪种产品的数量也不能为负值。这些条件可用如下的附加约束条件清楚地表示出来：

$$x_1、x_2、\cdots、x_5 \geqslant 0 \quad (5)$$

除另有说明外，在大多数的线性规划模型中，都隐含着非负约束条件式（5）。其次，我们已假定变量 x_1、x_2、…、x_5 的值可以取小数，即认为生产2.36件PROD 1是有意义的。这个假定可能成立，也可能不成立。例如，如果PROD 1是表示啤酒的加仑数，就可以取小数；但是，如果它代表的是摩托车的辆数，采用小数就失去了意义。实际上，如果将小数四舍五入化为最近的整数，引入的误差不大，那么，在这类模型中对变量取小数的假设是完全可取的。否则，只好采用整数规划。上述模型说明，线性规划模型具有如下一些基本特性：

（1）有一个单个的线性表达式（目标函数），以求其最大值或最小值；

（2）有一组以线性表达式形式给出的约束条件，而这些线性表达式应不超过（⩽）某一给定值。线性规划约束条件也可以采用“⩾”或“=”的形式，这表示某一线性表达式的值不得低于或正好等于某一给定值。

（3）一般把约束条件（2）、（3）和（4）右边的那组系数288、192、384叫做右边列。

当然，实际模型要大得多（变量和约束条件都多得多），也复杂得多，但是它们总是具备上述三个基本特性的。上述模型的最优解见6.3节。

为了进一步说明怎样由实际问题建立线性规划模型，我们给出第二个小型例题。

例2 线性规划模型（配料）

制造食品时，先要精炼各种原油，然后将它们掺合在一起。原油分为两类：

植物油　　VEG 1