高等学校函授教材

(兼作高等教育自学用书)

微积分讲义

上 册

朱光贵 主编

宇航出版社

高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

微积分讲义

上册

朱光贵 主编

学苑出版社

高等学校函授教材

（兼作高等教育自学用书）

微积分讲义

下　　册

朱光贵　主编

宇航出版社

内 容 简 介

本书是为中国人民大学函授学院的学员学习微积分而编写的函授教材。

全书分上、下两册，共八章，按照现行高等院校财经类专业本科学生学习的要求编写。

本书编写的特点是便于自学：重点突出，深入浅出，辅以较多的例题和习题，对部分习题作了解答。

本书可作为成人高校财经类专业的教材，也可作为全日制高校学生和自学青年学习微积分的参考书。

微 积 分 讲 义
上 册
朱光贵 主编
责任编辑：姜明河
•
宇航出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经销
北京农业工程大学印刷所印刷
•
开本：850×1168 1/32　印张：12.75　字数：330千字
1988年6月第1版第1次印刷　印数：1—12,000册
ISBN 7-80034-065-1/G·012　定价：4.20元

内 容 简 介

本书是为中国人民大学函授学院的学员学习微积分编写的函授教材。

全书分上、下两册，共八章，按照现行高等院校财经类专业本科学生学习的内容要求编写。

本书编写的特点是便于自学：重点突出，深入浅出，辅以较多的例题和习题，对部分习题作了解答。

本书可作为成人高校财经类专业的教材，也可作为全日制高校学生和自学青年学习微积分的参考书。

微积分讲义

下 册

朱光贵 主编

责任编辑：姜明河

宇航出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

北京农业工程大学印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：13.625 字数：366千字

1988年12月第1版第1次印刷 印数：1-11000册

ISBN 7-80034-107-0/G·018 定价：4.50元

前　言

本书是为中国人民大学函授学院的学员学习微积分而编写的函授教材，也可供自学微积分的读者参考。

全书共分八章。第一章函数；第二章极限与连续，是微积分的基础；第三章导数与微分；第四章中值定理与导数的应用，是一元函数的微分学部分；第五章不定积分；第六章定积分，是一元函数的积分学部分；第七章多元函数，主要介绍二元函数的微积分；第八章是无穷级数。

作为函授教材，本书编写的基本指导思想是便于学员自学，因此在阐述每一问题时，力求讲得条理清楚，重点突出，概念明确，深入浅出。对于读者在自学中可能发生困难的地方，都作了比较详尽的分析和推导。每一基本内容后面的例题也选得较多，同时将解题过程尽量写得易于接受。每一章基本内容的后面均附有学习的基本要求和内容提要，以便学员复习和掌握重点。

进行函授学习，首要的环节就是自学，即自己阅读教材，一定要在每次面授课之前自学完指定的章节。自学可以按以下步骤进行：第一步先粗略地读一遍，初步了解一下这一部分的内容；第二步是精读，要逐字逐句地仔细阅读，搞清每一概念，掌握每一定理或计算方法，尽量弄懂证明的过程；第三步回忆并记住这一部分主要的内容，将没有弄懂的地方（证明过程或计算方法）做上记号，然后参加面授课，听完面授课之后，再复习一下这部分内容，做到基本掌握。最后，认真地做所布置的作业，在做作业时最好不要看书，即不要边看书边做作业，力争独立地完成作业。如果实在做不出来，可以参考例题或题解，但最终一定要自己真正掌握解题的方法。

由于编者水平有限，书中定有不少缺点和错误，请读者批评指正。

编　者

1987年3月

目　　录

目　录

常用字符表

字符	含意
A, B, C	集合
a, b, c	集合的元素
$a\in A$	a是集合A的元素
$a\bar{\in} A$	a不是集合A的元素
ϕ	空集
U	全集
$A\subset B$	A是B的子集
$A\cup B$	A与B的并集
$A\cap B$	A与B的交集
$[a, b]$	闭区间
(a, b)	开区间
$[a, b)$，$(a, b]$	半开区间
$\|x\|$	x的绝对值
$(x_0-\delta, x_0+\delta)$	以x_0为中心、半径为δ的邻域
$y=f(x)$	y是x的函数
$D(f)$	函数f的定义域
$Z(f)$	函数f的值域
m	函数在$[a, b]$上的最小值
M	函数在$[a, b]$上的最大值
$\{y_n\}$	通项为y_n的数列
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$	当n趋于无穷时数列的极限
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	当x趋于无穷时函数$f(x)$的极限

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	当x趋于$-\infty$时函数$f(x)$的极限
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	当x趋于$+\infty$时函数$f(x)$的极限
$x\to x_0$	自变量x趋于x_0（但$x\neq x_0$）
$f(x)\to A$	$f(x)$趋于A（$f(x)$可以等于A）
$x\to x_0^-$	x从左边趋于x_0（$x\neq x_0$）
$x\to x_0^+$	x从右边趋于x_0（$x\neq x_0$）
ε	预先给定的任意小的正数
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$	无穷小量
Δx	自变量x的改变量
Δy	函数y的改变量
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	平均变化率（差商函数）
$f'(x_0),\ y'\|_{x=x_0}$	函数$y=f(x)$在x_0处的导数
$f'_-(x_0)$	函数$f(x)$在x_0处的左导数
$f'_+(x_0)$	函数$f(x)$在x_0处的右导数
$f'(x),\ y',\ \dfrac{dy}{dx}$	函数$y=f(x)$在x处的导数
$\eta=\dfrac{P}{Q}\dfrac{dQ}{dP}$	需求弹性
$f''(x),\ y'',\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$	函数$y=f(x)$的二阶导数
$f^{(n)}(x),\ y^{(n)}$	函数$y=f(x)$的n阶导数
dx	自变量x的微分
$dy=f'(x)dx$	函数y的微分
ξ	区间（a，b）中的一点
$\int f(x)dx=F(x)+c$	函数$f(x)$的不定积分
$\int_a^b f(x)dx$	函数$f(x)$在$[a,\ b]$上的定积分

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$	无穷级数
u_n	无穷级数的一般项（通项）
S_n	无穷级数的第n次部分和
$S_1, S_2, \cdots$	无穷级数的部分和数列
$R_n(x)$	无穷级数的余项
R	幂级数的收敛半径
$z=f(x, y)$	z是x, y的二元函数
$f'_x(x_0, y_0)$	$f(x, y)$在(x_0, y_0)处对x的偏导数
$f'_y(x_0, y_0)$	$f(x, y)$在(x_0, y_0)处对y的偏导数
$f''_{xx}(x, y)$	$f(x, y)$在(x, y)处对x的二阶偏导数
$f''_{yy}(x, y)$	$f(x, y)$在(x, y)处对y的二阶偏导数
$f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$	$f(x, y)$在(x, y)处对x, y的混合偏导数
$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$	函数$z=f(x, y)$的全微分
$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$	函数$z=f(x, y)$在区域D上的二重积分

第一章 函　　数

变量之间的相互依赖关系即所谓函数关系，是微积分研究的对象。在学习初等数学时，我们已对函数的概念有了初步的了解。本章是在初等数学讨论的基础上，进行复习和补充，以加深对函数的认识。为便于学习，先介绍集合和实数集的基本知识。

§1.1 集　　合

一、集合的概念

集合是现代数学中的一个最基本的概念。它是在1895年由德国数学家康托尔(Georg Cantor 1845—1918)建立起来的。

虽然在最初建立微积分的时候，并没有集合的概念，但是现在我们学习微积分时，最好还是先学集合的基本知识。

起初，康托尔是这样定义集合的：把一定的并且彼此可以明确识别的东西——东西可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起，叫做集合。

现在一般是这样定义集合的。

定义：具有某种属性的事物的全体称为集合（或简称为集），组成集合的每个事物称为该集合的元素。

通常我们用大写拉丁字母$A,B,C\cdots$，表示集合，而用小写字母a，b，c，…，表示集合的元素。

例如

所有的自然数1，2，3，…，n，…组成一个集合，叫自然数集，记为N；

所有的有理数组成一个集合，叫有理数集，记为Q；

所有的实数组成一个集合，叫实数集，记为R；

某个班级的全体学生组成一个集合；

全国所有的工厂组成一个集合。

前三个例子中的元素都是数，相应的集合叫数集，后面两个例子中的元素都不是数，也可以组成集合。所以，只要是具有某种属性的事物的全体，都可以叫集合。

不过应当注意：事物的属性一定要能明确识别才行，否则不能叫集合。

例如，“某个班级中高个子学生的全体”就不能组成集合，因为“高个子”这个属性不好明确识别，到底身高多少才叫高个子，这不明确。因此也就无法确定这个集合到底由哪些元素（学生）所组成（不过近来又出现了模糊集合的概念，它可叫模糊集合）。

如果集合中元素的个数是有限的，则叫有限集合（上面的后两个例子都是有限集合），否则，称为无限集合（上面的前三个例子都是无限集合）。

如果 a 是集合 A 的元素，则记为 $a \in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记为 $a \overline{\in} A$，读作 a 不属于 A。

二、 集合的表示法

表示集合通常有以下两种方法：

1. 列举法：按任意的顺序将集合的所有元素一一列举出来，外面加上花括号。

例1 由1，2，3，4四个数组成的集合 A，可以表示为

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

例2 如果将张三，李四，王五组成的乒乓球队叫做集合 B，则 B 可表示为

$$B = \{\text{张三，李四，王五}\}$$

例3 由所有的自然数1，2，3，…，n，…组成的自然数集 N，可以表示为

$$N = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

其中的省略号“…”表示那些没有列举出来的元素，我们很容易理解它的含意。

列举法可以使我们很清楚地看到集合有哪些元素，但它只能用于有限集合（如例1，例2）和可列无限集合（如例3）。

对于象实数集这样的不可列无限集合，用列举法就不行了。

注意：用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素（但可以省略那些很容易看出来的元素），不能遗漏，也不能重复。

2．构造式法：如果 x 是集合 S 的元素，且 x 具有某种属性 $p(x)$，则集合 S 可表示为

$$S=\{x \mid p(x)\}$$

这就是构造式法。花括号内先写明集合的元素，然后加一道竖线，最后写明元素的属性。

例4　如果 A 为方程 $x^2-3x+2=0$ 的根组成的集合，则 A 可表示为

$$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$$

例5　如果 B 是全体偶数组成的集合，则 B 可表示为

$$B=\{x \mid x=2n,\ n\text{为整数}\}$$

例6　如果 C 是数轴上大于1且小于等于2的点的全体组成的集合，则 C 可表示为

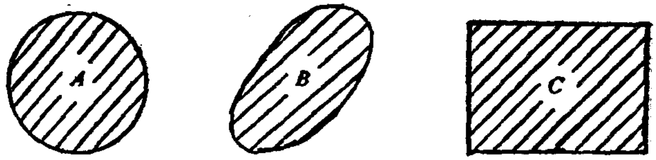
$$C=\{x \mid 1<x\leqslant 2,\ x\text{为实数}\}$$

例7　如果 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 以内（包括圆周）的点组成的集合，则 D 可表示为

$$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

以上例4是有限集合，例5是可列无限集合，它们都可以用列举法表示；例6、例7是不可列无限集合，只能用构造式法表示。

为了方便，常用一个简单的平面区域表示某个集合，而用区域内的点或子区域表示集合的元素，这种图形叫文氏图，如图1-1。



集合A　　集合B　　集合C

图 1-1

三、集合的运算

在讲集合的运算之前，先介绍一下空集、子集、集合相等和全集等概念。

空集：不包含任何元素的集合称为空集，记为ϕ。例如方程$x^2+1=0$的实数根的全体组成的集合，就是一个空集，即有

$$\phi=\{x \mid x^2+1=0,\ x\text{为实数}\}$$

注意：集合$\{0\}$不是空集，它是由0这个元素构成的集合。

子集：如果集合B的每个元素都是集合A的元素，则称B是A的子集，记为

$$A \supset B \quad \text{或} \quad B \subset A,$$

读作A包含B或B包含于A，如图1-2。

例如有理数集Q是实数集R的子集，即$R \supset Q$；自然数集N是有理数集Q的子集，即$N \subset Q$。

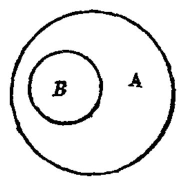


图 1-2

为了方便，我们规定：空集ϕ是任何集合S的子集，即$\phi \subset S$。

例如，设集合$A=\{a,\ b,\ c\}$，则A一共有8个子集：

ϕ

$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$

$\{a,b\}$，$\{b,c\}$，$\{c,a\}$

$\{a,\ b,\ c\}$

注意：以上的子集的概念，不同于一般所谓真子集的概念。