经济应用数学基础

微积分

刘　原　柳翠华
金　璐　邢纯生　编著

武汉大学出版社

前　言

《经济应用数学基础——微积分》是经济类大专院校十分重要的一门基础课.在经济高速发展的今天,随着现代数学方法、统计方法的应用和发展,要求从事经济研究、经济计划和经济管理的人员,必须学习和掌握越来越多的数学知识.作为培养现代经济管理人材的大专院校,更应该帮助学员学习和掌握现代科学和管理方法、统计、分析方法,以适应今后工作的需要,而微积分正是学习这些知识必不可少的数学基础.

在长期的数学教学工作中,我们认识到,由于数学高度的抽象性和严密性,使其内容往往不易被学员理解和掌握,而对于以成人学员为主要对象的成人高校,数学课程也是学员最感困难的课程之一.为了帮助学员打好数学基础,我们本着加强基础知识、提高学员的运算能力,注重经济应用的原则,编写了这本教材.由于成人学员的基础较差,对于数学概念的深化、定理、公式的推导等方面,适当放宽了要求.

这本教材与我们过去常用的微积分教材相比较,在教材内容的取舍和处理方法上作了某些大胆的尝试,特作以下说明,以供阅读时参考.

1.在概念的引入上,尽量做到简单、直观,避免重复,以减少学员学习的难度.例如函数概念,采用了与初等数学中相类似的函数概念,避免了集合之间的对应关系和映射概念的使用.对于极限的概念,也只使用了描述性的定义,不再用数学语言进一步精确化.

2. 对于某些定理，给出了直观的说明以后，不再进行严格的证明. 对某些公式的推导，为减少重复，也不再一一给出. 例如求导数的基本公式，只是使用导数的定义，给出几个公式的推导过程，其他导数公式都直接列出，而不再加以证明. 由于反函数的求导法则仅仅在推导公式时使用，故也删去.

3. 为加强运算能力的培养，强化了公式的使用，例如求导数的运算，对于和、差、积、商的求导法则，复合函数的求导法则，隐函数求导法和取对数求导法，都配有大量的例题. 从而加强对求导法则的理解和熟练掌握公式，进行必要的训练.

4. 注意概念之间的联系和运算方法的总结. 除了每章后都有小结外，对于每种运算方法的使用、定理的运用，都配有适当的例题，并加以必要的说明.

5. 在语言的叙述上力求通俗易懂，便于自学，以适应函授学员的需要.

本教材的函数、极限部分由柳翠华同志编写，微分学部分由刘原同志编写，积分学部分由金璐同志编写，多元函数部分由邢纯生同志编写. 邢纯生同志对全书某些内容作了一些文字方面的处理，全书由刘原同志审定校阅.

本教材适用于成人高校大专层次的学员，也可作为职工大学、电大、函授学员的教学参考书.

由于我们的知识水平有限，教学经验不足，对教材内容某些问题的处理方法也只是初步探索. 教材中如有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

1994 年 5 月

目　　录

第 1 章　函　　数

微积分研究的基本对象是函数，主要工具是极限理论. 因此，函数与极限都是高等数学里最重要的概念. 本章将在初等数学的基础上进一步讨论函数的概念及其性质.

因为实数集是函数的基础，在讨论函数概念之前我们首先简述一下集合与实数集.

§1.1　集合知识简介

一、集合的概念

所谓一个集合，就是指具有某种共同属性或特征的对象的全体. 如下面几个例子：

例 1　某班级的全体同学.

例 2　自然数的全体.

例 3　大于 4 小于 10 的所有奇数.

例 4　方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根.

这些都是集合.

集合一般用大写英文字母表示，如 A、B、C 等；构成集合的每一对象称为该集合的元素，用小写字母 a、b、c、x 等表示.

设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则说 a 属于 A，记作 $a \in$

A；若 a 不是 A 的元素，则说 a 不属于 A，记作 $a \overline{\in} A$ 或 $a \notin A$.

二、集合的表示法

集合一般有两种表示法：

1. 列举法

这种方法就是把集合的所有元素按任意顺序列出，然后用"{ }"括起来. 要求元素不能重复，不能遗漏.

例如，例 3 所指集合，若用 A 表示，则 $A = \{5,7,9\}$；例 4 所指集合，即方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根，若用 B 表示，则 $B = \{2,3\}$.

2. 描述法

设 A 是一个集合，a 是 A 中任一元素，$P(a)$ 是 a 所具有的属性，则记 $A = \{a \mid P(a)\}$. 这里，a 可用其它字母来代替.

又如，例 4 所指集合 B 也可表示为：

$$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

例 5　设 C 表示由大于或等于 -2 小于 7 的全体实数构成的集合，则 $C = \{x \mid -2 \leqslant x < 7\}$.

通常，N 表示自然数集，即正整数集，$\mathrm{N} = \{1,2,3,\cdots\}$；R 表示实数集；Z 表示整数集. 不含任何元素的集合叫空集，用 Φ 表示.

三、集合的运算

集合之间的运算常见的有两种：

1. 并集

定义 1.1　由集合 A 与集合 B 中的所有元素汇总构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$.

例 6　设 $A = \{2,3,4\}$，$B = \{1,4,5,6\}$，

则 $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

例 7　设 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant \frac{1}{2}\}$，则 $A\cup B=\{x|-1<x\leqslant 1\}$.

2. 交集

定义 1.2　由集合 A 与集合 B 的公共元素所构成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$.

如例 6 中 $A\cap B=\{4\}$；例 7 中 $A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\}$.

§1.2　实数集

一、实数与数轴

人们对数的认识是从小开始的. 先是自然数和分数，接着是负整数和负分数，再把零包含在内，这些统称为有理数. 有理数都可表示成有限小数或无限循环小数. 除了有理数外，还有一些数，如圆周率 π，$\sqrt{2}$ 等，它们表示成小数形式时都是无限不循环小数，这样的数称为无理数.

有理数与无理数统称为实数.

所谓数轴，就是规定了原点、正方向和单位长度的直线.

数轴上的点与实数是一一对应的关系. 任意给实数 a，可在数轴上找到唯一的点 a 与之对应. 反之，在数轴上任取一点，可测得唯一的实数值与它对应(图 1－1).

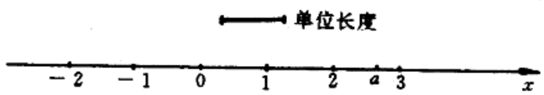

图 1－1

数轴是实数集的几何表示，实数与点可以互相代表，因此以后我们常常把实数 a 和在数轴上它代表的点 a 不加区别.

数轴上的点，从左向右，它所表示的实数越来越大.

二、实数的绝对值

任意一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为：

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

如：$|2|=2$；$|-8|=8$；$|0|=0$.

其几何意义为：$|x|$ 表示数轴上的点 x 与原点之间的距离.

$|x|$ 及其运算有如下性质：

(1)　非负性，即 $|x|\geqslant 0$

(2)　$|x|=\sqrt{x^2}=|-x|$

(3)　$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(4)　若 $a>0$，则 $\{x\,|\,|x|<a\}=\{x\,|-a<x<a\}$

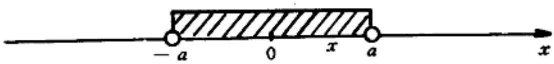

图 1－2

从几何上看，$\{x\,|\,|x|<a\}$ 表示与原点间的距离小于 a 的所有 x 构成的集合(图 1－2). 从图可以看出，这些点全在 $-a$ 与 a 之间，也就是集合 $\{x\,|-a<x<a\}$.

(5)　若 $b>0$，则 $\{x\,|\,|x|>b\}=\{x\,|\,x>b$ 或 $x<-b\}$

我们仍然根据 $|x|$ 的几何意义，从图形上加以说明. $\{x\,|\,|x|>b\}$ 表示与原点间的距离大于 b 的所有点构成的集合，所有这些点都在 $-b$ 的左边或 b 的右边(图 1－3)，即 $\{x\,|\,x<-b$ 或 $x>b\}$.

性质(4)、(5) 说明，不等式 $|x|<a$ 等价于(可用符号“$\Leftrightarrow$”代替) $-a<x<a$；不等式 $|x|>b\Leftrightarrow x<-b$ 或 $x>b$.

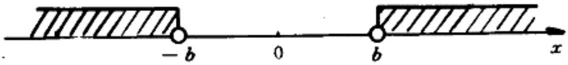

图 1－3

把上述不等号“<”改为“≤”；“>”改为“≥”，结论仍然成立.

(6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$；$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

(7) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$；$|x - y| > |x| - |y|$

例 1　求不等式 $|x - 2| \geqslant 4$ 的解.

解　把 $x - 2$ 看成一个整体，由性质(5) 去绝对值符号得：

$$|x - 2| \geqslant 4 \Leftrightarrow x - 2 \geqslant 4 \text{ 或 } x - 2 \leqslant -4$$

即 $\qquad x \geqslant 6$ 或 $x \leqslant -2$

故所求解为 $x \geqslant 6$ 或 $x \leqslant -2$ 的全体实数.

例 2　解不等式 $0 < (x - 3)^2 \leqslant 25$，并在数轴上表示其解.

解　在不等式的各边去平方(开方) 得：

$$0 < |x - 3| \leqslant 5$$

即 $$\begin{cases} |x - 3| > 0 \\ |x - 3| \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ -5 \leqslant x - 3 \leqslant 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ -2 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$$

故所求解为 $-2 \leqslant x \leqslant 8$，且 $x \neq 3$ 的全体实数. 在数轴上表示为图 1－4.

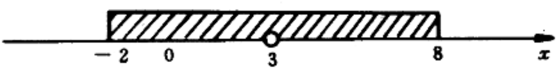

图 1－4

三、区间与邻域

1. 区间

设 $a,b\in \mathrm{R}$，且 $a<b$

定义 1.3 称介于 a、b 间的全体实数为以 a、b 为端点的开区间. 记为 (a,b).

它表示满足 $a<x<b$ 的所有 x 构成的集合，即 $\{x|a<x<b\}$. 因此有

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

其中称 a 为左端点，b 为右端点. 显然开区间 (a,b) 不包含它的两个端点（图 1－5）.

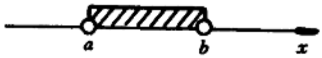

图 1－5

称满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x 为以 a、b 为端点的闭区间，记为 $[a.b]$.（图 1－6）.

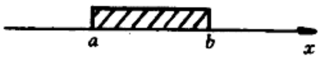

图 1－6

即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$

称满足 $a\leqslant x<b$ 的所有 x 构成的集合或满足 $a<x\leqslant b$ 的所有 x 构成的集合为以 a、b 为端点的半开半闭区间，分别记为 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.（图 1－7，图 1－8）.

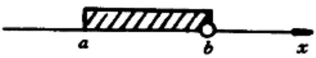

图 1－7

图 1－8

即
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\};$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

区间的长度为右端点值减去左端点值，即 $b-a$；区间长度的

一半为区间的半径，记为 δ，即 $\delta=\dfrac{b-a}{2}$；区间的中心坐标为 $\dfrac{a+b}{2}$.

若已知某区间的中心为 x_0，半径为 δ，则该区间左端点为 $x_0-\delta$，右端点为 $x_0+\delta$.

上述区间端点为有限值的区间都称为有限区间. 除此以外，还有无限区间. 我们规定下列符号所表示的含义为：

$(-\infty,+\infty)=\mathrm{R}$；

$(a,+\infty)=\{a \mid x>a\}$；

$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$；

$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$.

必须注意，"$-\infty$"、"$+\infty$" 只是记号，不能看成具体的数，分别读作"负无穷大"、"正无穷大".

2. 邻域

定义 1.4 设 $\delta>0$，称以 a 为中心、δ 为半径的开区间为 a 的 δ 邻域（图 1-9），记为 $N(a,\delta)$.

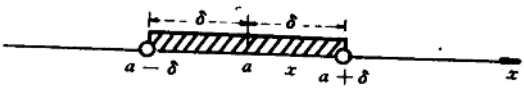

图 1-9

即 $$N(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

它表示数轴上与点 a 间的距离小于 δ 的所有 x 的集合.

如 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$ 表示邻域 $N\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，它是以 1 为中心，$\dfrac{1}{2}$ 为半径的开区间，即 $\left(1-\dfrac{1}{2},1+\dfrac{1}{2}\right)=(0.5,1.5)$.

在本书中，我们还会遇到空心邻域这个概念.

所谓a的δ空心邻域，就是在邻域中去掉它的中心点a后所剩下的部分（图1-10）。即集合$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$或$(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

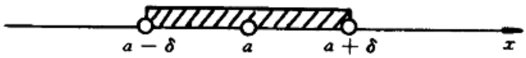

图1-10

§1.3　函数概念

一、常量与变量

生活中，我们时常会接触到各种各样的量. 其中有些量在考虑的过程中不起变化，也就是保持固定的值不变，这种量叫做常量. 但有些量在考察的过程中却有变化，可取各种不同的数值，这种量叫做变量.

例如，任意三角形的各内角的大小可以变化，是变量；但其内角和却始终等于180°，是常量. 又如，在经济生活中，讨论某产品的总成本时，可以把总成本看成是固定成本与变动成本的和. 其中，固定成本不因产量的变化而改变，是常量；而变动成本却随产量的增加而增加，是变量.

习惯上，用a、b、c等表示常量；用x、y、z、t等表示变量.

为研究问题方便，有时也把常量看成取同一个值的变量.

二、函数概念

自然界中，各种不同的变量之间不是彼此孤立的，它们相互联系、相互依赖. 这种变量之间的依存关系中最简单而又非常重要的一种关系就是数学里的函数关系.

如圆面积 s 与圆半径 r 之间有关系

$$s = \pi r^2$$

对于半径的每一取值 r，通过上式，可得到唯一的面积值 s 与之对应，我们就称 s 是 r 的函数. 为此，下面给出函数的一般性定义.

定义 1.5 在某一个变化过程中有两个变量 x、y，如果存在一个对应规律 f，对于变量 x 在其变化范围内的每一个值，根据这一对应规律，变量 y 都有一个唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y = f(x)$$

例如，$y = x + 1$，当 x 取任一实数值 x_0 时，通过上式，一定有唯一的 y 的取值 $y_0 = x_0 + 1$ 与之对应，所以关系式 $y = x + 1$ 表明 y 是 x 的函数.

同理，$y = \sqrt{x^2 - 4}$；$y = \sin x$ 都表明 y 是 x 的函数.

这时，称 x 为自变量，y 为因变量. 自变量 x 的变化范围称为函数的定义域，记为 $D(f)$，它是使 $y = f(x)$ 有意义（确定值）的自变量 x 的取值的全体.

所谓对应规律 f，它代表的只是 x 与 y 之间的一种关系. 它可用其它符号代替，如 φ、g、F 等均可. 如果我们需要同时考察 x 的几个函数，为避免混淆，就要用不同的记号来分别表示对应规律.

在函数定义里，要求对于自变量 x 的每一取值，y 有唯一确定的值与之对应.

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D(f)$. 对 $x_0 \in D(f)$，称函数 y 的对应值 y_0 为函数在 x_0 处的函数值，记为

$$f(x_0) \text{ 或 } y|_{x=x_0}$$

全体函数值所构成的集合叫做 $y = f(x)$ 的值域，记为 Z 或 $Z(f)$.