高等学校教学参考书

物理实验

教学参考书

潘人培　董宝昌　主编

WLSYJX

高等教育出版社

高等学校教学参考书

物理实验教学参考书

潘人培　董宝昌　主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是高等工科院校物理实验的教学参考书。全书对实验的一般性原理和具体操作步骤叙述较简；着重在引伸实验原理、扩充实验方法、讨论实验条件、分析实验仪器、介绍实验技能等方面；对教学经验和教学方法也作了介绍。

本书的主要使用对象是从事物理实验工作的教师、实验技术人员以及大专院校的学生。本书除作教学参考之用外，也可选作物理实验专题讲座的内容。

本书被国家教委高等学校工科物理课程教学指导委员会物理实验课程小组推荐为物理实验课的主要教学参考书。

责任编辑　黄元铭

高等学校教学参考书

物理实验教学参考书

潘人培　董宝昌　主编

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
天津新华印刷一厂印装

*

开本787×1092毫米　16开　印张26.25　字数630 000
1990年10月第1版　1990年10月第1次印刷
印数：2 760
ISBN 7-04-003161-2/O·978
定价：5.20元

前　言

本书是我们受高等学校工科物理课程教学指导委员会物理实验课程小组的委托，根据1987年9月在西安召开的实验课程组扩大会议的精神，在兄弟院校的共同合作下编写的。书中部分内容曾于1983年10月由南京工学院印成内部资料进行交流，广泛征求意见。

本书是为工科物理实验教学编写的教学参考书。书中对实验的一般性原理和具体操作步骤叙述较简；着重对实验原理、实验方法、实验条件、实验仪器、实验技能等作较深入的讨论，并对教学方法、教学经验作了介绍。

本书是根据由华中工学院、天津大学、上海交通大学合编的《物理实验》（基础部分）和哈尔滨工业大学主编的《物理实验》（近代与综合部分），以及目前多数工科院校开设的物理实验的实际情况，共编写了43个课题，包括误差和有效数字、图示和图解、力学和热学、电磁学、光学、近代和综合实验等方面。

本书的主要使用对象是从事物理实验工作的教师、实验技术人员以及大专院校的学生。本书除作教学参考之用外，也可选作物理实验专题讲座的内容或对学生开设物理实验选修课程的参考资料。

本书由潘人培、董宝昌主编；刘鑫森、万良凤主审。在编写过程中得到了朱竹林、李化平、万良凤、刘鑫森、耿完桢、于国华、黄元铭、钟安、李德宽、贺锡纯、张兆奎、王惠棣以及其它兄弟院校同志们的热情指导和帮助。朱育群、李士徽同志参加了1983年内部发行交流本的审编和绘图工作。在此一并致以谢意。

本书由于是合作编写的，因此，在内容选择、编写格式、篇辐大小等方面都有不同程度的差异。由于各校的仪器和实验条件不完全相同，书中所列数据会有出入，仅供参考。

由于编者水平有限，缺乏经验，对于书中的错误和缺点，我们热切希望广大读者给予批评和指正，以便将来修正。

编者　于东南大学　物理系

1989年8月

目　录

第一部分　基础实验部分

第二部分　近代与综合实验部分

第一部分　基础实验部分

一　误差与实验数据处理教学中的几个问题

李　化　平

一、名词和概念

1. 误差　指测量值与量的真值[1]之差，即

$$误差=测量值-真值$$

上式定义的误差反映的是测量值偏离真值的大小和方向，因此，又常称为绝对误差。绝对误差有符号，不应将它与误差的绝对值相混淆，后者是误差的模。

误差与真值之比叫相对误差，考虑到一般情况下测量值与真值相差不会太大，故可把误差与测量值之比作为相对误差。

2. 偏差　指各测量值与其算术平均值之差。

3. 精度、精密度、准确度、精确度　精度是一个笼统的概念。通常用精度来反映测量值与真值的差异。精度高的误差小，精度低的误差大。按误差性质，精度又分为：

精密度（*precision*）　指重复测量所得结果相互接近的程度。精密度反映的是偶然误差大小的程度。

准确度（*accuracy*）　指测量值或实验所得结果与真值符合的程度，它是描述测量值接近真值程度的尺度。准确度反映的是系统误差大小的程度。在英文书籍中，*accuracy* 一词有时也指精确度（包含精密和准确两方面的含义）。

精确度　它是精密度与准确度的综合。既描述数据的重复性程度，又表示与真值的接近程度。精确度反映了综合误差的大小程度。

4. 灵敏度和分辨率

灵敏度　指仪器指示器的微小变化与造成该变化所需的待测量的变化之比。灵敏度高，意味着仪器对待测量的微小变化的响应能力高。灵敏度和精密度均可用仪器本身来测定，对仪器和测量装置而言，它们是平行的两种特性。

对测量仪器、测量装置和测量电路，灵敏度是非常重要的概念，它有时会成为测量误差的主要来源。因此，测量中要充分注意这个问题。

1　真值是理想的概念，一般是不知道的。实用上，真值均用约定真值代替。量的约定真值是指为了给定的目的，可以替代真值的量值。

分辨率　指能引起输出量发生可测变化的最小输入增量。一般仪表和传感器在全量程范围内，各处的分辨率 Δx_i 是不相同的。通常是用全量程中最大的 Δx_{max} 除以量程值 x_{max}，所得百分数作为分辨率的指标。

$$\delta = \frac{\Delta x_{max}}{x_{max}} \times 100\%$$

5. 不确定度（*uncertainty*）　表征被测量的真值在某个量值范围的一个评定。或者说，测量结果附近的一个范围，这个范围可能（相当于标准差的概率）包含测量误差。

因为误差是指测量值与真值之差，由于真值经常无法知道，因而误差通常也无法知道。而不确定度表示的是测量误差可能出现的范围，因此，后者能更好地反映测量结果的性质。因而，国外用不确定度一词愈来愈多，我国也制定了不确定度评定的国家标准。

二、系统误差与偶然误差

按照误差对实验仪器和实验结果影响的特征，一般将误差分为系统误差及偶然误差两类。

1. 系统误差　指在同一条件下多次测量同一量时，误差的绝对值和符号保持恒定；测量条件改变时，误差也按确定的规律变化的误差。系统误差的特征是它的确定性。此外，还有一类方向和绝对值未知（或尚未确定）的系统误差，叫未定系统误差。在数据处理中，这类误差常用估计方法得出，并与处理偶然误差相似，用统计方法处理。系统误差需要改变实验条件和测量方法才能发现。系统误差的减小和消除是比较复杂的问题，只有在仔细分析整个实验所依据的原理和测量方法的每一步以及所用的各件仪器后，才能找出产生误差的各种原因，从而有可能设法在测量结果中消除或减小它的影响。

对于恒定的系统误差，一般都应在实验前或实验中予以消除。发现和消除系统误差是培养学生实验能力的一个重要部分。

(1) 如何发现实验或测量中存在系统误差

分析实验所依据的理论公式所要求的约束条件在测量中是否已被满足。例如用单摆测重力加速度

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{1}$$

(1) 式成立的条件是摆角很小，较精确的公式为

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{2}$$

设摆角为 10°，用 (1) 式较 (2) 式计算的系统误差约为 0.2%。

注意实验仪器所要求的使用条件是否已经达到。例如用物理天平前如果未调好仪器的水平和零点，就会给结果引入系统误差。

进行对比，包括实验方法的对比，仪器的对比和测量方法、测量条件等的对比。实验方法的对比是指用不同实验方法测同一物理量，对比结果是否一致；测量条件和方法的对比是指改变测量条件和测量方法来察看结果有无明显的不同，从而发现有无系统误差存在。

(2) 消除系统误差的一般方法

对仪器示值引入修正值，这可通过与精度级别高的仪器做比较而获得。另外，还可根据理

论分析导出修正公式。

选择适当的测量方法，使系统误差的影响能够抵消而不带入测量结果中。常用的方法有：

1 对换法。即将测量中的某些条件（如被测物的位置）相互交换，使产生系统误差的原因对测量结果起相反的作用。例如在精密称衡中，为了消除天平的不等臂性误差而使用的“复称法”。在薄透镜焦距的测定实验中，将透镜转过 180°进行重复测量，或将屏与物的位置互换作测量等。

2 补偿法。例如在量热学实验中，采用加冰降温使系统的初温低于室温而吸热，以补偿升温时的散热损失等。

3 异号法。使系统误差在测量中出现两次，且两次的符号相反，取平均值作为测量结果，就可消除系统误差对测量值的影响。例如在霍耳效应测磁场强度实验中，为了消除不等位电位差的影响，可改变通过霍耳片的电流方向，测两次霍耳电势，取平均值。

4 半周期偶数测量法。按正弦曲线变化的周期性系统误差（如分光计的偏心差），可用半周期的偶数测量法予以消除。由于这种误差在任何差半个周期的两对应点处的绝对值相等而符号相反。因此，若每次都在相差半个周期处测两个值，并以平均值作为测量结果，可消除这种误差。

2. 偶然误差　一般说来，在相同条件下对同一量进行多次重复测量时，在极力消除或改正一切明显的系统误差之后，每次测量结果仍会出现一些无规律的起伏，这种起伏归结为偶然误差。和系统误差相反，偶然误差的出现，从表面上看似乎纯属偶然，但若测量次数很多，结果中就显示出明显的规律性。实践和理论都证明，大部分的测量误差均服从正态分布（高斯分布）。服从此分布的偶然误差具有下面的一些特性：

单峰性——绝对值小的误差出现的概率比绝对值大的误差出现的概率大。

对称性——绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

有界性——在一定测量条件下，误差的绝对值不超过一定限度。

抵偿性——偶然误差的算术平均值随测量次数的增加而趋向于零，即[1]

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \Delta x_i = 0$$

3. 偶然误差与系统误差的关系　系统误差的特征是它的确定性，而偶然误差的特征是它的随机性。两者经常是同时存在于一切科学实验中。它们之间是相互联系的，有时难以严格区分。通常把一些不可定系统误差看作是偶然误差，也常把一些可定的但规律过于复杂的系统误差当作偶然误差来处理。有时系统误差与偶然误差的区别与空间和时间的因素有关。时间因素有两方面含义：一是指时间的长短。例如校验仪表所用的标准，它的温度在短时间内可保持恒定或缓慢变化，但在长时间中却是在其平均值附近作不规则的变化。因而环境温度对标准仪表的影响，在短时间内可以看成是系统误差，而在长时间内则为偶然误差；另一含义是，随着科学技术的发展，人们对误差来源及其变化规律的认识加深，就有可能把过去认识不到而归之于

---

[1] 以下均用 $\sum$ 代替 $\sum\limits_{i=1}^{K}$

偶然误差的某些误差，确定为系统误差。

三、测量精度的评定

对于偶然误差的概率处理，是在完全排除系统误差的前提下进行的，即是在认为系统误差不存在或者小到可以忽略的情况下进行的。

设对某一物理量在同样条件下作多次测量，得 x_1、x_2、……、x_K。各次测量值的误差为 $\Delta x_i = x_i - x$（$i=1$、2、3、……、K），x 为该物理量的真值。根据偶然误差的基本特性可得出概率密度函数

$$f(\Delta x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp(-h^2\Delta x^2)$$

式中 h 为一常数，对不同的实验，h 有不同的值。h 值大，曲线狭；h 值小，曲线平坦。如图 1-1 所示。但曲线与横坐标轴所包围的面积应相等，因为这面积表示各种测量值出现的概率总和，应恒等于 1。即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta x)d(\Delta x) = 1$$

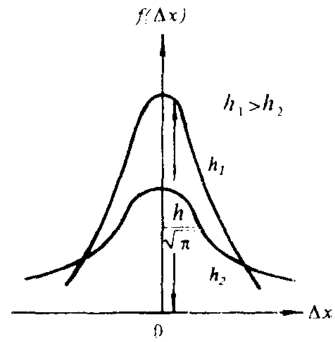

图 1-1

h 值的大小反映了测量值的离散情况，故称 h 为精密度常数，它只具有理论上的意义。为了能从实验数据来确定结果的精密度，引入平均误差、均方误差（标准误差）等概念。

1　平均误差 η　定义

$$\eta = \frac{1}{K}\sum|\Delta x_i| \tag{3}$$

η 值与 h 有关，现推求如下：已知 $f(\Delta x)$ 代表某一误差 Δx 发生的概率，在误差为 Δx—$[\Delta x + d(\Delta x)]$ 的区间内，各误差发生的概率为 $f\,d(\Delta x)$。如果测量的总次数为 K，而误差在 Δx—$[\Delta x + d(\Delta x)]$ 之间的次数为 K'，则由概率定义，$f\,d(\Delta x) = \frac{K'}{K}$，即 $K' = Kf\,d(\Delta x)$。所以该区间内误差的总合为 $\Delta x Kf\,d(\Delta x)$，而整个误差分布区域上误差的总合为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Kf\,\Delta x\,d(\Delta x)$$

故平均误差
$$\eta = \frac{2K\int_0^{\infty} f\,\Delta x\,d(\Delta x)}{K} = \frac{1}{\sqrt{\pi}h} \tag{4}$$

(4) 式是在 $K\to\infty$ 时的结果，它的计算比较简便。但在实际情况下因 K 值不大，η 值随 K 值而变化，η 值也不能反映数据的离散情况，因为不同精度的两组数据可以算出相同的 η 值。

2　均方误差（标准误差）ε　定义

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{K}} \tag{5}$$

同 η 一样，ε 值与 h 有关

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K(\Delta x)^2 f\,d(\Delta x)}{K} = 2\int_0^{\infty}(\Delta x)^2 f\,d(\Delta x) = \frac{1}{2h^2}$$

故 $$\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}h} \tag{6}$$

用均方误差评定测量数据的偶然误差有如下优点:

1 有相当的稳定性, ε 值随 K 值变化比较小。

2 它以平方计值, 故与个别误差的符号无关, 而且能反映数据的离散度。

3 它与最小二乘法的观点相吻合。

4 对于有限次测量, 它与极限误差仍存在固定而简单的关系。

比较(4)式和(6)式可得 $\varepsilon=1.25\eta$。把它们表示在误差曲线图上, 如图 1-2 所示。由图可知, 若把结果写成 $x\pm\varepsilon$, 即表示任何一次测量值 x_i 出现在 $x+\varepsilon$ 到 $x-\varepsilon$ 间的概率为 68.3%(由拉普拉斯积分表查出); 而平均误差 η 则表示 x_i 落在 $x\pm\eta$ 区间内的概率为 57.5%。

当 $K\to\infty$时, 用 η 或 ε 表示测量的精密度都是可以的。但当测量次数有限时, 用均方误差 ε 来估计测量的精密度比较可靠。我国和世界上许多国家都在科学报告中使用均方误差, 而在技术报告中则多使用极限误差。由概率论计算可知, 绝对值大于 3ε 的概率仅为 0.3%, 因而常取极限误差 $\Delta_{lim}=3\varepsilon$。

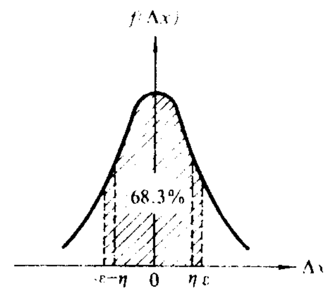

图 1-2

对于有限次数的测量, 数据不会完全符合正态曲线的分布。这时, 该选择怎样的一个值作为真值的最佳近似值呢? 根据最小二乘法原理, 这个最佳值就是算术平均值, 现证明如下: 由最小二乘法原理, 被测量的最概然值是这样一个值, 它与各次测量值之差的平方和为最小。设 $\bar{x}$表示这个最概然值, 则有

$$f(\bar{x})=\sum(x_i-\bar{x})^2=\min$$

令 $$f'(\bar{x})=0$$

即 $$f'(\bar{x})=-2\sum(x_i-\bar{x})=0$$

故 $$\bar{x}=\frac{1}{K}\sum x_i$$

对于有限次测量的一次测量值的误差计算公式应为[1]

$$\eta=\frac{\sum|\Delta x_i|}{\sqrt{K(K-1)}} \qquad (\Delta x_i=x_i-\bar{x})$$

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{K-1}}$$

对于一组等精度测量数据的算术平均值, 其误差应该更小些, 应是一次测量值误差的$\frac{1}{\sqrt{K}}$倍, 即

---

[1] 张启人:《测定值计算基础》, 科学出版社, (1965), 69。

$$\eta_x = \frac{\sum|\Delta x_i|}{K\sqrt{K-1}} \tag{7}$$

$$\varepsilon_x = \sqrt{\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{K(K-1)}} \tag{8}$$

根据上述分析可知，一列等精度的测量结果，如用平均误差表示，应表示成

$$x = \bar{x} \pm \frac{\sum|\Delta x_i|}{K\sqrt{K-1}} \tag{9}$$

(9) 式表示，被测量 x 的最佳值是$\bar{x}$。在误差区间$\bar{x}+\eta_x$ 到$\bar{x}-\eta_x$ 内，包含客观真值 x 的概率是 57.5%。

目前许多普通物理实验教材，将多次测量的结果表示成

$$x = \bar{x} \pm \frac{\sum|\Delta x_i|}{K} \tag{10}$$

这就出现一个问题，即用一次测量值的平均误差代替算术平均值的平均误差，显然是不妥的。我们可以这样理解，因为一般测量次数 K 在 10 次左右，所以一次测量的平均误差 $\eta = \sqrt{K}\eta_x \approx 3.2\eta_x$，（10）式相当于

$$x = \bar{x} \pm 3.2\eta_x$$

由概率论估算，$3.2\eta_x$ 接近极限误差。因此，可以把（10）式中的 $\sum|\Delta x_i|/K$ 理解为最大误差。

四、关于测定次数的问题

算术平均值是一列等精度测量的最佳值，其精度多采用如（8）式所示的均方偏差来评价。由（8）式可知，平均值的均方偏差和测量次数 K 密切相关，K 愈大时所求出的算术平均值也越接近真值。但是测量的精度还取决于所用仪器、测量方法、环境和观测者等因素。超出这些条件单纯追求测量次数是没有多大意义的。

由$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}}$，作 $\varepsilon_x - K$的关系图，如图 1–3 所示。由图可见，随着测量次数 K 的增加，ε_x 逐渐减小，但在 $K>10$ 以后，减小极慢。因此，测量次数不必过多，一般重复 10 次就可以了。因为（8）式只是表示偶然误差对最后结果的影响。对于一般仪器，由于灵敏度和精度不高而产生的误差将掩盖住这些偶然误差，测量次数还可以更少些。

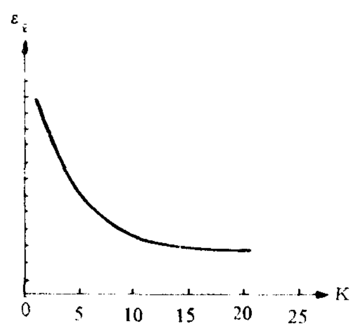

图 1–3

五、仪器的精确度和仪器误差

仪器误差是指在正确使用仪器的条件下，测量所得结果和被测量的真值之间可能产生的最大误差。例如，用电表测量实际值为 2.00V 的电压，电压表的读数为 1.98V，则该电压表的仪器误差为 0.02V，精确度为 1%。

仪器误差通常由制造厂和计量机关用更精确的量仪、量具，经过检定比较给出。有时只给出精度级别，由所用仪器的量程和级别可以算出仪器误差。以电表为例，构成电表仪器误差的

因素有以下几部分：1 活动部分在轴承里的摩擦；2 游丝弹性不均匀及游丝老化；3 磁场强度不均匀；4 分度不均匀；5 外界条件变动对仪表读数的影响；6 调节仪表指针到所要求的示值所引起的起伏；7 检验用的标准所引起的误差。仪器误差是根据这些可定的系统误差 e、不定的系统误差 ε_S 和偶然误差 ε_R 而确定的[1]，即

$$\Delta_{仪} = |e| + C\sqrt{\overline{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_S^2}} = |e| + C\varepsilon$$

C 为置信因子，其值取决于 ε 所服从的规律以及 $C\varepsilon$ 值的置信水平。当 ε 接近高斯分布时，若对应的置信概率 $P=0.99$，则 $C=2.58$。为了简化，一般取 $C=3$。显然 $C\varepsilon$ 相当于极限误差。如果检测和计算出的 $\Delta_{仪}$ 和对应的量程之比等于 0.18%，则将该电表定为 0.2 级。一般对精度级别较高的电表（如 0.1 级、0.2 级）才进行这种严格而繁杂的检测和计算。对 0.5 级以下的电表，通常是借助标准仪表和它进行比较、校验，定出精度级别。如果借助标准仪表对被检电表引入修正值，即去掉了确定的系统误差，这时电表的不确定度大约为由标称精度级别算出的误差值的一半（级别太低的仪表除外）。也就是说，当对仪表进行校准，引入修正值后，测量的精确度可以高于仪表的精确度。但对 0.2 级以上的精密仪表不允许有修正值，因为这类仪表的可定系统误差在制造时已得到消除或减至最小。

由以上分析可知，仪器误差既有系统误差也有偶然误差。一般 0.2 级以上仪表主要是偶然误差。而实验室常用的仪表（如 0.5 级）两种误差都有，且数值相近。级别较低的和工业用仪表则主要是系统误差。所以，若笼统地把仪器误差归结为系统误差，并用代数方法与其它误差合成，这样会夸大测量结果的误差数值，是不妥当的。同样，对以系统误差为主的仪表，也不能用均方误差和平均误差等来反映测量结果的可靠程度。

六、直接测量结果的误差表示

1 如果测量中系统误差已消除或减至最小，测量仪器比较精确，这时造成测量数据起伏的主要因素是偶然误差。测量结果可以用平均误差、均方误差或极限误差表示，即

$$x = \bar{x} \pm \frac{\sum|\Delta x_i|}{K\sqrt{K-1}} \qquad (P=0.575)$$

$$x = \bar{x} \pm \sqrt{\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{K(K-1)}} \qquad (P=0.683)$$

$$x = \bar{x} \pm 3\varepsilon_x$$

P 为置信概率，$3\varepsilon_x$ 为极限误差，K 应大于或等于 10。

2 对于一般教学实验，由于所用仪器的精度很不一致，为了计算简单，习惯上未严格按误差理论来处理数据，而将结果表示成

$$x = \bar{x} \pm \frac{\sum|\Delta x_i|}{K}$$

式中 $\sum|\Delta x_i| / K$ 相当于最大的偶然误差。对如下三种情况，测量结果的最大误差可以用仪器误差来表示：

(1) 仪器精度不高，测量条件比较稳定，多次测量同一物理量结果相近，测量结果的最大

[1] F.L. Hermach. Communication and Electronics, 54 (1961), 90–95

误差就用仪器误差表示，即

$$x = \bar{x} \pm \Delta_{仪}$$

(2) 被测量不允许作多次测量时，这时结果的误差也可表示成

$$x = x_{测} \pm \Delta_{仪}$$

(3) 如多次测量的最大误差 $\sum|\Delta x_i|/K$ 与仪器误差 $\Delta_{仪}$ 相近，这时用 $\sum|\Delta x_i|/K$ 或 $\Delta_{仪}$ 表示测量结果的最大误差都可以。如不一致，一般取大的。因为两者都代表最大误差，所以不要再把它们加起来作为结果的最大误差。

3 如测量条件不符合仪器所要求的工作条件，测量结果的最大误差宜把 $\sum|\Delta x_i|/K$ 与 $\Delta_{仪}$ 加起来。如用箱式电桥对某电阻进行多次测量，由于仪器灵敏度不符合要求，将引入附加误差，这时测量结果应表示成

$$R = \bar{R} \pm \left(\bar{R}f\% + \frac{\sum|\Delta R_i|}{K} \right)$$

式中 f 是电桥的精度级别。严格地讲，括号中的两部分误差应该用高斯合成法合成，以避免过分扩大测量结果的误差数值。

七、单次测量的平均误差和均方误差的估计方法

在测量实践中，特别是一般教学实验的某些测量，经常碰到的是只作单次测量。这时应如何确定测量结果的平均误差和均方误差？为了解决这个问题，先简单介绍均匀分布。所谓均匀分布，是指在其误差范围内（如 $\pm\Delta$ 区间），各种误差出现的概率都相同，即 $y = f(\Delta x) = k$（k 为一常数），区间外的概率为零，如图 1–4 所示，因而有

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} y\, d(\Delta x) = \int_{-\Delta}^{+\Delta} k\, d(\Delta x) = 1$$

得

$$y = k = \frac{1}{2\Delta}$$

对平均误差进行计算，得

$$\eta = \frac{\int_{-\Delta}^{+\Delta} K(\Delta x) y\, d(\Delta x)}{K} = \frac{\Delta}{2} \tag{11}$$

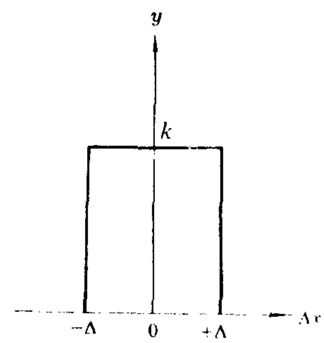

图1–4

对均方误差进行计算，得

$$\varepsilon^2 = \frac{\int_{-\Delta}^{+\Delta} K(\Delta x)^2 y\, d(\Delta x)}{K} = \frac{\Delta^2}{3}$$

故

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

在实验中，误差服从均匀分布的例子有不少。例如，示波器实验中调利萨如图形不稳定引起的频率测量误差；电共振实验中由于调谐不准而产生的频率误差；指零仪表判断平衡的视差；游标尺的仪器误差；数据截尾引起的舍入误差等。总之，对于一些只能估计它们的误差极限而不知道它们的具体分布的误差，通常都是假定它们在此误差区间内的概率相同，即近似地

当作均匀分布来处理。现举数例如下：

1. 停表　对于经过检定的分度值为 0.1s 的停表，其仪器误差和灵敏阈也可取 0.1s，用 $\Delta_{仪}$ 表示，因为停表误差有系统和偶然的因素，所以可近似地假定在灵敏阈内误差遵守均匀分布。由（11）和（12）式得

平均误差　$$\eta=\frac{\Delta_{仪}}{2}=0.05\ \mathrm{s}$$

均方误差　$$\varepsilon=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=0.06\ \mathrm{s}$$

2. 视差　通常取视差为 0.2 分度。因此，作单次测量时，视差的平均误差为 0.1 分度、均方误差等于 $0.2/\sqrt{3}$ 分度。

3. 电表　对于标出精度级别的电表，其仪器误差很容易计算，故单次测量的平均误差和均方误差可按（11）和（12）式估算。对于精度级别较高的仪表，这样估算是比较可靠的。例如 0.2 级电表，其仪器误差主要是偶然误差和未定系统误差，在仪器灵敏阈内（大约为仪器示值刻度的 0.2 分格）比较接近均匀分布。至于常用的 0.5 级和 1 级电表，用（11）和（12）式估算就比较近似。如对这两级仪表经过校准并引入修正值，这时可用仪器误差的一半代入（11）和（12）式来估算平均误差和均方误差，即

$$\eta=\frac{\Delta_{仪}}{4}\qquad\qquad \varepsilon=\frac{\Delta_{仪}}{2\sqrt{3}}$$

对于精度级别更低的仪表，主要是系统误差，这时再用处理偶然误差的方法，即用平均误差和均方误差的概念来评价结果的可靠性是没有意义的。这种情况下，只须用系统误差合成法估算出误差限来反映测量结果的准确程度就可以了。

目前在实验教学中，还经常用系统误差的合成法来估算结果的误差限。这样虽然较简便，但不是最恰当的。原因是：①由于实验室的建设、仪器设备得到充实，以系统误差为主的仪器和仪表已日趋减少；②科学实验要求能够更准确地评价测量结果的精度。所以在实验教学中，完全有可能向学生介绍按照严格的误差理论来处理数据，即用均方误差、置信概率和置信限等来评价测量结果的精确性和可靠性。

八、间接测量结果精度的评定

设间接测量量 y 是由直接测量量 x_1、x_2，……，x_n 计算的，即

$$y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

其中每一直接测量量又是在同样条件下进行了多次重复测量，并假定各直接测量量是彼此独立的，且只含有偶然误差，那么间接测量量 y 的最可信赖值

$$\bar{y}=f(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\cdots\cdots,\bar{x}_n)$$

$\bar{y}$ 的均方误差为

$$\varepsilon_{\bar{y}}=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2\varepsilon_{\bar{x}_1}^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2\varepsilon_{\bar{x}_2}^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2\varepsilon_{\bar{x}_n}^2}\tag{13}$$

式中的 $\varepsilon_{\bar{x}_1}$，$\varepsilon_{\bar{x}_2}$，……，$\varepsilon_{\bar{x}_n}$ 分别为各直接测量量算术平均值的均方误差，其计算方法见（8）式。

这里不用平均误差来评价结果的精度，因为对有限次数的测量用均方误差评价比较可靠。但当测量次数很少时，这种评价还是过高的。例如 K 为 4—5 次时，ε_{x1} 的误差[1]约为它本身的 17%，若测量次数少到 2—3 次，对结果进行这种精度估计就无意义了。

对于以系统误差为主的实验，其结果精确度的评定当然不能用均方误差等概念。一般可用代数方法合成，即

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n$$

式中 Δx_1，Δx_2，……，Δx_n 分别代表各直接测量量的误差。Δy 为间接测量量的总合误差。考虑到实际情况，Δx_i 的符号较难确定，往往是从最不利情况出发取最大误差，等式的右面各项均取绝对值

$$\Delta y=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right||\Delta x_1|+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right||\Delta x_2|+\cdots\cdots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right||\Delta x_n| \tag{14}$$

(14) 式是处理方向未定系统误差的计算式，也是普通物理实验中常用的误差计算公式。这种方法计算简便，合成后的总误差可靠性高，能保证误差不会超过此范围。但是它不是很准确，特别是 n 比较大时，总合误差偏大较突出。因此，对未定系统误差和偶然误差的合成也宜采用与 (13) 式相似的方和根合成法。

九、有效数字及其有关问题

1. 有效数字的定义　凡是实验中从量仪和量具上直接读出的数字（包括最后一位估计的读数）都称为有效数字。

2. 与有效数字有关的几个问题

(1) 书写不带误差的有效数字时，应使左起第一个非零数至最后一位数皆为有效数，即保留一位欠准数。例如，用电压表量度电压，读数为 11.15V，其中 0.05V 是在最小分度内估读的，一般情况下可认为读数的误差不会大于最小分度值的一半，所以可以认为电压值在 11.10V 和 11.20V 之间。这种只根据有效数字来估计测量结果的可靠程度是很粗略的，有时甚至出入很大。例如，用钢卷尺测量长度，得 159.30cm，不能认为长度在 159.25cm 到 159.35cm 之间，因为钢卷尺的允许误差可达 3—5mm。因此，为了使测量结果准确一致和便于使用，应该使用带误差的测量数字。

(2) 书写带误差的有效数字，常用极限误差来表示（如仪器误差或最大误差）。如用其他误差表示，一般应说明置信概率。书写时，测量值的末位应与误差对齐。因此，结果应取几位有效数字，应由误差来定。例如，用钢卷尺测量长度，设 $l=(152.65\pm0.3)$ cm (0.3cm 为钢卷尺的最大误差)，考虑到 l 还要参与运算，测量值中的最后一位数"5"宜保留，但为了书写统一，可写成 $l=(152.6_5\pm0.3)$ cm。如果 l 为最后测量结果，应写成 $l=(152.7\pm0.3)$ cm。类似这种情况，如在改装电表实验中，表头串联一高电阻，可以改成某量程的电压表。但由于线路灵敏度低，在确定串联电阻值时，调节个位欧姆档在仪表上反应已经不太灵敏。如果所用电阻箱的最小变动值为 0.1Ω，这时应以仪器的灵敏度阈为准，既然 0.1Ω 档读数已不能分辨，所以

[1] 可以证明，ε_x 的误差其值等于 $\frac{1}{\sqrt{2(K-1)}}$。

电阻值只要记录到个位就行了。同样，计算串联阻值的误差也不能只考虑电阻箱的仪器误差，还应考虑灵敏度引进的误差，而后者常常会是误差值的主要部分。

对有些比较精确而重要的测量结果，常将测量值和误差多保留一位，例如普朗克常数

$$h = (6.626176 \pm 0.000036) \times 10^{-34} \quad \mathrm{J \cdot s}$$

十、误差计算的简化

1. 误差公式推导的简化　如果仅计算误差限，而不是严格地按误差理论准确地计算误差值，可以用全微分法求函数的最大绝对误差公式，也可以用对数微分法推导最大相对误差公式。在推导前可先作两步简化：①公式中的已知常数（如 π、光速 c、电子电荷 e 等）都可看作精确数，为了不给结果带来附加误差，只须在计算时取值比函数中有效数字位数最多的自变量多取一位；②对公式中的修正项，在推导误差公式时可以忽略掉。例如，用落球法测液体粘滞系数公式中的修正项、单摆测重力加速度实验中的摆幅和摆球对悬点的转动惯量的修正项等。由于略去修正项，使误差公式推导和计算大为简化，且不会明显地影响结果的误差值，原因是修正项的误差一般均比该自变量的误差小一个数量级，按微小误差原则是可以不计的。

2. 误差计算的简化　对于以乘除为主的函数形式，宜先计算相对误差，计算时把每一项表示成百分数，且只需计算出两位数。这样做有几个好处：①因为只求两位数（过多无意义），计算就简便多了；②可以看出各自变量对结果的误差贡献，知道哪一因素对结果的影响最大。为了提高实验精确度，可以集中精力减小该项的误差。如适当增加测量次数，使用更精确的量仪和量具等；③由各项对结果的误差贡献，可以看出各仪器的配置是否合理，计算是否有错误。如某一量的相对误差高出其它量很多，有可能是计算错误造成，也可能是仪器选配不合理所致。总之，这样做能使学生有可能发现实验中的一些问题，这正是我们所要培养学生的一种能力。

二　实验数据的图示法和图解法

董　宝　昌

物理实验中测得的各物理量之间的关系，可以用一个函数式表示，也可以用各种图线表示。后者称为实验数据的图形表示法，简称图示法。

图示法有许多优点，因而在实验和工作中有着广泛的应用。首先，图示法形象直观，使人看了一目了然。它不仅能简明地显示物理量之间的相互关系、变化趋势，而且能方便地找出函数的极大值、极小值、转折点、周期性和其它奇异性。特别是对那些很难用一个简单的解析函数表示的物理量之间的关系（如一天内的气温变化曲线、晶体管的特性曲线等），用图示就比较方便。此外，从实验图线通过解析几何或其它数学方法，也可以找出物理量之间的对应函数关系或经验公式，从而探求物理量之间的变化规律。

在物理实验中遇到的图线大致有三种：

（1）物理量的关系曲线、元件的特性曲线、仪器仪表的定标曲线等。这类图线一般是光滑