[法] P. G. 希亚雷

数学弹性理论

卷 I 三维弹性理论

科学出版社

数学弹性理论

卷I 三维弹性理论

〔法〕P. G. 希亚雷 著

石钟慈 王烈衡 译

科学出版社

1991

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书是法国科学院院士、著名数学家 P. G. Ciarlet 教授所著的关于现代弹性理论研究的十分完备的引论，同时也是应用数学和连续力学课程的一本极好的教材．

本书的主要内容包括：第一篇，三维弹性理论的描述．第一章，几何和其他预备知识．第二章，平衡方程和虚功原理．第三章，弹性材料及其本构方程．第四章，超弹性理论．第五章，三维弹性理论的边值问题．第二篇，三维弹性理论中的数学方法．第六章，基于隐函数定理的存在性理论．第七章，基于能量极小化的存在性理论．

本书主要读者范围：高校有关专业师生，工程技术人员及科研人员．

P.G.Ciarlet

MATHEMATICAL ELASTICITY

Volume I THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY

North-Holland Amsterdam 1988

数学弹性理论

卷 I 三维弹性理论

[法] P. G. 希亚雷 著

石钟慈 王烈衡 译

责任编辑 林 鹏 徐宇星

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

北京怀柔县黄坎印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991 年10月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1991 年10月第一次印刷 印张：13 1/4

印数：0 001-1 000 字数：328 000

ISBN 7-03-002640-3/O·496

定价：15.70 元

序　　言

本书试图成为现代弹性理论研究的一个完整导论，同时作为纯粹和应用数学，或连续力学研究生课程的一本教材.

最近数十年中，弹性理论在其物理基础和数学理论两方面都重新引起人们广泛的注意. 其中一个原因是，人们日渐认识到经典的线性弹性模型，虽然其数学理论现在已经牢固地确立，但是它们的适用范围是有限的. 在这个范围以外，它们应当被真正的非线性模型所替代，而线性模型实际上只是一种近似. 另一个原因是，从原理上来说它是与上一个原因类似的，这就是经典的低维模型的正确性不再是没有疑问的了，如非线性弹性板的 von Kármán 方程. 因此感到有必要来更好地评价三维模型与它们所逼近的相应的三维模型之间的关系.

本书详细叙述这一理论的发展趋势，其主要论题如下：

——完整地描述二种重要的三维弹性理论的数学模型，特别强调其非线性方面，其一是由三个二阶拟线性偏微分方程组成的方程组加上特殊的边界条件所构成的边值问题，其二是相应的能量极小化问题（第一到第五章）；

——这些模型的数学分析，特别包括最近的存在性结果的完整证明（第六和第七章）；

——用渐近展开方法，从三维弹性理论系统地导出二维板模型，特别包括线性情形的严格收敛性分析以及对已知的板模型的证实，比如 von Kármán 方程（第II卷）；

——三维板模型的数学分析，特别包括非线性情形中存在性定理的评述以及分岔理论的一个导引（第II卷）；

——从三维弹性理论系统地导出一维杆模型（第II卷）；

——系统地导出板与三维结构之间，或板与杆之间的连接以

及折板的数学模型（第 II 卷）.

在静力学研究（这是本书所考虑的全部内容）取得实质性进展的同时，与时间相关的弹性理论的研究仍处于初期阶段. 对一个空间度量，最近已获得了深刻的结果，但是在这个领域的进一步发展道路上仍存在着许多困难. 因此，恐怕要经过很长时间，才能写出本书的“动力学”部分.

虽然本书重点明确地是在数学方面，但是我们作了一切努力，使得无论是数学或连续力学两方面的预备知识都保持在最低限度，而使本书能够出色地在最大程度上自给自足. 阅读本书只需具备分析和泛函分析的某些基本知识.

在弹性理论的研究过程中，一个吸引人的方面是，人们自然地感到需要研究分析和泛函分析的基本数学技巧；人们如何能够找到一个更好的动机呢？

——矩阵论中常见的和不常见的结果两者都经常需要，诸如极分解定理（定理 3.2-2）或著名的 Rivlin-Ericksen 表示定理（定理 3.6-1）. 按同一原则，谁能想到不等式

$$|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{AB}|\leqslant\Sigma_i v_i(\boldsymbol{A})v_i(\boldsymbol{B}),$$

其中 v_i 是以递增顺序表示的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的奇异值，会在分析一大类现实的储能函数时自然地出现？顺便提一下，这个貌似简单的不等式，证明却并不容易（定理 3.2-4）！

——理解“形变的几何”（第一章）依赖于或许是初等的、而却是“有用的”微分几何知识. 例如，我的经验是，在我的那些已经理解现代微分几何的学生中间，只有极少数能够有效地计算参考面积元素和变形后面积元素之间的联系公式 $da^\varphi=|\mathbf{Cof}\,\boldsymbol{\Delta\varphi}\cdot\boldsymbol{n}|da$（定理 1.7-1）.

——研究R^3中映射的几何性质（保持方向特性、内射性）自然地导致利用诸如区域不变性定理（定理1.2-5和1.2-6）或拓扑度（§5.4）这些基本工具；然而遗憾的是，所有这些常常被排除在标准的分析课程之外.

——Banach 空间中的微分学是不可缺少的工具，它在整本书

中都要用到，不习惯的读者应该很快理解 Fréchet 导数和隐函数定理许多值得称道的性质，它们是第六章中出现的存在性定理的基本原理.

——Banach 空间中常微分方程的基本存在定理以及它用 Euler 法逼近的收敛性，在增量法的分析中是需要的，而增量法常用于非线性弹性结构方程的数值逼近（第六章）.

——泛函分析和变分学的基本论题，诸如 Sobolev 空间(在弹性理论中它恰好就是“有限能量空间”)、弱收敛性、弱下半连续泛函极小化解的存在性等，遍布在处理三维弹性理论（第六、七章）和二维板理论（第 II 卷）的存在性结果之中.

——关于线性椭圆偏微分方程组的关键性结果，特别是方程组解的 $W^{2,p}(\Omega)$ 正则性的充分条件（定理 6.3-6），是了解第六章存在性理论所必须的预备知识.

——主要是由于 John Ball 在三维弹性理论中开创性的工作，凸性理论在整个第 I 卷中起着特殊重要的作用. 特别地，我们将自然地被引导到去寻找非平凡的凸壳例子，诸如行列式 >0 的所有方阵集合（定理 4.7-4），矩阵凸函数. 例如，函数 $F\to\Sigma_i\{\lambda_i(F^TF)\}^{\alpha/2}$，$\alpha\geqslant1$，自然地产生于第四章对 Ogden 材料的研究中；虽然对 $\alpha=2$，这种函数是凸的证明是很初等的，但是对 $\alpha\geqslant1$ 的其他值，这就变成出奇的困难（§4.9). 这种函数是 John Ball 的多凸储能函数的例子，它在弹性理论中是一个比较重要的概念（第四和第七章).

——在第七章中，我们将遇到补偿列紧概念. 由 Francois Murat 和 Luc Tartar 所发现并研究的这个技巧，现在已被公认为是研究非线性偏微分方程的一个强有力的工具.

——在第 II 卷中将看到，从三维弹性理论导出二维板模型和一维杆模型要经常利用由 Jacques-Louis Lions 对变分形式的问题所发展起来的渐近展开技巧(形式展开、误差分析、校正、边界层，等等).

——分岔理论自然地出现在非线性板模型的分析之中（第 II

卷）．这些模型问题使那个理论（翘曲、转捩点、解的多重性、扰动理论，等等）获得到多种值得注意的实际的应用．

数学弹性理论的另一个诱人的方面，即使在这里所考虑的静态情形，是它导出了许多未解决的问题．例如：

——将第六章的“局部”分析（存在性理论、当外力增加时解的延续、增量法分析）推广到真正的混合位移-边界力问题；

——在基于隐函数定理的存在性结果（第六章）和基于能量极小化原理的存在性结果（第七章）之间“填补空缺”；

——解的非唯一性分析（见§5.8中给出的例子）；

——摩擦接触的数学分析（无摩擦接触或自接触在第五、七两章中研究）；

——找出合理的条件，使得在此条件下能量极小化解（第七章）就是对应的 Euler-Lagrange 方程的解；

——利用适当推广已知的二维板问题解的存在性的办法（见第II卷）去获得三维非线性板问题解的存在性；

——二维和三维板问题之间的数值比较，这方面工作目前令人惊奇地缺乏（即使在线性情形，但这时的理论分析却已达到令人满意的程度）；

——弹塑性问题的数学研究至今只是在线性化弹性理论的框架中进行．

假如上述信息已经传达给了读者，那末本书的目的将已达到，也就是说，

——假如已经使得更多的看重应用的读者，诸如连续力学家、工程师、“应用”数学家，确信数学分析对于真正理解弹性理论，无论是建立模型或对其进行分析，都是不可缺少的工具，那么根本的原因在于越来越强调非线性（例如，多重凸性、分岔，等等），而它的讨论，即使是一开始，也要求某种程度的数学修养．

——假如已经使得更多的有数学修养的读者确信弹性理论远不是布满灰尘的古典领域，相反这是一个充满未解决难题的巨大源泉．

本书由二卷组成，分成按顺序编号的若干章．第 m 章包括引论，编号为 §m.1，§m.2，等等若干节，最后是一组练习．在 §m.n 中，定理按顺序编号，比如定理 m.n-1，定理 m.n-2，等等．插图同样按顺序编号，比如图 m.n-1，图 m.n-2，等等．附注和公式则不编号．在定理或附注的末尾将在右侧边缘上标以符号■．在第 m 章中，练习的编号为练习 m.1，练习 m.2，等等．

所有重要的结果都以定理形式来叙述（没有引理，命题，或推论），所以它们是课文的核心．另一方面，附注是用来指出某些解释、推广、反例、与其他结果的联系，初读时原则上可以跳过；然而它们可能会有助于更好地理解内容．当一个术语第一次被严格定义时，假如它被认为是重要的，就用粗体字表示．那些用模糊或直观意义给出的术语将放在引号中间．

对符号给予了特殊的注意，它往往使初次碰到弹性理论的读者产生困扰和沮丧的印象．为此，本书一开始就设专门一节，用以叙述在这里选择符号的指导规则，读者一定要先阅读．这一节也综述整个课文中将要用到的主要定义和公式．

通常给出完整的证明．特别是，只要一个数学结果在弹性理论中具有特殊重要的意义，其证明一定给出．例如，极分解定理、Rivlin-Ericksen 表示定理（它在矩阵论书中很少有证明）、或函数 $\boldsymbol{F}\rightarrow\Sigma_i\{\lambda_i(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})\}^{\alpha/2}$ 当 $\alpha\geqslant1$ 时的凸性（作为凸函数的一个非平凡例子，它很少被提到）等等，就是这种情形的例子．过于标准的数学预备知识在特殊的带星号的节中介绍（一般没有证明），根据各别需要，它们散布在整本书中．

每章末尾都有难度不等的练习．某些是课文内容的直接应用或补充；另一些则是难题，通常都给出提示或参考文献．

虽然有 570 多篇著作列入了文献目录，但并不企图编写完整无遗的参考目录．有兴趣的读者应当查阅 Truesdell 和 Noll [1965] 论著中所列的1678—1965年期间的广泛文献，在 Marsden 和 Hughes [1983]，Hanyga [1985]，及 Oden [1986] 新近出版的书中可找到另外的文献，Antman [1983] 及 Truesdell [1983]

的文章中对弹性理论和分析之间的相互作用给出了简短而富有启发性的历史的回顾.

为了补充本书中所讲的材料，我们竭力劝告读者参考少许几本其它书藉，在这方面，我们特别推荐下面一些关于三维弹性理论的一般性参考文献（关于板和杆的低维理论的一般性参考文献在第 II 卷中给出）：

——一般连续力学，特别是弹性理论的深入透徹的阐述：Truesdell 和 Toupin [1960]，Truesdell 和 Noll [1965] 的论著，以及Germain [1972]，Truesdell [1977]，Gurtin [1981b] 的书.

——弹性理论的经典和现代阐述：Love [1927]，Murnaghan [1951]，Timoshenko [1951]，Novozhilov [1953]，Sokolnikoff [1956]，Novozhilov [1961]，Eringen [1962]，Landau 和 Lifchitz [1967]，Green 和 Zerna [1968]，Stoker [1968]，Green 和 Adkins [1970]，Knops 和 Payne [1971]，Duvaut 和 Lions [1972]，Fichera [1972a, 1972b]，Gurtin [1972]，Wang 和 Truesdell [1973]，Villagio [1977]，Gurtin [1981a]，Nečas 和 Hlaváček [1981]，Ogden [1984].

——非线性弹性理论的数学处理：Marsden 和 Hughes [1983]，Hanyga [1985]，Oden [1986]，以及 Antman [1988] 将要出版的书.

在描述连续力学和弹性理论时，我们只挑选出二条公理：Euler 和 Cauchy 的应力原理（§2.2）及物质标架无异公理（§3.3），所有其他的概念均作为事先给定的. 对基本概念更加公理化的处理感兴趣的读者，诸如参考标架，物体，参考构型，质量，力，物质标架无异，各向同性，等等，应当参阅 Truesdell 和 Noll [1965] 的论著，Wang 和 Truesdell [1973] 的书，以及 Noll [1959, 1966, 1972, 1973, 1978] 的基本著作.

冒着引起某些读者皱眉头的风险和以滥用语言（abus de langage）作为代价，我们不理睬二阶张量和矩阵之间的差别.

对这种处理办法感到困惑的读者应当查阅 Abraham, Marsden 和 Ratiu [1983],特别是 Marsden 和 Hughes [1983] 的书,在那里他们将会找到有关弹性理论的张量及微分几何各方面的所有知识,而且都经过深入解释并置于正常的框架之中.

本书是根据一些讲义而写成的,这些讲义是过去几年中我在 Tata 基础研究学院,Stuttgart 大学,Pierre et Marie Curie 大学,以及 Ecole 高等师范讲授过.在此期间,我有幸与同行和学生们一道工作,对他们的合作我深表感谢,特别是 Michel Bernadou, Dominique Blanchard, Jean-Louis Davet, Philippe Destuynder, Giuseppe Geymonat, Hervé Le Dret, Hu Jian-Wei (胡建伟), Srinivasan Kesavan, Klaus Kirchgässner, Florian Laurent, Jindřich Nečas, Robert Nzengwa, Jean-Claude Paumier, Peregrina Quintela-Estevez, Patrik Rabier, Annie Raoult等.我也要专门感谢 Stuart Antman, Irene Fonseca, Morton Gurtin, Patrick Le Tallec, Bernadette Miara, François Murat, Tinsley Oden, Gérard Tronel, 他们热心地阅读了第 I 卷初稿并且提出了重要的改进意见.我真诚地感谢 Ms. Bugler, Ms. Dampérat 和 Ms. Ruprecht, 她们为本书的具体实现提供了特别熟练和勤勉的帮助.

最后,并非不重要,本书奉献给 Jacques-Louis Lions, 以表达我深深的敬意和感激之情.

P. G. 希亚雷

1986 年 8 月

作者为中译本写的序言

中法两国之间的学术交流，在 Jacques-Louis Lions 教授于 1975 年“首次访问中国”后，获得了新的推动力.

从那时起，这种交流得到了相当深入和广泛的发展. 这可以由许多中国同行访问我们的研究机构以及我的法国同事和我本人多次访问中国而得到证明. 在每次交流中可以愉快地看到，我们双方都持有将最高深的数学知识应用于求解有重要意义的实际问题的共同兴趣.

因此，我很荣幸地看到我的书被译成中文，它是这种合作关系的又一例证. 在这方面，我特别感谢石钟慈教授，中国科学院计算中心主任，他不但计划并细致地指导这项翻译工作，而且亲自实际参与了此书的翻译. 我也热忱地感谢王烈衡教授，他协助石钟慈教授完成了这项工作.

但愿这本书，并且希望它将来的姊妹篇，能有助于加强中法两国的科学合作事业！

P. G. 希亚雷

1991 年 1 月

主要记号，定义，公式

1. 总　　则

预备性说明

在弹性理论的书藉和文章中所用到的众多的记号，常使人们，特别是初学者，觉得混乱和恐惧．为了减轻读者的困扰，我们试图作出系统的努力，以达到最大程度的“透明”：

——将所引入的不同符号及字母的数目降到最少（有时不惜用较长的公式）；

——始终不渝地根据简单的规则来控制书中出现的各种类型字体的用法（这些规则下面再解释）；

——“尽可能好地插入”文献中出现的各种记号，以在“偏微分方程文献”中经常用到的记号为优先选择对象（例如参考构型中的一般点记为 x，参考构型记为 $\bar{\Omega}$，但在力学书藉中，这些通常记为 X 和 B，等等）．

一般性约定

除非另外说明，本书中所考虑的所有的数字，向量，矩阵，函数等等均是实的．

若在一个等号前放上冒号，如 $:=$，则右端确定左端．

若在引号中间有一组词，则必须按自然的或直观的意义理解．引号也被用来描写没有显示出来的数学表达式．

符号 $\Rightarrow$ 意指“蕴含”．

符号 $\Leftrightarrow$ 意指“等价于”．

符号 c，c_1，c_2 等等（或 $c(a)$，$c_1(a)$，$c_2(a)$，等等，当对某个变量 a 的依赖关系必须指明时）表示常数，通常在不等式中出

现，当它们在不同地方出现时，其值不必是相同的.

凡是在公式中同样的拉丁指标（i, j 等等）出现两次，我们就系统地采用重复指标约定求和法，除非在公式后面指明“不求和”.拉丁指标的范围或者是 $\{1, 2, \cdots, n\}$，其中 n 是一个任意整数，或者是$\{1, 2, 3\}$，当应用于三维弹性理论时（当然除非用于指示无限序列或级数）；到底应用哪一个范围，从上下文来看应当是清楚的. 例如，对于$i=1, 2, 3$,

$$-\partial_j(\sigma_{ij}+\sigma_{kj}\partial_k u_i)=f_i \text{ 意为 } -\sum_{j=1}^{3}\partial_j(\sigma_{ij}+\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kj}\partial_k u_i)=f_i,$$

而对于三阶矩阵$A=(a_{ij})$,

$$\det A=\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr} \text{ 意为}$$

$$\det A=\frac{1}{6}\sum_{i,j,k,p,q,r=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{jq}a_{kr},$$

等等.

在下列的记号、定义和公式的一览表中，我们指明了章节，在那里可以找到某个特殊概念的更多的资料.

方框表示，在弹性理论中是特别重要的定义，或关系式.

集合，拓扑空间，映射

ϕ：空集.

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$：$\geqslant 0$ 的整数集合.

$\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$：整数集合.

$\mathbb{R}$：实数集合.

$\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$：广义实数的集合（§4.7）.

附注：我们不用通常采用的符号 $\mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{R}_+^*$ 来分别表示集合$[0, +\infty]$和$(0, +\infty)$，因为这些可能会同用来表示行列式>0的矩阵集合的记号 $\mathbb{M}_+^n$ 不一致. 在广义实数的集合中，闭区间 $[a, b]$的定义中容许 $a=-\infty, b=+\infty$；这样，例如

$[a, +\infty] = [a, +\infty) \cup \{+\infty\}$，$[-\infty, +\infty] = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，等等.

$A \subsetneqq B$：A 严格地包含于 B 中.

$B - A = B \cap (X - A)$：子集 $A \subset X$ 关于子集 B 的余集.

$X - A = \{y \in X;\ y \notin A\}$：子集 $A \subset X$ 的余集.

$\mathbb{R}^n$ 中或一般集合中的点用细体小写字母表示（例如：x，y，$\cdots$）.

$\mathbb{R}^n$ 中或一般集合中的子集用细体大写字母表示（例如 Ω, A, $\cdots$）.

$\mathfrak{S}_n$：$\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全部置换的集合.

$\bar{A}$ 或 $\{A\}^-$ 或 $\mathrm{cl}\,A$：集合 A 的闭包.

$\mathring{A}$ 或 $\mathrm{int}\,A$：集合 A 的内部.

∂A：集合 A 的边界.

$\mathrm{card}\,A$：集合 A 的元素个数.

$f: X \to Y$，或 $f: x \in X \to f(x) \in Y$：从 X 到 Y 中的映射，或函数.

$f: A \subset X \to Y$：从 X 的子集 A 到 Y 中的映射.

$f \circ g$：复合映射.

$f|_A$：映射 f 在集合 A 中的限制.

$f(\cdot, b)$：部分映射 $x \to f(x, b)$.

$f(A) = \{y \in Y;\ y = f(x)$，对某些 $x \in X\}$：子集 $A \subset X$ 经映射 $f: X \to Y$ 后的象.

$f^{-1}(B) = \{x \in X;\ f(x) \in B\}$：子集 $B \subset Y$ 经映射 $f: X \to Y$ 后的逆象.

映射 $f: X \to Y$ 是满射的，或到上的，若 $f(X) = Y$；是内射的，或一对一的，若 $\mathrm{card}\, f^{-1}(\{y\}) = 0$ 或 1 对一切 $y \in Y$；是双射的，若它是内射的和满射的.

f^{-1}：双射映射的逆映射.

$\mathrm{supp}\, f = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}^-$：函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 的支集.

数和实值函数用细体小写或大写字母开始的符号来表示（例

如：$c, r, \rho, l_1(A)$，$\det A$，u_i, E_{ij}, A_{ij} 等等)，或者只在二种情形用专门的罗马字母(L(F, Cof F, det F) 和 W(F, Cof F, det F))来表示.

泛函，即从实值函数，或向量值函数空间到 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 中的映射用细体大写字母表示；例如：

$$F(\psi)=\int_\Omega \hat{f}(x,\psi(x))\,\mathrm{d}x,\ L(v)=\int_\Omega f\cdot v\,dx.$$

在可能引起某些混淆时（特别当函数被微分时)，我们选取不同的符号来表示不同自变量的同一“函数”及其值（例如，

$$\boldsymbol{\Sigma}=\hat{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{F})=\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{C}))\,.$$

id，或 id_X：集合 X 中的恒同映射（$f=id_X$ 意为 $f(x)=x$对一切 $x\in X$）.

$\operatorname{sgn}\alpha=+1$ 当 $\alpha>0$，-1 当 $\alpha<0$.

$\deg(\varphi,\Omega,b)$：映射 $\varphi\in\mathscr{C}^0(\bar{\Omega};\mathbb{R}^n)$ 在点 $b\notin\varphi(\partial\Omega)$关于有界开子集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 的拓扑度（§5.4).

$(\varphi_k)_{k=l}^{\infty}$，或$(\varphi_k)$：元素$\varphi_l,\varphi_{l+1},\cdots,\varphi_k,\cdots$的序列.

$\varphi=\lim_{k\to\infty}\varphi_k$ 或 $\varphi_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\varphi$：序列$(\varphi_k)$收敛，且其极限是$\varphi$.

$x\to a^+$：实数 $x>a$ 收敛到 $a\in\mathbb{R}$.

$x\to a^-$：实数 $x<a$ 收敛到 $a\in\mathbb{R}$.

$\liminf_{k\to\infty}\varphi_k$, $\limsup_{k\to\infty}\varphi_k$：数列或取值于集合$\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$的函数列$(\varphi_k)$的下极限，上极限（§7.2).

在不致引起混淆的情况下，为符号简洁计，记号“$k\to\infty$”被略去（例如，$\varphi=\lim\varphi_k$，$\varphi=\limsup\varphi_k$，$\varphi_k\to\varphi$，等等).

向量空间

$[a,b]=\{ta+(1-t)b;\,0\leqslant t\leqslant1\}$：端点为 a 和 b 的闭线段.

$(a,b)=\{ta+(1-t)b;\,0<t<1\}$：端点为 a 和 b 的开线段.

$\operatorname{co}A$：集合 A 的凸包（包含集合 A 的最小凸集；§4.7).

$\operatorname{Ker}L=\{x\in X;\,Lx=0\}$：线性映射 $L:X\to Y$ 的核.

$\operatorname{Im}L=\{y\in Y;\,y=Lx$，对某些 $x\in X\}$：空间 X 经线性映射

$L:X\to Y$ 后的象（也记为 $L(X)$）.

$\mathrm{Coker}L=Y/\mathrm{Im}\,L$：线性映射 $L:X\to Y$ 的上核.

$\|\cdot\|$，或$\|\cdot\|_X$：向量空间 X 中的范数.

$B_r(a)=\{x\in X;\|x-a\|<r\}$：中心在 a 点半径为 r 的开球.

$B_r=B_r(0)=\{x\in X;\|x\|<r\}$：中心在原点半径为 r 的开球.

$S_r=\{x\in X;\|x\|=r\}$：中心在原点半径为 r 的球面.

$|\cdot|$：半范数（它可能是一个范数）.

X'：赋范向量空间 X 的（拓扑）对偶（§1.2）.

$\|\cdot\|'$：对偶空间的范数.

X/Y：向量空间 X 对于 X 的向量子空间 Y 的商

$X\hookrightarrow Y$：X 包含于 Y 中，且具有连续内射.

$X\Subset Y$：X 包含于 Y 中，且具有列紧内射.

令 $f:A\subset X\to Y$ 且 $\alpha\geqslant 0$. 则

$f(x)=O(\|x\|^\alpha)$

或简单地$f(x)=O(x)$ 若 $\alpha=1$ $\Bigg\}\Leftrightarrow\Bigg\{$ 存在常数 c 及 X 原点的一个邻域 V，使得 $\|f(x)\|_Y\leqslant c(\|x\|_X)^\alpha$ 对一切 $x\in A\cap V$.

$f(x)=o(\|x\|^\alpha)$

或简单地 $f(x)=o(x)$ 若 $\alpha=1$ $\Bigg\}\Leftrightarrow\Bigg\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\|f(x)\|_Y}{(\|x\|_X)^\alpha}=0$.

$f(x,y)=o_y(x)=o(x,y)\Leftrightarrow$ 对每个 y，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\|f(x,y)\|}{\|x\|}=0$.

$\varphi_k\to\varphi$，或 $\varphi=\lim\varphi_k$：X 中的强收敛$\Leftrightarrow\lim\|\varphi_k-\varphi\|_X=0$.

$\varphi_k\rightharpoonup\varphi$：$X$ 中的弱收敛$\Leftrightarrow\lim L(\varphi_k)=L(\varphi)$对一切 $L\in X'$（§7.1）.

某些函数空间

$\mathscr{L}(X;Y)$：从赋范向量空间 X 到赋范向量空间 Y 中的所有连续线性映射的空间.

$\mathscr{L}(X)=\mathscr{L}(X;X)$（§12）.

$X' = \mathscr{L}(X; \mathbb{R})$（§1.2）.

$\mathscr{I}_{som}(X; Y) = \{A \in \mathscr{L}(X;Y);\ A$ 是双射的，且 $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y; X)\}$（§1.2）.

$\mathscr{I}_{som}(X) = \mathscr{I}_{som}(X; X)$（§1.2）.

附注. $\mathscr{I}_{som}(X;Y)$ 不是向量空间.

$\mathscr{L}_k(X;Y)$：从赋范向量空间 X 到赋范向量空间 Y 中的所有连续的 k—线性映射的空间，$k \geqslant 2$（§1.3）.

$\mathscr{C}^0(E;F)$：从拓扑空间 E 到拓扑空间 F 中的所有连续映射的集合.

$\mathscr{C}^0(E) = \mathscr{C}^0(E;\mathbb{R})$.

$\mathscr{C}^m(\Omega;Y)$：从赋范空间 X 的开子集 Ω 到赋范空间 Y 的所有 m 次连续可微的映射的空间，$1 \leqslant m \leqslant \infty$（§1.2 和 §1.3）.

$\mathscr{C}^m(\Omega) = \mathscr{C}^m(\Omega;\mathbb{R})$.

$\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})$，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界开子集，$1 \leqslant m \leqslant \infty$：由所有这样的函数 $v \in \mathscr{C}^m(\Omega)$ 所组成的空间，它使得对每个多重指标 α，$|\alpha| \leqslant m$，存在函数 $v^\alpha \in \mathscr{C}^0(\bar{\Omega})$ 使得 $v^\alpha|_\Omega = \partial^\alpha v$（§1.3）.

$\|v\|_{\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v^\alpha(x)|$（§1.3）.

$\mathscr{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界开子集，$1 \leqslant m < \infty$，$0 < \alpha \leqslant 1$：由所有这样的函数 $v \in \mathscr{C}^m(\bar{\Omega})$ 所组成的空间，它的 m 次偏导数满足在 Ω 上关于指数 λ 的 Hölder 条件（§1.3）.

$$\|v\|_{\mathscr{C}^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|v\|_{\mathscr{C}^m(\bar{\Omega})} + \max_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,\, y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

（§1.3）

以下设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集.

$\mathscr{D}(\Omega) = \{v \in \mathscr{C}^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp} v$ 是紧集$\}$（§6.1）.

$\mathscr{D}'(\Omega)$：Ω 上的分布空间（§6.1）.

$L^p(\Omega)$：dx-几乎处处相等的函数 v 的等价类空间，并满足

$|v|_{0,p,\Omega} = \left\{\int_\Omega |v(x)|^p dx\right\}^{1/p} < +\infty$，若 $1 \leqslant p < \infty$.

$|v|_{0,\infty,\Omega} = \inf\{a \geqslant 0;\ dx$-测度 $\{x \in \Omega;\ |v(x)| \geqslant a\} = 0\} <$