数学
在企业管理中的应用

施斌 编著

海洋出版社

内 容 提 要

企业管理存在着许多可以量化的现象，如产品数量和原材料以吨、公斤、克计，工资以万、千、元计，人员以千、百、个计，以及看上去无可量化的事物，如事物的内部联系等，均可用定量分析的方法解决。本书的特点，强调了企业管理的量化作用，并介绍了一些现代管理方法，运用这些方法即可将企业管理纳入科学管理。作者在书内讲了运用线性规划理论解决运输、分配、合理利用设备等问题；在生产作业计划安排与质量控制两章中，讲了连通工程优化方案，生产平准化方法及质量控制图的应用，质量的数理统计分析等方法的应用。如此等等，不一列举。所有概念都是运用例题和解题进行的。只要有中等数学基础的同志，均可以用得上看得懂。

本书适宜企业的管理干部阅读，也可供有关大专院校师生用作辅助教材。

数学在企业管理中的应用

施　斌编著

海 洋 出 版 社 出 版　（北京市复兴门外大街）

新华书店北京发行所发行　国防科工委印刷厂印刷

开本：787×1092　印张：1/32 11$\frac{3}{16}$ 字数：237千字

1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷

印数：9000

统一书号： 4193·0860　**定价：** 2.40 元

前　言

第二次世界大战结束后，工业生产发生了巨大的变化。主要表现在生产规模不断扩大，产品技术越来越复杂，产品生命期不断缩短，生产专业化协作和社会化的程度日益提高。这就要求企业管理的方法也要跟着飞速发展。现在的管理方法，已从过去的经济定性概念发展为定量分析；从凭经验判断转向采用数量决策方法；从人脑控制发展到电脑控制。因此，在企业管理中运用某些数学方法，就能为管理者提供最优决策的数量依据。这个最优，可能是经济效果最优，系统平衡最优，人力安排最优，设备使用最优，资源利用最优等等，使人力、物力、财力得到合理利用，产生最大的经济效益。例如，美国海军部1958年在研制北极星导弹时，利用计划协调管理整个研制工作，使计划比原定提前两年完成，节约了大量的资金。再例如，在水电站的管理中，要确定水库的最优蓄水量。就发电的需要来说，当然蓄水以多为好。就安全来说，如果雨季降雨量大，则必须考虑先放掉一些水，使水库存水量减少。否则，洪水到来时，水库水位猛涨，溢洪道来不及泄水，会使水坝坍塌，水电站将被破坏，也会给下游带来严重损失。但如果水库的水放空了，雨季降水的水量并不大，就必然由于存水不足，减少发电量。而利用存贮理论，可以计算出水库当时的最优存水量。据有关资料报道，1981年第一季度，由于我国各地的水电站合理

调度水位，比计划多发电14亿度，相当于节约用煤80万吨。

企业管理中可以运用哪些数学理论和数学方法呢？主要有规划论、决策论、对策论、图与网络方法，以及排队论、存贮论、质量控制等等。这些理论一般都比较复杂，内容也比较深奥，不易被一般的企业管理人员所掌握。但其中也有许多数学方法并不复杂，在企业管理中加以应用，就可以收到很好的经济效益。下面，我们将通过具体例子重点介绍解决企业管理中属于安排、调度、筹划、控制、决策等问题的具体方法和技巧。当然，只能介绍一些比较简单，容易掌握的方法。

本书承蒙华东工学院管理系副主任朱冰静老师审阅，并提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢。

作　者

一九八五年

目　　录

第一章　线性规划

第一节　线性规划概述

在企业管理中，我们经常碰到一些对现有资源、设备进行统一分配、全面安排和合理调度的问题。例如，大企业的几个分厂需要一定数量的某一规格的原材料，而同时有几个仓库有这种材料；在满足各分厂的需要和适应各仓库的供应能力的条件下，怎样调拨才能使所花费的总运输力（指总的运输“吨公里”数)或运费最小呢？这就是常说的“物资调运”问题。又例如，某车间有很多种不同零件，要在几种不同的机床上加工，而各种零件在不同机床上加工所用的时间是不同的；如何安排加工次序，才能使总的加工时间最短呢？这是工厂内作业计划安排问题。再如：工厂里根据设备条件，可以生产几种不同的产品，怎样来安排一个年度生产计划，才能使全厂的总产值或总利润为最大？这类问题在企业管理中是很多的，简直不胜枚举。

上述诸问题，分属于不同的类型，有着各种不同的特点。但我们只要仔细分析一下，就能找出这些问题的许多共性。

首先，上述问题的解决，都必须满足一定的条件。不管仓库的材料怎样调配，都必须要满足每个车间的需要，不能因为调配上的便利而不满足某车间的需要。同时也不能超出某一仓库的供应能力。不管零件的加工顺序如何安排，每个零件都必须按照一定程序进行加工。工厂的生产计划的安排，要满足国家的需要，而且必须在企业现有人力、物力、财力

的条件下安排。不满足这些条件，就不可能真正地解决上述问题。这便形成了线性规划中的“约束条件”。这些各种各样的条件，可以用一些数学式子来描述。例如，我们用x_{11}代表第一个仓库供给第一分厂的材料的数量（右下角第一个数码代表第几仓库；第二个数码代表第几分厂。下同），x_{21}代表第二个仓库供给一分厂材料的数量……。假如有 5 个仓库，4 个分厂，用a_1代表一分厂需要材料的数量，那么五个仓库供给一分厂材料的数量之和，应该满足于一分厂所需要的材料。因此，可用下面一个数学式子来描述：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=a_1$$

当然，对二分厂、三分厂和四分厂分别也有类似的一个方程式。同样地，让x_{12}、x_{13}、x_{14}分别代表第一仓库运给第二、三、四分厂的材料数量；b_1代表第一仓库存该材料的数量，则对一仓库来说，可以写出这样一个约束方程式：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=b_1$$

其次，上述问题的解决，有许许多多不同方案可以选择。例如第一仓库的材料，可以运往一分厂，也可以运给二分厂，也可以分别给一、二两个分厂都运去一部分。我们的目的当然不是随便去找一个方案，而是要从这许许多多的方案中，选取一个最优的方案。最优的标准是相对的，要根据问题的性质和要求来确定。在材料的调运中，一般是要求所花费的总运输力或总运费最小；在零件加工顺序的安排中，希望总的加工时间最短；对企业的生产计划，要求总产值或总利润最大；……。这些最优要求，用数量形式来描述，就成了线性规划中的“目标函数”。例如在材料的调运问题中，让C_{11}代

表第一仓库到一分厂的最短路程，……。那么，$C_{11}x_{11}$ 就表示从第一仓库调运 x_{11} 数量的材料给一分厂所花的运输力；$C_{12}x_{12}$ 表示从第一仓库运往二分厂 x_{12} 数量所花的运输力；等等。它们的和：

$$
\begin{aligned}
&C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+C_{13}x_{13}+C_{14}x_{14}+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22}\\
&+C_{23}x_{23}+C_{24}x_{24}+C_{31}x_{31}+\cdots\cdots C_{41}x_{41}+\cdots\cdots\\
&+C_{51}x_{51}+C_{52}x_{52}+C_{53}x_{53}+C_{54}x_{54}
\end{aligned}
$$

即代表整个调运计划所花的总运输力（吨公里或总运费）数。而我们的目的，是要这总的和数达到最小，这就是所谓运输问题的“目标函数”。虽然在不同的问题中，其目标函数的表现形式可能不一样；但在数学上看来，都不外是求函数的最大（或者最小）值。需要注意，线性规划中要求的最优，是指我们所考虑问题的整个最优，而不是某两地之间的局部最优。也就是说，在编制材料调运计划时，并不单单考虑某一仓库供给哪几个分厂的运费最小，而是考虑整个调运计划完成后，所花的总运费最小。

可是，满足一些约束条件的方案是很多的，在日常工作中，我们只能凭经验想到几种方案，这当然不可能保证所要的最优方案就在这几种方案之中。而线性规划的研究，却为我们提供了一些科学方法，能尽快地找到最优方案。在许多复杂的线性规划问题中，有时还需要借助电子计算机才能实现。

线性规划是规划论中的一个部分。从所研究问题的性质和要求来看，规划论可分为线性规划、非线性规划和动态规划三个部分。在所考虑的问题里，就数学上说，如果“目标函数”和“约束条件”都是线性方程（或线性不等式），则称这类规

划问题为“线性规划”；反之，称为“非线性规划”。例如在物资调运问题中，假如运费与运量之间的关系是成正比例，则物资调运问题就可归结为线性规划问题。假如运费与运量之间的关系不是成正比例，这时，物资调运问题就成为非线性规划问题了。另外，在上面所考虑的问题中，整个分配或者安排，只要一旦找到一个最优方案，问题就完全解决了。但是有些问题，不是一次最优选择就能确定整个最优规划的，而是要将工作的过程划分为若干个相互联系的阶段，在它的每一个阶段都需要作出决策，并且一个阶段的决策确定以后，常影响下一阶段的决策，从而影响整个过程的决策。例如，安排生产计划时，上个月的部件生产计划要影响下个月的计划，这是因为车间每月生产供总装的部件，除可供当月总装外，余下的部分可存入仓库备用。但仓库的容量又是有限的。显然如果确定某一个月最优生产计划，这并不是全年的最优计划。因此，需要制定一个全年的逐月生产计划，在满足需要和库存容量限制的条件下，安排出这种部件的总耗费工时数达到最小的计划。这种多阶段的确定的规划称为“动态规划”。由于动态规划和非线性规划应用的数学知识较多，所以在这本书里，只介绍一些最简单的线性规划问题。

第二节　运输问题

运输问题亦称物资调运问题，是线性规划中使用得最为成功，经济效果非常显著的一种运筹方法。国家在调运物资时，用了这种办法，已经节省了大量的资金。

下面我们将分别介绍解决这类问题的简单解法——图上

作业法和表上作业法。

一、图上作业法

在一定的交通线上，使用同一种交通工具来调运某种物资时，因为单位运价与运输距离成正比，因此使总运费最少，就是使吨公里最少。求这类平衡运输问题，可以用直观、简便的图上作业法。

把某物资从m个产地或仓库(以后简称为“发点”)，A_1，A_2，……A_m，调运到n个需要地，(以后简称为“收点”)B_1，B_2，……B_n；在制作调运方案时，要先画一个示意的交通图，表明收发点的大致位置、收发量，交通路线距离（距离不必与实际长度成比例)。在交通图上，发点用圈“○”表示，并将发货量记在圈“○”里面(单位：吨)。收点用“□”表示，并将收货量记在“□”里面(单位：吨)。两点间交通线的长度，记在交通线旁边(单位：公里)。然后作调运物资的流向图。物资调运的方向(流向)用“→”表示，并把“→”画在前进方向交通线的右边。把通过物资的数量(流量)记在“→”的右边，并加上括号，以区别于交通线上的距离。这样就成为物资调运流向图。如图1-1就是一个物资调运的流向图。

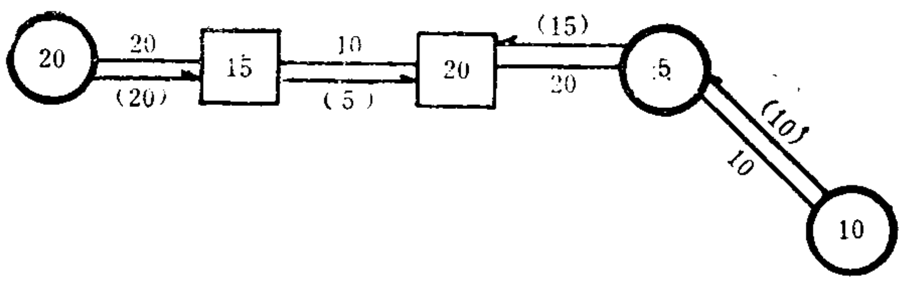

图 1-1 物资调运流向图

在物资调运中，把某物资从各发点调运到各收点，调运方案可以很多，问题是如何去找使运输量(吨公里)最小的调运方案。我们在平时的工作中，有哪些浪费运输力的现象呢？通常有两种不合理的现象，一种叫“对流”，另一种叫“迂回”。

所谓对流，就是在一段路线上有同一种物资往返运输。例如，通过铁路，一方面将100吨粮食从镇江运往上海，而另一方面又有 100 吨粮食从苏州运往南京。这样在镇江与苏州之间就出现了对流现象(图1-2)

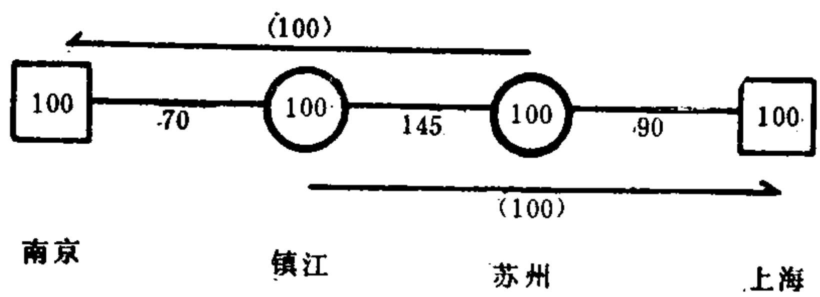

图 1 2 有对流的流向图

如果把调运流向图改成图1-3，即镇江的100吨粮食运往南京，苏州的100吨粮食运往上海，就避免了对流，可以节省运输量 $2\times145\times100=29000$(吨公里)。

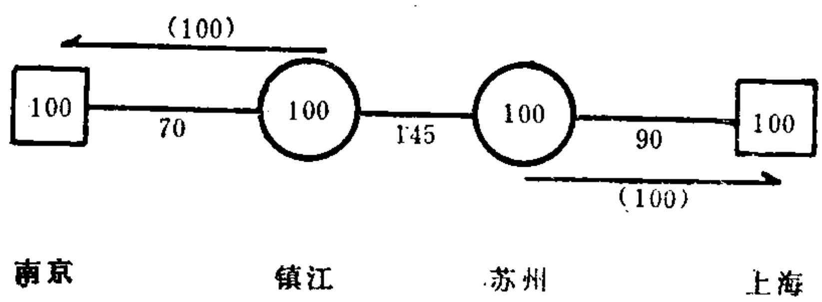

图 1-3 没有对流的流向图

再看迂回。就是在成圈的道路上，从一点到另一点有两条道路可走，一条是小半圈，一条是大半圈。如果运输物资不是走的小半圈，而是走了大半圈，这种“舍近而求远”的走法显然是不经济的。如图1-4，100吨货物不是直接从北京运到天津，而是从北京经过石家庄，德州到天津，便是迂回了。

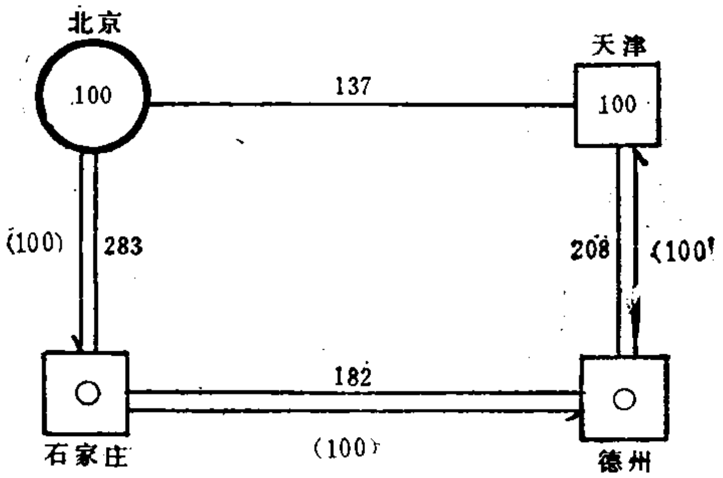

图 1-4 迂回运输流向图

从线性规划理论上可以证明，一个运输方案，如果没有对流和迂回，它一定就是运输力最节省的合理方案，也就是最优方案。当然，在实际的运输工作中，物资调运的合理与否，不能单单从运输力最省(或运费最少)来衡量，还需要考虑其他许多自然因素，如道路状况，气候状况以及安全因素等等。但在一般情况下，运输力最省，是可以作为衡量物资调运计划是否合理的一种重要标志。规划论所研究的合理运输，就是指运输力最省(或运费最少)的合理运输。所以，我们在企业管理中，制订运输方案时，就必须努力消除对流和迂回。

也许有人会说，对流和迂回，这样简单的现象，一看就知，还需要什么线性规划呢？事实并非如此。在比较复杂的

运输管理中，不象我们想象地那么简单。例如图1-5，在这个物资流向图中，表面上看似乎没有出现迂回，但实际上也是迂回运输。这是因为图1-5中内圈距离长7公里，大于全圈距离长13公里的一半。如果在内圈各流向中各减去内圈各流量中最小流量10吨，在外圈流量中增加流量10吨，同时在没有流向线段新添上外圈流向，流量为10吨，便缩短了内圈长，得出新的流向图，如图1-6，新的流向图等于把旧的流向图中10吨走大半圈的物资（因为内圈长大于半圈长），改为走小半圈（因为外圈长和没有流向线段总长小于半个圈），节省了运输量。所以，原流向图是一个不太直观的迂回运输。

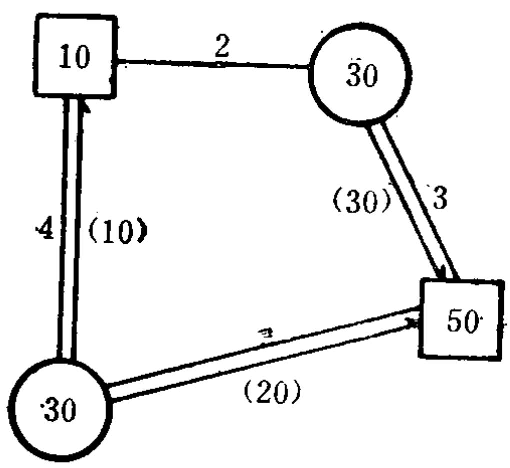

图 1-5 不容易看出的迂回流向图

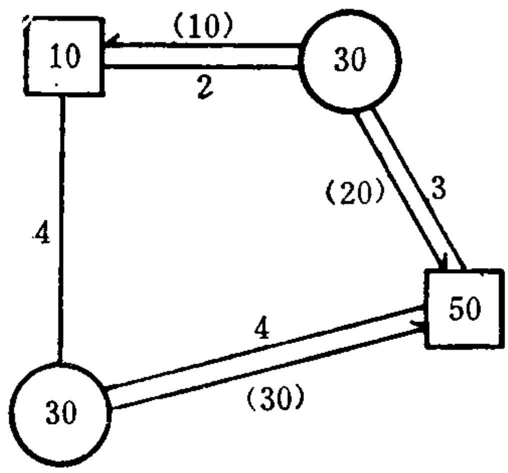

图 1-6 合理的流向图

这不过是一个比较简单的例子，在实际问题里，交通线纵横交错，常常有好多成圈的路线，单凭眼看是困难的。

下面我们介绍运输问题中的图上作业法，它能够帮助我们避免运输管理中的对流和迂回现象。步骤是：先找一个没有对流的初始可行方案，再检查有没有迂回。如果没有迂回

这个方案便是最优方案。如果有迂回，则调整这一方案，直至没有迂回为止。

物资调运的交通图分为两种情况：一是交通图不成圈，一是交通图有圈。现在我们结合例子介绍这两种交通图物资调运的一般方法。

1.交通图不成圈

例1.1 有某物资17吨，由A_1、A_2、A_3、A_4发出，发量分别为5、2、3、7（单位：万吨），运往B_1、B_2、B_3、B_4，收量分别为8、1、3、5（单位：万吨），收发量是平衡的，它的交通图如图1-7所示，问应如何调运，才使运输量（吨公里）最小呢？

解决这类问题的方法很简单，只要分别从各端点考虑起，由外向里，逐步进行各收发点之间的供销平衡。图1-7中的端点为A_1、B_2和B_4，现在就分别从这儿开始向里安排收或发。A_1的5万吨给A_2、A_2便成为有发量7万吨的发点，它必须

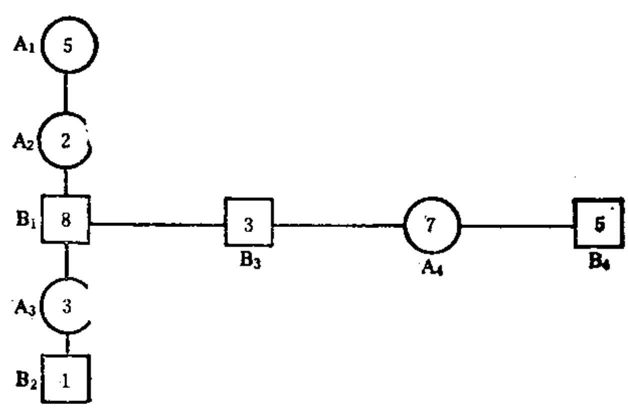

图 1-7 某物资的调运交通图

将这 7 万吨全部发给B_1。再考虑端点B_2，它需要 1 万吨，可从邻近的A_3点发来，得到满足。A_3还剩 2 万吨，全部发到B_1，使B_1加上A_2发来的 7 万吨，共收到 9 万吨，除满足了B_1本身需要的 8 万吨外，还可调出 1 万吨给B_3。再看端点B_4，它需要 5 万吨，可从A_4处调来，使A_4处还有 2 万吨多余，调往B_3处，这时B_3加上从B_1处调来的 1 万吨，于是得到了满足。调运流向图如下：

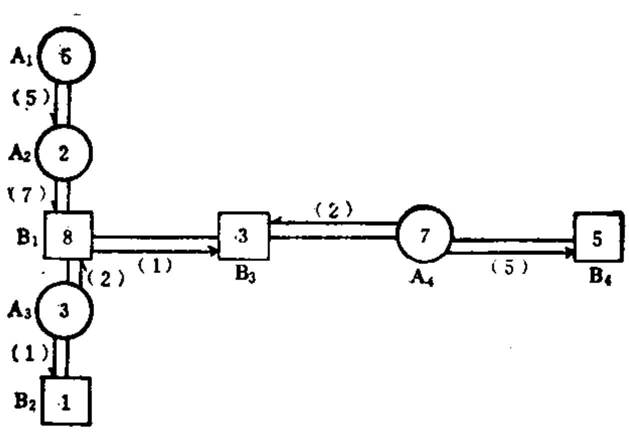

图1-8 某物资调运最优流向图

根据上面流向图的作法，很显然，这是一个没有对流现象的流向图，而且是唯一的。再根据对流现象是不合理的运输的原则，所以这唯一没有对流的流向图，就是唯一的最优方案的流向图。

有时同一流向图可以编制各种不同的调运方案。比如在这个例子中，因为B_3需要的 3 万吨，除A_4供给的 2 万吨外，其余 1 万吨可以由A_3供给，也可以由A_2供给，也可以由A_2、

A_3共同供给等等，如表1-1所示。这些方案所用的运输量是一样的，不会增加任何费用。所以调运时可以结合其他条件，选择其中一个。

表 1-1

调运量 收点 / 发点	B_1	B_2	B_3	B_4	发量(万吨)
A_1	(5)5[5]				5
A_2	(1)2[1.5]		(1)[0.5]		2
A_3	(2)1[1.5]	(1)1[1]	1[0.5]		3
A_4			(2)2[2]	(5)5[5]	7
收量(万吨)	8	1	3	5	17

注：表中圆括号中的数字为一个方案，方括号为另一方案，不带括号的数字为又一方案。

2.交通图有圈

例1.2 有物资800吨，由发点A_1、A_2、A_3、A_4，发量分别为50、300、200、250(单位：吨)，运往收点B_1、B_2、B_3、B_4，收量分别为200、200、350、50(单位：吨)，收发量平衡，交通图如图1-9所示，问如何调运，才使吨公里最小？

解这一类问题比较复杂，解决的办法是"丢边破圈"，丢一边，破一圈，直至无圈，把有圈的交通图化为不成圈的交通图，然后根据前面所介绍的交通图不成圈的办法，作一个运输初始方案。初始方案作出后，检查它有无迂回现象，如有迂回现象，再调整破圈方案，直至找出一个最优的调运方案。具体的步骤如下：

(1)运用"丢边破圈"法，把有圈的交通图，化为不成圈