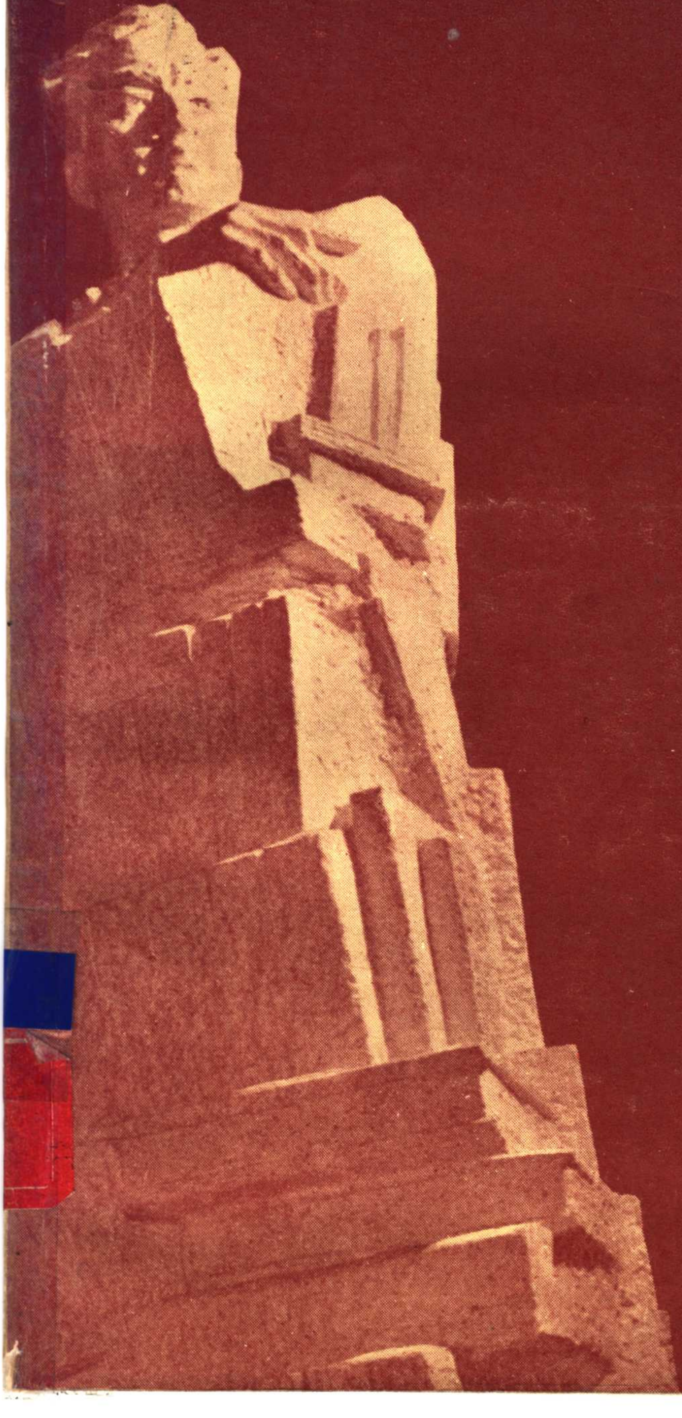
大学基础物理自学丛书

力学

下册



李庆贤 柳涛 编

大学基础物理自学丛书

力　　学

下　册

李庆贤　柳　涛　编

上海科学技术出版社

大学基础物理自学丛书

力　学

下　册

李庆贤　柳　涛　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 8.125　字数 176,000

1983 年 8 月第 1 版　1983 年 8 月第 1 次印刷

印数 1—26,000

书号：13119·1093　　定价：(科四) 0.76 元

目　　录

第七章

刚体静力学

在前面几章中，我们讨论物体运动时，经常把物体抽象为质点．质点没有大小和形状，谈不上转动．但在涉及转动的问题中，不能将物体抽象为质点，必须考虑物体的大小和形状．本章和下一章将分别研究大小和形状不变的物体，即所谓刚体的平衡和动力学规律．关于平衡问题的研究叫作静力学．刚体静力学在工程技术上有着广泛的应用．

§7·1 刚体和刚体的重心

自然界中的一切物体，在外力作用下或多或少总要发生形变．但如果作用力不甚大，以致物体的变形很不明显，或者物体的形变和所研究的问题关系不大，那末我们就可以把这些形变忽略不计，而把物体当作不会发生形变的情况来处理，这种在外力作用下不发生任何形变的物体叫作刚体．

刚体和质点一样是物理学中的一种理想模型．一个物体能否看作刚体，须根据所研究问题的具体情况来决定．例如，一根钢棒作为一个普通的杠杆来使用时，我们往往可以把它看作刚体．但如果要研究这根钢棒的弯曲或扭转，则必须把它看作为弹性物体（弹性力学将在第九章介绍）来处理，而不能把它看成为刚体．

我们总可以把一个刚体划分为许多微小的部分，把每一

个部分当作一个质点来看待，从而把刚体看成为质点系．因为刚体的大小和形状是不会改变的，所以这个质点系中任意两质点之间的距离是不变的．总之，刚体是一种特殊的质点系，其中质点间的相互位置保持不变．

刚体的每一个质点都受到重力的作用，这些重力的合力就是整个刚体的重力，这合力的作用点叫做重心．也就是说，重心是这样的点，好象刚体的全部质量都集中在这一点．

具有简单几何形状且材料均匀分布的刚体，其重心位置是我们所熟悉的．例如，矩形薄板的重心在对角线的交点位置；圆形薄板在圆心；椭球体在椭球体的中心；圆柱体在其对称轴的中点．总的说来，凡具有简单几何形状且材料均匀分布的刚体，其重心就在它的几何中心位置．至于一般情况下的重心位置计算方法，将在§7·6中加以讨论．

§7·2　平衡力系和力的可传性

作用在物体上的力的组合叫做力系．作用在刚体上的力系，如果能使原来（相对于惯性系）静止的刚体继续保持静止，也就是说，力系中所有力的作用互相抵消（亦即所有力矢量的和等于零），而且所有的力对于任意轴线的力矩之和等于零，这样的力系就叫做平衡力系．

实验表明，两个大小相等，在同一直线上方向相反的力，同时施于静止的刚体上或自刚体上移去，都不会改变刚体的静止状态．因此，它们组成一个最简单的平衡力系．

从这一事实出发，我们可以得出一条重要的原理，叫做力的可传性原理：作用在刚体上的力，其作用点可沿着力的作用线移动，而不改变它对刚体的作用．

为了证明这原理，我们假定在刚体上的 A 点有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用，如图 7-1 所示．在 $\boldsymbol{F}$ 的作用线上另取一点 B，并在 B 点增添力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，它们沿着 $\boldsymbol{F}$ 的作用线，但方向彼此相反，大小则均等于 F，这并不改变刚体的运动状态．但是，从图上可以看出，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_1$ 形成一对相等而相反的平衡力系．我们可以把这一对力从刚体上移去而不改变刚体的运动状态．这时刚体上只剩下作用在 B 点上的力 $\boldsymbol{F}_2$．这说明，$\boldsymbol{F}_2$ 与 $\boldsymbol{F}$ 对刚体的作用相同．换个说法，$\boldsymbol{F}$ 由 A 点移到了 B 点．这就证明了作用在刚体上的力可沿着力的作用线任意移动，而不改变其力学作用．但必须指出，力的可传性原理只适用于刚体，而不适用于弹性体或流体(参看第九和第十章)．

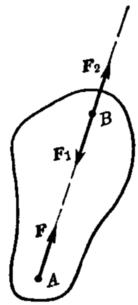


图 7-1　力的可传性原理的证明

§7·3　力矩与力偶

1．力矩　开关门窗，或用扳手拧螺帽，这时力的作用是使门窗或扳手转动．门窗的把手通常装在离轴较远的边框上，拧螺帽时手总是握在扳手柄的末端(见图 7-2)，这样转动比较省力．假如用手去推门的转轴，门不会转动；力的方向沿着扳手的轴线，螺帽不会旋转．实践证明：力对物体转动的作用，不仅和力的大小有关，而且和力的作用线到转轴的垂直距离有关．因此，在力学中，用力的大小和由转轴到力的作用线的垂直距离的乘积来量度力的转动作用．

设刚体所受的外力 $\boldsymbol{F}$ 垂直于转轴 Oz，把 $\boldsymbol{F}$ 所在的平面作为直角坐标系的 xy 平面，而以转轴作为 Oz 轴，如图 7-3 所

示．力的作用线到转轴之间的垂直距离 d 叫做力对于转轴的力臂；力的大小与力臂的乘积叫作力对于转轴的力矩．如用 L 表示力矩的大小，则

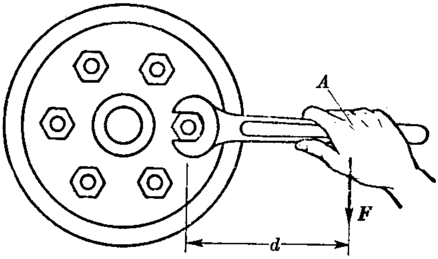


图 7-2　用扳手拧螺帽

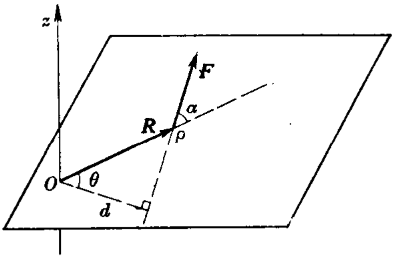


图 7-3　力 $\boldsymbol{F}$ 对转轴 Oz 的力矩

$$L=dF.$$

如果力的作用点为 ρ，该点的矢径为 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 之间的夹角为 α，则从图中可以看出

$$d=R\sin\alpha,$$

式中 R 是矢径 $\boldsymbol{R}$ 的大小，所以

$$L=RF\sin\alpha.$$

从 Oz 轴的正端看，使刚体作反时针方向转动的力矩为正；顺时针方向转动的力矩为负．实验证明，当几个力矩同时作用在一个有定轴转动的刚体上，它们的总作用效果等于

一个力矩，这个力矩叫做合力矩.

在某些情况下，为了计算方便，我们可以首先求出力在平面上的分力，再求出各分力的力矩，然后把它们相加. 例如，在图 7-4 中，P 点的坐标为 (x, y)，$\boldsymbol{F}$ 在 XY 平面内的分力为 F_x 和 F_y，则力 $\boldsymbol{F}$ 对于 OZ 轴的力矩为

$$L_z = xF_y - yF_x.$$

如果作用在刚体上的力不和转轴垂直，那末，我们可以把力分解为两个正交分力，一个和转轴平行；另一个与转轴垂直. 因为与转轴平行的力不能使刚体转动，所以使刚体产生转动作用的只决定于垂直分力. 因此，该力对轴的力矩，就是它的垂直分力对轴的力矩.

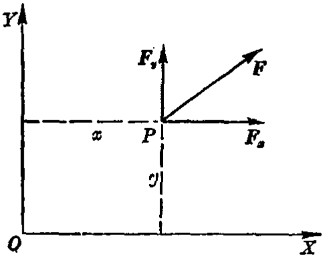


图 7-4 求力 $\boldsymbol{F}$ 对转轴 OZ 的力矩

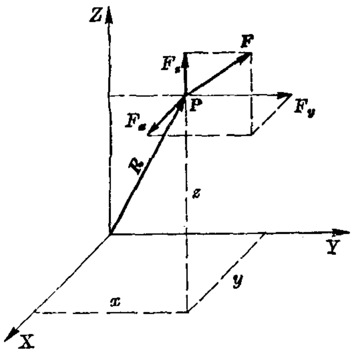


图 7-5 力 $\boldsymbol{F}$ 对 OX、OY、OZ 轴的力矩

如果作用在刚体上的力 $\boldsymbol{F}$，其作用点 P 的坐标为 (x, y, z)，如图 7-5 所示，那末，我们可以把 $\boldsymbol{F}$ 分解为三个分力 F_x，F_y 和 F_z，从而求出力 $\boldsymbol{F}$ 对于 OX，OY，OZ 轴的力矩分别为：

$$L_x = yF_z - zF_y;$$

$$L_y = zF_x - xF_z;$$

$$L_z = xF_y - yF_x.$$

力矩是矢量，力 $\boldsymbol{F}$ 对于原点 O 的力矩矢量，可以写成

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{F},$$

式中 $\boldsymbol{R}$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点的矢径．按矢量积的定义，$\boldsymbol{L}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所确定的平面，其指向则由右手螺旋法则来决定．也就是说，如果以右手螺旋的旋转方向表示由 $\boldsymbol{R}$ 的正方向，经过小于 π 的角度转到 $\boldsymbol{F}$的正方向，则螺旋前进的方向就是力矩 $\boldsymbol{L}$ 的方向．$\boldsymbol{L}$ 的大小等于

$$L=RF\sin\alpha,$$

式中 α 是 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 之间的夹角．

力矩的单位由力的单位和长度的单位所决定．在 SI 中，力矩的单位是牛顿·米．在 CGS 中是达因·厘米．如果力用千克力作单位，而长度用米作单位，此时力矩便以千克力·米为单位．

【例 7-1】 在图 7-6 中，假定长度单位为米，已知力 $F_1=30$ 牛顿，$F_2=40$牛顿，试求力 F_1、F_2 对 OX 轴的力矩之和．

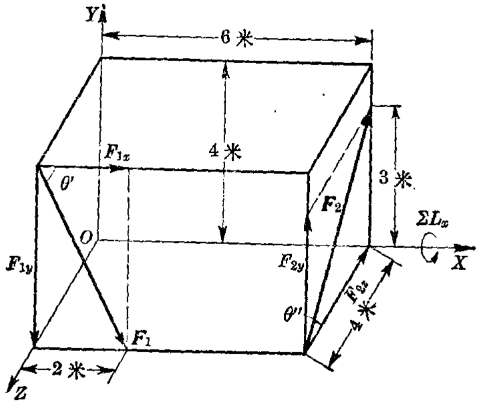


图 7-6

【解】 求几个力对某轴的合力矩，一般先把每一个力分别分解为正交分力，如图 7-6 所示．分力的大小如下：

$$F_{1x}=30\cos\theta'=30\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}=13.4\text{ 牛顿};$$

$$F_{1y}=30\sin\theta'=30\cdot\frac{4}{\sqrt{20}}=26.8\text{ 牛顿};$$

$$F_{2x}=40\cos\theta''=40\cdot\frac{4}{5}=32\text{ 牛顿};$$

$$F_{2y}=40\sin\theta''=40\cdot\frac{3}{5}=24\text{ 牛顿}.$$

各分力对 OX 轴的力矩:

$L_{x,1x}=0$（因 F_{1x} 与 OX 轴平行，$\sin\alpha=0$），

$L_{x,1y}=F_{1y}\cdot 4=107$ 牛顿·米，

其方向按前述规定，从 OX 轴正端看 $L_{x,1y}$ 的作用为反时针转动，故为正;

$L_{x,2x}=0$（因为力臂为 0），

$L_{x,2x}=F_{2y}\cdot 4=96$ 牛顿·米，

方向按规定为负．所以，F_1、F_2 对 OX轴的合力矩为

$$L_x=L_{x,1y}-L_{x,2x}=107-96=11\text{ 牛顿·米}.$$

2．**力偶**　大小相等，方向相反，不在一直线上的两个力的组合叫做力偶．力偶作用在一个刚体上，将使刚体产生纯粹的转动．汽车司机用双手操纵方向盘，如图 7–7 所示；钳工双手用扳牙攻螺纹，如图 7–8 所示；双手开启渠道的闸门，如图 7–9 所示．这些都是力偶作用在刚体上，使刚体产生转动的例子．

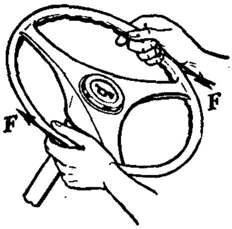


图 7–7　汽车司机操纵方向盘

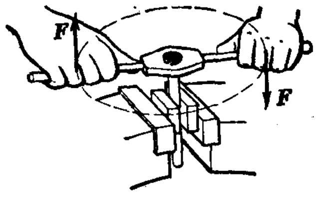


图 7–8　钳工用扳牙攻螺纹

实验证明：力偶对于刚体的作用，与组成力偶的力的大

小以及两力之间的垂直距离的大小有关，力越大刚体越容易被转动；两力之间的垂直距离越大，亦容易使刚体转动．因此，在力学中，用力偶中的一个力 F 和它的两力之间的垂直距离 d 的乘积来量度力偶的转动作用．把两力之间的垂直距离 d 叫做力偶臂，而把力 F 与 d 的乘积叫做力偶矩，如以 L 表示力偶矩，则

$$L=dF.$$

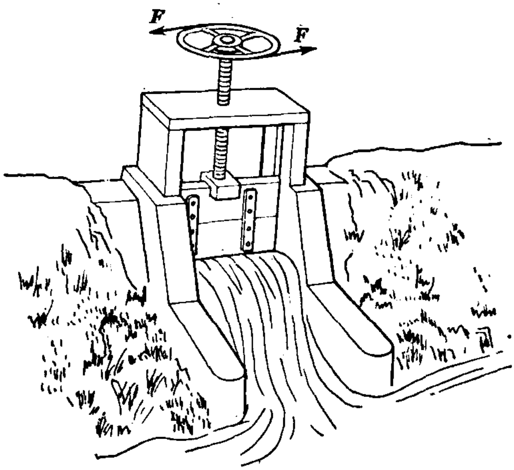


图 7-9　开启渠道闸门

可以证明，一个力偶的力偶矩，等于组成这力偶的两力对于任一与力偶平面垂直的转轴的力矩之和．例如在图 7-10 中，力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}$ 为组成力偶的两个力，这两个力对于 OZ 轴的力矩之和为

$$L_z=\overline{OB}F-\overline{OA}F=(\overline{OB}-\overline{OA})F=\overline{AB}F=dF.$$

通常又给力偶矩规定方向，从而把力偶矩当作矢量．力偶矩矢量的方向根据定义，与组成力偶的两力的方向成右手螺旋的关系．

读者应注意：力偶矩矢量与力矢量不同，力矢量作用在刚体上可以沿着作用线滑移，而不改变其作用效果. 因此，有时把作用在刚体上的力矢量称为滑移矢量. 而力偶矩矢量，则可从任意一个位置搬移到另一位置，只要保持它的大小和方向不变，其作用效果也不变. 正因为力偶矩矢量具有这一特性，所以，力偶矩矢量又叫做自由矢量.

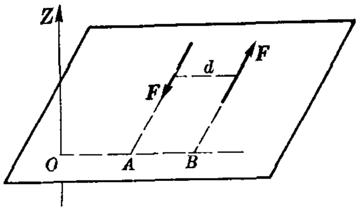


图 7-10

§7·4 刚体在平面力系作用下的平衡

在同一平面内，由两个以上的力所组成的力系，叫做平面力系. 如果我们在力系的平面内，取两个正交的轴作为 OX 和 OY 轴，而以垂直该平面的轴为 OZ 轴，那末平面力系的平衡条件是：

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0;$$
$$\sum (xF_y - yF_x) = 0, \tag{7-1}$$

式中，F_x 和 F_y 代表各力在 OX 和 OY 轴方向的分力，x 和 y 代表各力作用点的坐标. 上述第一和第二两个公式保证了刚体在平面内任何方向都没有加速度，第三个公式保证了刚体对于平面内任意一点没有角加速度.

在应用上述平衡条件解题时，一般可按下列步骤进行：

① 按已知条件作一简图.

② 标明作用在刚体上的每一个力的方向和作用点. 注意刚体的重量是通过刚体重心的竖直向下的力. 凡刚体与其他物体接触，接触处必定有作用力存在. 例如，连接刚体的绳，

作用于刚体的力总是沿着绳子的方向而背离刚体；刚体和光滑物体相接触的地方所受到的力，必定垂直于光滑面；如果作用力的方向未知，可以先假定一个方向(解出结果后，如该力为正，即力与假定的方向相同；如力为负，说明力与假设的方向相反)．

③ 在诸力所在的平面内，选择两个正交的坐标轴，作为 OX 轴和 OY 轴．在选择坐标轴时，尽可能使轴与多数力相平行或相垂直，而把坐标轴原点放置在一力或数个力的作用线上．

④ 从平衡条件，求出待求的各个未知量．

在某种特殊情况下，如果作用在刚体上的平面力系只有三个力，此时刚体又处于平衡状态．那末，这三个力如不相互平行，它们必相交于一点．因为在同一平面内的三个力，如不彼此平行，则它们中至少有两个相交．例如，$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 相交于 O 点，如图 7-11 所示，则第三个力 $\boldsymbol{F}_3$ 必将通过 O 点，其大小等于 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的矢量和，而方向相反．否则刚体就不能处于平衡状态．因此，如果刚体在三个不平行的力的作用下而处于平衡状态，则这三个力必在同一平面内，而且相交于一点．

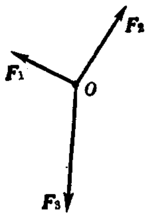


图 7-11　平面内不平行的三力，如果平衡，必相交于一点

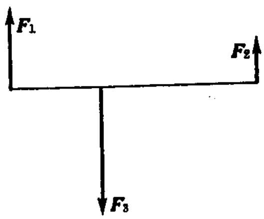


图 7-12　刚体在三个平行力作用下的平衡

如果作用在刚体上的是三个彼此平行的力，并且该三力又构成平面力系，那末这三个力中至少有一个力(如 $\boldsymbol{F}_3$)与其

他两个力($\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$)的合力位于同一直线上，而且这个力与合力大小相等、方向相反，如图 7-12 所示. 不然的话，刚体不能处于平衡状态.

【例 7-2】 一根粗细均匀的铁棒，重量为 W. 一端 A 被铰链固定，另一端 B 受到一个水平方向的力 $\boldsymbol{F}$ 使棒与水平方向成 60° 角，如图 7-13 所示. 设该棒处于平衡状态，试求作用在 A 点的力的大小和方向，并求 $\boldsymbol{F}$ 的大小.

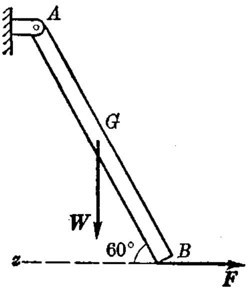


图 7-13

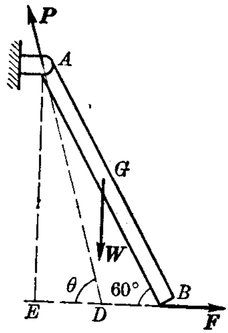


图 7-14 铁棒 AB 的受力图

【解】 先按题意作图 7-14，由图可以看出，作用在铁棒 AB 上的力只有三个：一个是作用在 B 点的力 $\boldsymbol{F}$，方向水平；另一个是铁棒所受的重力 $\boldsymbol{W}$，作用于棒的重心 G，方向向下；第三个力是作用在 A 点的力 $\boldsymbol{P}$，其大小与方向均未知.

因铁棒 AB 在三力作用下平衡，因此，这三力必相交于一点. 由于力 $\boldsymbol{F}$ 和重力 $\boldsymbol{W}$ 相交于 D 点，见图 7-14，所以，作用在 A 点的力 $\boldsymbol{P}$，其作用线也必通过 D 点. 它的力线为 DA. 过 A 作 BD 的垂线 AE，E 为 BD 延长线上的一点. 并设 ADE 角为 θ，则

$$\tan\theta = \frac{AE}{ED} = \frac{2AE}{EB} = 2\tan 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

由拉密定理，得

$$\frac{F}{\sin(90^\circ+\theta)} = \frac{W}{\sin\angle ADB} = \frac{P}{\sin\angle GDB},$$

亦即

$$\frac{F}{\sin(90^\circ+\theta)} = \frac{W}{\sin(180^\circ-\theta)} = \frac{P}{\sin 90^\circ},$$