黑龙江科学技术出版社

平面尺寸链的精度计算与分配

石振东　编著

PINGMIAN CHICUNLIAN DE
GDU JISUAN
U FENPEI

内容提要

本书从应用的角度出发，对零件、部件各尺寸所构成的呈线性关系的平面尺寸链进行了研究。具体内容有：判断增、减环；计算封闭环的基本尺寸、偏差及公差；利用极值法及概率法解平面尺寸链及尺寸链的精度分配。

本书可供机械、仪表专业学生学习，也可供从事机械设计与制造的工程技术人员及计量工作者参考。

封面设计：赵桂华

平面尺寸链的精度计算与分配

PINGMIAN CHICUNLIAN DE JINGDU

JISUAN YU FENPEI

石振东 编著

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区建设街35号）

依安印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 9.125印张 186千字

1986年6月第1版·1986年6月第1次印刷

印数：1—1,080册

书号：15217·204　　定价：1.45元

前　　言

平面尺寸链的精度计算与精度分配，在工程技术中已得到广泛地应用，是机械设计者不可缺少的一种有力的工具。

近几年来，国内出版的一些书籍中，在有关章节里介绍了尺寸链方面的内容，在一些杂志上也发表过有关这方面的论文，但专门论述平面尺寸链的书籍尚未见到。我想：若是能有一本这方面的书籍，对于从事机械设计工作的同志们定会有所裨益。本人虽然深知自己学识浅薄，实际工作经验贫乏，但本着向各位前辈及广大读者学习的精神，还是鼓起勇气作一次尝试，写出了这本小册子。本人衷心地希望，这本小册子出版后，能起到“抛砖引玉”的作用，殷切期望能有更多更好的有关这方面的书籍问世。

在本书的编写过程中，经常得到王守融、张德骍先生的指导与帮助，在此表示深深的感谢。

由于本人的业务水平和实际工作经验有限，这本小册子无论在编排方式、理论深度及文字表达方面，一定会存在着许多缺点及谬误，敬希广大读者惠予批评指正。

编著者

目　　录

第一章　基础知识

机器或仪表是由许多零件或部件组成的，在这些零件或部件的图样上，有许多起着相互配合作用的中心线、平面、圆柱面及其他各种形状的表面等。这些线、面之间是按一定的次序排列的，从而就构成了尺寸链。

在机械原理中，总设想零件的尺寸和外形都是理想的，都是绝对精确的，就是说零件或部件的各尺寸及形状方面是没有误差的，可是这种理想机构在客观实际中是不存在的。如果零件制造完毕或部件装配完毕后，它们的尺寸和形状都是近似的，都存在某种程度的误差（但在允许的精度范围内），那么，各零件或部件在已给定的运动规律中将会发生怎样的变化呢？能否按照预定的规律在一定的精度范围内运动呢？也就是说，零件或部件在都存有误差的情况下，能否按照一定的精度要求运转呢？尺寸链的计算是解决这一关键问题的基础。利用尺寸链的研究成果，可以定量地评定各零件制造时或装配后的误差对部件或整台机器所造成的影响，也可以根据预先规定的部件或机器的精度，确定各零件最合理的制造公差。同时，对尺寸链的深入研究还可以发现，利用尺寸链解法原理，可以进一步地分析零件制造时的加工精度、装配后的精度、机床运动链的精度以及当基准面不统一时工艺尺寸的换算等。因此，尺寸链的计算在机械设计与机

械制造业中有着广泛的应用。

§1.1 误差定义及误差公理

零件加工完毕后，由于种种不同的原因，不可避免地会存在误差。误差与精度在某种意义上是同义语，误差小则精度高，误差大则精度低。欲研究机构的精度如何，可先从研究误差入手。

要想知道误差的大小，就必须进行测定。测定就是拿待测的量直接或间接地与另一个同类已知的标准单位量相比较，把已知的标准单位量作为计量单位，这样便可以确定出被测的量是该标准单位量的若干倍或几分之几。因此，测定的基本公式可表示为

$$x = c\,u \qquad \cdots\cdots\cdots(1-1)$$

式中 x 为被测的物理量，u 是与 x 同类的已知的标准单位量，c 为读值。

一般说来，被测的物理量值是客观存在的、唯一的一个数值，就是误差理论中所描述的真值，而测定后的读值，由于各种不同因素的影响，总含有误差。因此，错误的读值与正确的客观值（真值）相比较后，就会得到误差。基于这种概念，误差的定义如下：

$$误差 = 错误值 - 正确值 \qquad \cdots\cdots\cdots(1-2)$$

式(1－2)称作误差的逻辑方程式。对于具体问题的误差公式，首先应根据实际情况，逻辑判别哪个值是错误值，哪个值是正确值，然后才能求出误差来。例如，在长度计量中，测量某一尺寸的误差公式为

$$误差 = 测定值 - 真值 \quad \cdots\cdots\cdots(1-3)$$

人们使用仪器进行测定所获得的测定值，总含有误差，故可以认为测定值是个错误值。而真值是指：[1]在某一时刻和某一位置或状态下，某物理量值效应所体现出的客观值。因此，真值是具有时间和空间涵义的，所以，真值就是正确值。

在 N 次的重复性测定中，第一次的测定值与第二次的测定值之差，显然不符合误差的定义，可以称做差异，其公式可表示为

$$d = M_i - M_j \quad (i \neq j,\ i = 1,\ 2\cdots,\ N)$$

上式中的 M_i 与 M_j 分别表示为第 i、第 j 次测定后的测定值。

由于真值是确定的，但又是一个未知的量，因而误差的大小也就无法获得。在此情况下，如何求得真值的“最佳估计值”呢？这是一个重要的问题。由于篇幅的限制及为了突出重点起见，本书就不一一详述了，读者如有兴趣，可参阅有关误差理论方面的书籍。[2],[3]

事物总是一分为二的，尽管真值是个确定的未知量，但为了使工业生产能够顺利地进行并保证计量单位的正确与统一，人们对于真值的定义在某些情况下又附加了一些新的含义与内容。这样，在某些特定情况下，真值又属于可知的，有些则从相对的意义上来说，其真值也是相对可知的。

真值属于可知的情况有如下三种：

(1) **理论真值** 例如，三角形的三内角之和恒为180°；同一量值自身之差恒为零；同一量值自身之比恒为1。此外，

理论设计值、某尺寸的基本尺寸及理论公式等，都可认为属于理论真值的范畴。

（2）约定真值 国际计量大会决议中[4]所规定的长度、质量、时间等单位的约定值（共七种），是具有严格的标准的。凡满足上述大会决议中的条件，并满足于精度要求而复制或复现出的量值，都可认为是约定真值。

（3）相对真值 用高一级的仪器或标准量器检定低一级的仪器或量器时，即可认为前者是后者的相对真值。

如果在误差定义的公式中，改变一下逻辑顺序，就引进了一个新的定义：

$$修正值=真值-测定值=-(误差) \quad \cdots(1-4)$$

则真值可表示为

$$真值=测定值+修正值=测定值+[-(误差)]$$

修正值又称作校正值。式（1－4）说明修正值恒等于负的误差，即修正值恒与误差的符号相反。在含有误差的测定值中加上修正值，便可以消除误差的影响（严格说来，能够修正的误差，仅是系统误差中已知大小和方向的已定系统误差的一种误差而已）。所以，在工业生产中，通常都采用加修正值的方法来提高测定时的准确度，同时又可保证全国范围内计量单位的一致性。

由于真值是个确定的未知量，这就增加了研究误差的困难性。要想知道误差的大小，就必须进行测定；而测定又需要建立某种标准单位作依据；所建立的标准单位是否精确，又必须再一次进行测定……。这样，就会陷入无穷的不定性之中，因而真值确实是个未知量。随着科学技术的进步，人

们尽管可以把误差控制得很小很小，可以逐渐地迫近真值，但总不能使误差降为零。对于测定值的真值来说，也是这样。误差产生的必然性已为人们的实践所证实，也为一切从事实验测定的人们所公认，由此，误差公理成立。

误差公理：在工程技术领域内，一般说来，真值是存在的、唯一的，可就是测不准它，因而实验误差存在于整个实验测定过程的自始至终。

长期从事于测定工作的同志们都有这么一个经验：当测定某种物理量值时，纵使测量仪器与测定方法在可能的范围内，已达到极度的精密与完善，虽经过多次反复测定，但各次结果总难完全一致。此种测定结果的差异，不仅因人异、器异、法异时为然，就是同一人使用同一仪器，在同一测定环境条件下，反复测定同一物理量值时，各次的测定结果也绝不会完全相同。这种多次测量结果的不一致性，是由于来源不同的各种误差造成的，而此种误差，又是一切测定过程中所难以避免的（误差公理的存在）。因此，测定值永远是个近似值。

§1.2 有效数字运算规则

数的用途基本上可分为两类：第一类是用来点数目的。例如点钞票，当钞票数量一定时，无论由谁来点，什么时候点，用什么方法点，只要不出现粗大误差（过失误差），都会得到同一个结果。本节并不涉及这一问题，因为它们不存在着我们所关心的需要研究的误差问题。第二类是用来表示测定结果的。测定结果的最末一位数字往往是靠估计得来

的，因而经测定得到的数据，都具有一定的大小不同的误差。本节主要讨论这一类的数。

测定时，读值需要估计到仪器刻度盘上最小格中的分数值。一般说来，可估计到一小格的 1/10，尽管它是靠估计得来的，是欠可靠欠准确的数字，但仍比略去这个数字要好一些。例如用伏特计测定电压，获取的测定值若为 219.5 伏时，那么前面的三个数字——219都是十分可信的，是可靠数字。而末一位数字，即处于十分位上的 5 则是靠估计得来的，就不十分可信，是个使人疑惑的数字。它虽然欠准确，但对测定结果来讲却是有意义的。在一般情况下，可以认为它的误差不会大于 0.1 伏。因此，就有理由把该测定值理解为：测定结果 219.5 必定是在 219.4 与 219.6 之间，或者把测得的电压值表示为 219.5±0.1（伏）。在这种情况下，我们把这四个数字（包括准确数字与欠准确数字）都看作是有意义的数字，并称做有效数字。

数字是指 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数中的任何一个数字。应当注意，数字 0 也包括在内。

有效数字表示该数字在测定结果的位置中所代表量的大小。例如，长度的测定结果为 32.47 毫米，其意义为：它在百分位上是 7 而不是 6 或 8；在十分位上是 4 而不是 3 或 5；在个位上是 2 而不是 1 或 3；在十位上是 3 而不是 2 或 4 或其他。每个数字都有物理意义，所以，它们都是有效数字。

同时，对 32.47 毫米这一测定结果，我们可以作下列断言：该测定结果是使用精确度可以敏感到 0.01 毫米的仪表测得的，而不是使用精确度更高或更低的仪表所获得的，这

就是有效数字的物理意义。

关于数字 0 与数字 5，应特别慎重地加以研究，因为它们本身具有某些特殊的性质，对它们处理得是否得当，对函数计算后的精确度有较大的影响。同时，对它们的正确处理方法，又极易为人们所忽视。所以，对于数字 0 与 5 所引起的舍入误差，应引起我们足够的重视。

一、关于数字 0

0 在某些场合下是有效数字，而在另一些场合下又不是有效数字。

（1）0 是有效数字的情况　某轴外径的测定结果若为 12.5 毫米，也就是说，外径尺寸在 12.4 到 12.6毫米之间，即 12.5±0.1 毫米。对该测定结果而言，测定时所使用仪表的精确度不会低于 0.1毫米，它的绝对误差为 $\delta=0.1$毫米，相对误差为 $\rho=\dfrac{0.1}{12.5}=0.8\%$。若将测定结果记录为 12.50 时，就是说外径尺寸介于 12.49 与 12.51 之间，即 12.50±0.01 毫米。在这种情况下，其绝对误差 δ 为 0.01 毫米，相对误差 ρ 为 0.08%，后者的相对误差与前者相比提高了10倍之多。由此可以断定，对 ϕ12.50 的测定结果而言，测定时所使用仪表的精确度不会低于 0.01 毫米。可见，前者与后者记录数据时在写法上略有不同，但明显地看出了误差的大小也不同。这就是说，后者的有效数字 0，是绝对不允许抹去的，它是由精确度可以敏感到 0.01 毫米的仪表进行测定的，测定结果在百分位上更靠近 0，而不是其他数字，此时的 0是个有效数字，是有物理意义的。

再如：测得的电阻值为 20.03 欧姆，该测定结果中的两个 0 显然都是有效数字。又如：测得两孔的中心距 $L=30.040$ 毫米，这三个 0 也都是有效数字。它的绝对误差可理解为 0.001 毫米，可写成为 30.040 ± 0.001 毫米。

（2）0 是无效数字的情况　长度的测定值若记录为 0.00320 米时，则前面的三个 0 都不是有效数字，因为它们仅与所取的“名数单位”有关，而与测定结果本身是否精确毫无关系，当改变“名数单位”后，这三个数字 0 便会相应消失。

如：0.00320 米 = 0.320 厘米 = 3.20 毫米

测定中，记录某一测定结果（例如 12.30 毫米）时，若仪表可以读到 0.01 毫米，则应记录为 12.30 毫米，不能记为 12.3 毫米。若记录成 12.3 毫米，则所记录的数据低于仪表所能达到的精度（相对误差低了 10 倍）。这种记录方法，如果不是记录者粗心大意，就是记录者缺乏有效数字方面的知识。

我们知道，通常所说的某长度已测定到 0.12 毫米的精度是没有什么意义的，除非把它的长度全部讲出来才有意义，因此，只有用相对误差才能描述测定值的精度。

有时，对某一测定结果来讲，特别是在某些生活用语中，对于末尾上的数字 0 就有些含混，此时，应有如下的辨认方法：如果说某长度为 2700000 毫米，到底后面的五个 0 中，有几个 0 算作有效数字呢？这只得由测定时的具体条件来判断。如果记录为 2.70×10^6，即意味着是 $(2.70\pm0.01)\times10^6$，这表明仅有三位有效数字。如果记录为 2.7×10^6，

这表明它仅存有两位有效数字。

二、关于数字5

该问题将在有效数字的运算规则中研究，此处就不叙述了。

有效数字的表达方法也可用数学公式加以归纳[5]。若测得的数据M可表示为$M=a_1a_2\cdots a_N$时，则测定值M可表示为

$$M=10^m(a_1+a_2\times10^{-1}+a_3\times10^{-2}+\cdots+a_N\times10^{-(N-1)}) \quad \cdots\cdots\cdots(1-5)$$

式中m为一整数。a_1，a_2，$\cdots$，a_N是0、1、2、…9、中的任何一个数字，但$a_1\neq0$。若式(1-5)成立，则称测得的数据M是一个具有N位有效数字的测定值，其中a_1，$a_2\cdots$，a_N都是M的有效数字。显然，该测定值M的最末一数的单位是$10^{m-(N-1)}$，它的绝对误差定满足$\delta\leqslant\frac{1}{2}\times10^{m-(N-1)}$。按照“四舍五入”原则，上述公式是不难理解的。

有效数字的位数N与数字舍入后的相对误差ρ之间，存在着下列的关系：

$$\rho\leqslant\frac{1}{2a_1}\times10^{-(N-1)} \quad \cdots\cdots\cdots(1-6)$$

式(1—6)证明如下：

式(1—5)若能成立，则有

$$M\geqslant a_1\times10^m$$

根据相对误差的定义，即可得到

$$\rho=\frac{\delta}{M}\leqslant\frac{1}{a_1\times10^m}\times\frac{1}{2}\times10^{m-(N-1)}$$

$$=\frac{1}{2a_1}\times10^{-(N-1)}$$

式(1—6)说明了测定结果的相对误差 ρ 与有效数字位数 N 有密切的关系。N 多时则 ρ 小，测定结果的精度高；N 少时则 ρ 大，测定结果的精度低。由此可以得出结论：测定结果 M 的精度，可由相对误差的大小来描述。M 中有效数字位数 N 的多与寡，定能描述测定结果 M 值精度的高与低。

〔例 1—1〕 若测定结果 M 记录为 $M=12345$，试用公式（1—5)表示该测定结果，并计算出它的绝对误差 δ_M 及相对误差 ρ_M 。

〔解〕 已知 $M=12345$，故知 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$，$a_5=5$。据式(1—5)，可将 M 表示为

$$M=10^4(1+2\times10^{-1}+3\times10^{-2}+4\times10^{-3}+5\times10^{-4})$$

M 共有 $N=5$ 位有效数字。显然可知 $m=4$，故其绝对误差为

$$\delta_M\leqslant\frac{1}{2\times1}\times10^{m-(N-1)}=\frac{1}{2}\times10^{4-(5-1)}=\frac{1}{2}=0.5$$

相对误差为

$$\rho_M\leqslant\frac{1}{2a_1}\times10^{-(N-1)}=\frac{1}{2}\times10^{-4}=0.5\times10^{-4}$$

关于有效数字的书写方法，在世界各国的专门著作及文献中，通常规定把测定值中欠准确的数字用较小的字来写，或在其下方画一横线，以示区别，例如写成 12.5_8 毫米或 $12.5\underline{8}$ 毫米。

测定结果中有效数字位数的多与寡，与测定时使用仪器的精度有关。保留有效数字过多，超出仪器所能达到的精度，徒劳无益。有效数字运用得当与否，乃是实验科学中数据处理的要点之一。

在工程计算中，疑惑不定的数字，仅取一位，似嫌不足，因此可取两位有效数字。在四则运算过程中，即便是略去无用数字达十数次之多，它所积累的误差，也应不致影响最后计算结果的倒数第二位不定数字达一个单位以上。这样，既可简化了运算手续，又能保证函数经计算后具有足够的精度。以此为依据，特建立了函数进行四则运算时的六条约定规则：

规则一：弃去冗赘数字时，采用“四舍六入”法。

测定值的最末一位数字，是靠估计得来的。数据处理时，若仍沿用过去的四舍五入原则，那么，当数据较多时，计算后的结果势必偏大。这是因为舍去者为 4 个数字（1、2、3、4），而进位加 1 者却是 5 个数字（5、6、7、8、9）的缘故。就其误差的性质而言，当舍入位的数字恰好是 5 时所造成的误差，它是有规律（逢 5 进位加 1）的，应属于系统误差。若能使数字 5 在进行舍、入时具有随机特性，即使 5 有时进位，有时舍去，这样便可使数字 5 的舍、入误差有正、负相消的机会了，即随机化了，“矛盾的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。”条件变了，从而改变了误差的性质。为改变条件所采取的具体措施就是“奇进偶不进”原则。为说明清楚，请参看图 1—1 所示。

$$\underbrace{1.\ 2.\ 3.\ 4.}_{\text{舍去四个数字}}\quad \underset{\boxed{\text{具体情况 具体分析}}}{\underset{\downarrow}{\boxed{5}}}.\quad \underbrace{6.\ 7.\ 8.\ 9}_{\text{进位四个数字}}$$

图 1—1

奇进偶不进原则是大家熟知的。舍、入位的数字恰好是5时，若其前一位数字是奇数，则进位加1使之变成偶数；若其前一位数字是偶数，则舍去，该数字仍保留为偶数。这样作的结果便会凑成偶数了，便于以后的计算。若采用“偶进奇不进”时，就达不到这一效果。

〔例1—2〕 试将下列左面的数据取成为四位有效数字。

〔解〕 据题意可知，应将数据取成四位有效数字。

$3.14159 \longrightarrow 3.142$

$2.71729 \longrightarrow 2.717$

$4.51050 \longrightarrow 4.510$

$3.21650 \longrightarrow 3.216$

$5.6235 \longrightarrow 5.624$

$7.691499 \longrightarrow 4.691$

应该注意：数字0当作偶数来处理。

规则二：误差最多保留两位有效数字。保留一位有效数字，当然也是可以的，理由如下：

在工程技术领域内，对误差若仅取一位有效数字，当各测定值相互进行比较并评定其质量时，就会感到它们之间的差别很小，很难评定质量的优与劣，所以表示误差时，可取两位而且最多也只取两位有效数字。

经过数据处理后长度计算的结果，若记录为 $M=122.48\pm0.12$ 毫米，绝对误差为0.12毫米。M 的意义是：十分位上的4，仅有一个单位疑惑不定；而在百分位的8上，将会有12个单位疑惑不定。如果误差取成三位有效数字时，即 $M=122.480\pm0.120$ 时，其绝对误差为0.120，那么在 M 数