

解析函数論簡明教程

A. И. 馬庫雪維奇著

閻昌齡 吳望一譯

人 民 教 育 出 版 社

本书原系根据苏联国立技术理论书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1957年出版的馬庫雪維奇(А. И. Маркушевич)著“解析函数論簡明教程”(Краткий курс теории аналитических функций)譯出,这一版是由楊应辰同志帮助本社对旧譯本修訂加工后的訂正本,改正了旧譯本中的一些翻譯錯誤以及旧譯本与原书中的一些刊誤与笔誤。原书經苏联高等教育部审定为国立大学教科書。

本书可供我国綜合大学数学系及数学力学系数学专业作为教学参考书,也可作为具有数学分析基础知識的讀者进修复变函数論的自学用書。

解析函数論簡明教程

А. И. 馬庫雪維奇著

閻昌齡 吳望一譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·934 开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张 $11 \frac{1}{16}$

字数290,000 印数13,501—16,500 定价(6)半1.10

1961年3月第一版 1963年11月第二版 1963年11月北京第5次印刷

序

本书是按大学数学物理系的教学大纲编写的解析函数论教科书。用来说明一般原理及方法的很多例子用小号铅字印刷。某些(但是不多)补充基础教程的问题和细节也用小号铅字印刷。对于希望深入这一领域的读者,请阅读附在本书末所列的论著。

在这本书的准备中作者广泛地使用了自著“解析函数论”^①一书。

作者

^① 有中译本——译者。

目 录

序	vi
引論	1
1. 解析函数論的对象(1). 2. 复变解析函数(2).	
第一章 复数及其几何表示	4
1. 复数在平面上的几何表示(4). 2. 复数的运算(5). 3. 序列的极限(8). 4. 无限大和球极投影(9). 5. 平面上的点集(12).	
第二章 复变函数、导数及其在几何学及流体力学上的意义	15
1. 复变函数(15). 2. 函数在一点的极限(15). 3. 連續性(17). 4. 連續曲綫(18). 5. 导数和微分(22). 6. 微分法则(23). 7. 在区域的内点可微的必要和充分条件(25). 8. 导数幅角的几何意义(32). 9. 导数模的几何意义(34). 10. 例: 綫性函数及分式綫性函数(35). 11. 頂点在无限远点的角(36). 12. 調和函数及共軛調和函数(38). 13 解析函数的流体力学解釋(42). 14. 例(47).	
第三章 初等解析函数及其对应的保形映射	49
1. 多項式(49). 2. 映射的保形性遭到破坏的点(50). 3. 形如 $w = (z-a)^n$ 的映射(51). 4. 分式綫性变换的群的性质(54). 5. 保圓性(57). 6. 交比的不变性(61). 7. 以直綫或圓周为边界的区域的映射(66). 8. 对称性及其保持(68). 9. 例(72). 10. Жуковский 函数(75). 11. 指数函数的定义(81). 12. 用指数函数所作的映射(82). 13. 三角函数(88). 14. 几何性态(92). 15. 續(96). 16. 多值函数的单值分支(97). 17. 函数 $w = \sqrt[n]{z}$ (99). 18. 函数 $w = \sqrt[n]{P(z)}$ (105). 19. 对数(109). 20. 一般幂函数和一般指数函数(114). 21. 反三角函数(120).	
第四章 复数項級数、幂級数	125
1. 收斂級数和发散級数(125). 2. Cauchy-Hadamard 定理(127). 3. 幂級数和的解析性(130). 4. 一致收斂性(133).	
第五章 复变函数的积分法	136
1. 复变函数的积分(136). 2. 积分的性质(139). 3. 归結成平常积分的計算(140). 4. Cauchy 积分定理(142). 5. 証明續(147). 6. 在定积分計算上的应用(150). 7. 积分和原函数(158). 8. Cauchy 积分定理推广到函数在积分閉路上非解析的情形(161). 9. 关于复合閉路的定理(162). 10. 积分看作多連通区域上的点函数(166).	

第六章 Cauchy 积分公式和它的推論.....169

1. Cauchy 积分公式(169). 2. 解析函数的幂级数展开式, Liouville 定理(171). 3. 解析函数和調和函数的无限可微性(174). 4. Morera 定理(178). 5. Weierstrass 关于一致收斂的解析函数項級数的定理(179).
6. 唯一性定理(183). 7. A -点, 特别是零点(186). 8. 幂级数的級数(187). 9. 把級数代入級数(190). 10. 幂级数的除法(193). 11. 函数 ctgz , tgz , cscz , secz 的幂级数展开式(200). 12. 調和函数展开成級数, Poisson 积分及 Schwarz 公式(202).

第七章 Laurent 級数. 单值性的孤立奇异点.

整函数和半純函数.....208

1. Laurent 級数(208). 2. Laurent 定理(211). 3. 单值性的孤立奇异点(215). 4. Сохоцкий 定理(220). 5. 解析函数的导数及其有理組合的奇异点(225). 6. 无限远点的情形(228). 7. 整函数和半純函数(229).
8. 整函数的乘积展开式(234). 9. 整函数的級和型(241).

第八章 留数及其应用. 幅角原理.....243

1. 留数定理及其在計算定积分中的应用(243). 2. 幅角原理及其推論(249). 3. 关于无穷远点的留数(256). 4. 留数定理在半純函数展开成最簡分式上的应用(258). 5. secz , ctgz , cscz 和 tgz 的最簡分式展开式(264).

第九章 解析开拓. Riemann 曲面的概念. 奇异点.....273

1. 解析开拓的任务(273). 2. 直接解析开拓(275). 3. 用解析函数元素作解析函数(277). 4. Riemann 曲面的构成(278). 5. Riemann-Schwarz 对称原理(281). 6. 幂级数在收斂圆边界上的奇异点(286).
7. 奇异点的判別法(290). 8. 按函数奇异点的已知分布确定幂级数的收斂半徑(294). 9. 多值性的孤立奇异点(297).

第十章 解析函数所作的映射. 橢圓函数的概念 Christoffel-

Schwarz 公式.....303

1. 解析函数所作的区域的映射(303). 2. 最大模原理及 Schwarz 引理(304). 3. 单叶性的局部判別法(307). 4. 解析函数的逆轉(308). 5. 单叶性概念推广到函数有极点的情形(313). 6. Riemann 定理的概念, 映射的唯一性(314). 7. 边界对应的概念, 逆定理(317). 8. 用橢圓积分映射上半平面(323). 9. Jacobi 橢圓函数 $\operatorname{sn} w$ 的概念(329). 10. Christoffel-Schwarz 积分(333). 11. 圆柱体的(无环量)繞流問題(341).
12. 最簡單的奇异点的流体力学解釋(343). 13. 圆柱繞流問題的一般解(347). 14. 机翼举力的确定(351).

参考书·····	356
索引·····	359
外文人名讀法表·····	363

引 論

1. 解析函数論的对象 本书叙述的对象有两个名称: 解析函数論和复变函数論。每个名称只强調了事情的一面, 因为我們将要研究复变解析函数。

如果 $f(x)$ 是定义在某个 (有限的或无限的) 区間 (a, b) 上的实变量 x 的函数, 而且在这区間的每个点 x_0 的邻域內都可以把 $f(x)$ 表为按 $x-x_0$ 的非負整幂展成的幂級数的和

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n + \cdots,$$
那末, $f(x)$ 叫做在这区間上的解析函数。

任意的多項式, 函数 e^x , $\sin x$, $\cos x$ 在整个数軸上是解析的; 每个有理函数, 函数 $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$ 在不含有該函数无定义 (变成无限大) 的点的区間上是解析的; 函数 $\ln x$ 在区間 $(0, \infty)$ 上是解析的。所有这些論断都容易验证。例如, 如果 $x_0 > 0$, 那末当 $|x-x_0| < |x_0|$ 时

$$\ln x = \ln x_0 + \ln \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right) = \ln x_0 + \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0)^n}{n x_0^n}.$$

解析函数的和, 差, 积, 商 (在除数不取零值的区間內) 是解析函数; 解析函数的导数同积分也是解析的。下面两个命題在一些补充条件下也成立: a) 解析函数的反函数是解析的; б) 如果 $A_j(x)$ ($j=0, 1, 2, \cdots, n$) 是解析函数, 那末由方程

$$A_0(x) + A_1(x)f(x) + \cdots + A_n(x)[f(x)]^n = 0$$

或方程

$$A_0(x) + A_1(x) \frac{df(x)}{dx} + \cdots + A_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} = 0$$

确定的函数 $f(x)$ 是解析的。

由这些命题出发, 容易明白, 由数学分析、几何学、力学和物理学的问题引出来的一切最重要的函数都是解析的。事实上, 不但上述的初等函数是解析的, 而且如 Gamma 函数 (Γ 函数)、圆柱函数 (Bessel 函数)、椭圆函数和其他许多函数在相应的区间上都是解析的。这种情况说明, 为什么解析函数在数学以及它的应用中起着这样重要的作用, 同时, 也是将解析函数的一般理论作为独立的数学课程的充分理由。

2. 复变解析函数 在研究最简单的解析函数——多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

的时候, 已经显示出来把它看作复变函数是适当的。

事实上, 只有采取这种看法才能表明, 使这函数取每个值 (特别是零) 的 x 值有 n 个 (其中有些可能重合)。由此还可以得出下的基本推论, 即, 多项式可以表示成一次因子的乘积

$$f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

以及其他和这有关的命题。

自然, 把多项式当作复变函数研究时, 它的系数可以取任意的复数值。同样, 在研究复变量 $z = x + iy$ 的最一般的解析函数时,

所用幂级数 $\sum_0^{\infty} A_n(z-z_0)^n$ 中的系数 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$, 以及数 z_0

都是复数。如果在复平面 (表示复数的平面) 上有某个点集, 在这集的任意一点的邻域, 函数 $f(z)$ 可以用幂级数的和表示为:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} A_n(z-z_0)^n,$$

则称 $f(z)$ 在这点集上是解析的。

以后我們可以看到, 数学分析的基本概念一般來說都可以推

广到复变函数上来,其中包括导数 $f'(z)$ 的概念及沿着某个平面曲线 L 的积分 $\int_L f(z)dz$ 的概念。

在本教程中将要证明以下的基本事实。下列四种条件中的任一种,都是函数 $f(z)$ 在复变量 z 平面的某个圆上为解析函数的必要和充分条件:

- a) 函数 $f(z)$ 在圆内每一点有导数 $f'(z)$;
 б) 若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 其中 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是实变量 x 和 y 的两个实函数, 那末 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是两次可微函数, 满足 Laplace 微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

而且以方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

彼此联系着;

в) 函数 $f(z)$ 在圆上連續, 而且它沿圆内任意閉曲綫的积分等于零;

г) 在半徑較小的任一同心圆上函数 $f(z)$ 可以用多項式逼近到任意的精确度。

在这些命題之上建立了全部复变解析函数的理論。性质 a), б), в), г) 的任意一个可以作为复变解析函数概念的定义基础。在本教程中将用以性质 a) 为基础的定义, 而只是在以后才证明这一定义和用幂級数的定义是等价的。

我們指出, 解析函数論在物理及力学中的許多应用是以性质 б) 为基础的; 例如, 所謂平面上的热平衡或电平衡問題、液体或气体穩恒流圍平面閉路的繞流問題, 都归結到 Laplace 方程, 而 Laplace 方程的种种解可构成全部解析函数。

第一章 复数及其几何表示

1. 复数在平面上的几何表示 在高等代数教程中叙述了复数的理論^①。这里我們只回忆一下复数理論的基本定义及結論，并且为了便于以后的討論，再作一些补充。

每个复数 c 具有 $a+bi$ 的形状，其中 a 和 b 是实数，而 i 是所謂虛数单位； a 叫做 c 的实部， b 叫做 c 的虛部。記作： $a=\text{Re}c$ ， $b=\text{Im}c$ （ Re 是拉丁文 *realis*（实的）开首两个字母， Im 是 *imaginaris*（虛的）开首两个字母）。两个复数 c' 和 c'' 当且只当 $\text{Re}c'=\text{Re}c''$ ， $\text{Im}c'=\text{Im}c''$ 的时候相等。如果 $\text{Im}c=0$ ，那末 $c=\text{Re}c$ 是实数；如果 $\text{Im}c\neq 0$ ，那末 c 叫做虛数，如果同时 $\text{Re}c=0$ ，就叫做純虛数。

为了在平面上作复数的几何表示，选取 Descartes 直角坐标系，而且把每个点 $M(x, y)$ 看作是复数 $x+yi$ 的象；数 $x+yi$ 叫做点 M 的附标。这一假定建立了平面上一切点集和一切复数集間的双方单值的对应。并且一切实数集由横坐标軸表示，因此叫做实軸，一切虛数集由不在横坐标軸上的点集表示，特別地，純虛数集由纵坐标軸表示，叫做虛軸（注意，虛軸上有一个点——坐标原点表示实数 0）。表示复数的平面叫做复平面（有时叫做 Gauss 平面），或按照表示复数的字母是 $z, w, \dots$ 而叫做 (z) 平面， (w) 平面等等。

“复数 $x+iy$ ”和“点 $x+iy$ ”用作同义語。

为了得到数 $z=x+iy$ 的几何表示，除了用点 (x, y) 以外，还用坐标軸上的投影是 x 和 y 的矢量来表示；它的起点可以安放在

^① 例如，参看 A. Г. Купом 著高等代数教程（有中譯本）。

任意点(图 1)。因此, 可以把“复数”和“矢量”用作同义语。矢量的长度 $|z|$ 叫做复数 z 的模, 实轴的正方向和矢量之间的角度 $\text{Arg}z$ (这里假定 $z \neq 0$) 叫做 z 的幅角; 同一个 z 的幅角可以相差 2π 的整数倍。但只有一个幅角的值 α 满足条件 $-\pi < \alpha \leq \pi$; 它叫做幅角的主值, 而且用 $\text{arg}z$ 表示。显然

$$\text{Arg}z = \text{arg}z + 2k\pi,$$

其中 k 表示任意整数。

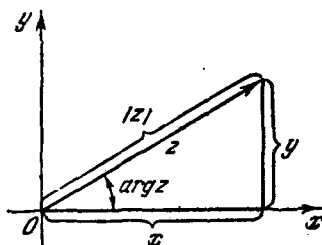


图 1.

我们还要指出下列的关系式:

$$\text{若 } z = x + iy, \text{ 那末 } |z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时 } \text{arg}z = \text{arctg} \frac{y}{x},$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 而 } y \geq 0 \text{ 时 } \text{arg}z = \text{arctg} \frac{y}{x} + \pi,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 而 } y < 0 \text{ 时 } \text{arg}z = \text{arctg} \frac{y}{x} - \pi.$$

z 的实部和虚部可以用模和幅角表示为:

$\text{Re}z = |z| \cos \text{Arg}z$, $\text{Im}z = |z| \sin \text{Arg}z$; 因此, z 本身可以表示成 $z = |z|(\cos \text{Arg}z + i \sin \text{Arg}z)$ 的形式, 这个式子叫做 z 的三角形式。

二复数 $x + iy$ 与 $x - iy$ 叫做是(相互)共轭的。如果其中之一用 z 表示, 那末另一个用 $\bar{z}$ 表示。显然, 点 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴是对称的。因此 $|z| = |\bar{z}|$; 此外, 如果 z 不是负实数, 那末 $\text{arg}z = -\text{arg}\bar{z}$; 如果 z 是负实数, 那末 $\text{arg}z = \text{arg}\bar{z} = \pi$ 。

2. 复数的运算 复数的加法和乘法运算由下列的等式定义:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

而减法和除法定义作相应的逆运算。由这些定义推出下列的重要推论：加法和乘法具有可交换和可结合的性质，乘法对于加法具有可分配的性质；两个因子的乘积，当且只当两因子中至少有一个是零时才等于零；减法总是可能的，除法在除数不等于零的条件下是可能的。这一切表明复数构成域。我们指出一个乘法的特殊情形：若 $c = a + ib$ ，那末 $c \cdot \bar{c} = a^2 + b^2 = |c|^2$ ，由此 $|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}}$ 。

复数 $c_1 = a_1 + ib_1$ 和 $c_2 = a_2 + ib_2$ 的加法在几何表示中按照向量加法规则来进行（图 2, a）。差 $c_1 - c_2$ 可以用起点在点 c_2 ，终点在点 c_1 的矢量来表示（图 2, b）。由此推出，二点 $c_1 = a_1 + ib_1$, $c_2 = a_2 +$

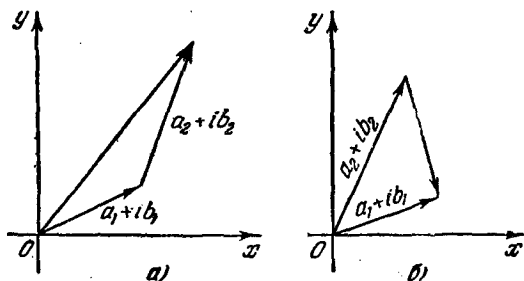


图 2.

$+ib_2$ 的距离等于差的模： $\rho(c_2, c_1) = |c_1 - c_2|$ 。我们还要指出关于和及差的模的重要不等式

$$|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|, \quad |c_1 - c_2| \geq ||c_1| - |c_2||;$$

等号只在矢量 c_1 和 c_2 共线而且同方向的时候成立。

第一个不等式可以推广到任意个相加项的情形：

$$|c_1 + c_2 + \cdots + c_n| \leq |c_1| + |c_2| + \cdots + |c_n|;$$

这里的等式也只能在所有 n 个矢量 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 共线而且同方向的条件成立。

为了得到乘法的几何解释，将 c_1 和 c_2 写成三角形形式

$$c_1 = |c_1|(\cos \text{Arg} c_1 + i \sin \text{Arg} c_1),$$

$$c_2 = |c_2|(\cos \text{Arg} c_2 + i \sin \text{Arg} c_2);$$

由乘法的定义得到:

$$c = c_1 c_2 = |c_1| |c_2| [\cos(\text{Arg} c_1 + \text{Arg} c_2) + i \sin(\text{Arg} c_1 + \text{Arg} c_2)];$$

由此得到:

$$|c_1 \cdot c_2| = |c_1| |c_2|, \text{Arg}(c_1 \cdot c_2) = \text{Arg} c_1 + \text{Arg} c_2$$

(最后的等式应该理解如下: $\text{Arg} c_1$ 和 $\text{Arg} c_2$ 的值的一切可能的和所成的集, 与 $\text{Arg}(c_1 \cdot c_2)$ 值的集一样)。 c_1 乘以 c_2 的几何表示, 就是矢量 c_1 伸长 $|c_2|$ 倍而且绕自己的起点旋转一个角 $\text{Arg} c_2$ 。对于商

$$c_1 : c_2 = \frac{c_1}{c_2} (c_1 \neq 0, c_2 \neq 0) \text{ 我們得到等式}$$

$$|c_1 : c_2| = |c_1| : |c_2|, \text{Arg}(c_1 : c_2) = \text{Arg} c_1 - \text{Arg} c_2.$$

由最后的等式推出, 矢量 c_1 与 c_2 之间的角度, 由 c_2 到 c_1 按反时针方向计算(可以相差 2π 的整数倍), 等于 $\text{Arg} \frac{c_1}{c_2}$:

$$\widehat{c_2, c_1} = \text{Arg} \frac{c_1}{c_2}.$$

由乘法規則得到:

$$c^n = |c|^n (\cos n \text{Arg} c + i \sin n \text{Arg} c),$$

其中 n 是自然数; 显然, 这公式当 $n=0$ ($c^0=1$) 时也是成立的。注意

到 $c^{-n} = \frac{1}{c^n}$, 我們得到:

$$c^{-n} = |c|^{-n} [\cos(-n \text{Arg} c) + i \sin(-n \text{Arg} c)].$$

因此, 对于任意整数 m 下列公式成立:

$$c^m = |c|^m (\cos m \text{Arg} c + i \sin m \text{Arg} c).$$

如果 p 和 q 是整数, $q \geq 2$ 而且分数 $\frac{p}{q}$ 是不可约的, 那末公式

$$c^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{c^p} = \sqrt[q]{|c|^p} \left[\cos\left(\frac{p}{q} \text{Arg} c\right) + i \sin\left(\frac{p}{q} \text{Arg} c\right) \right]$$

的右边给出 $c^{\frac{p}{q}}$ 的 q 个相异的值, 其中 $\sqrt[q]{|c|^{\frac{p}{q}}}$ 表示 $|c|^{\frac{p}{q}}$ 的正值。

为了得到全部相异的值, 只要固定 $\text{Arg} c$ 的某一个值, 设此值为 φ , 在等式右边用下列的 q 个值: $\varphi, \varphi+2\pi, \dots, \varphi+(q-1)2\pi$ 代入 $\text{Arg} c$ 。

3. 序列的极限 复数序列 $\{c_n = a_n + ib_n\}$ 在下列情况下叫做收敛于极限 $c = a + ib$ (记作: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ 或 $c_n \rightarrow c, n \rightarrow \infty$), 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 有正数 $N(\varepsilon)$ 存在, 使当 $n > N(\varepsilon)$ 时 $|c_n - c| < \varepsilon$ 。因为当 $n > N(\varepsilon)$ 时 $|a_n - a| \leq |c_n - c| < \varepsilon$ 和 $|b_n - b| \leq |c_n - c| < \varepsilon$, 所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 。因此, 最后的这两个关系式是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n) = a + ib$ 的推论。反之, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$,

那末当 $n > N_1(\varepsilon)$ 时 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ 和 $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$; 因此, 当 $n > N_1(\varepsilon)$ 时 $|a_n + ib_n - (a + ib)| = |c_n - c| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$, 这就是说 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ 。

因此, 关系式 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ib_n) = a + ib$ 和两个关系式 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ 是等价的。这一事实使得实数序列极限的一切理论都可以转移到复数序列的情形。例如, 我们得到下列收敛的必要和充分条件 (Cauchy 准则): 对于每个 $\varepsilon > 0$ 有 $N(\varepsilon)$ 存在, 使当 $n > N(\varepsilon)$ 而 p 是任意自然数的时候 $|c_{n+p} - c_n| < \varepsilon$ 。此外, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} c'_n = c', \lim_{n \rightarrow \infty} c''_n = c''$, 那末

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c'_n \pm c''_n) = c' \pm c'', \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c'_n \cdot c''_n) = c' \cdot c'', \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c'_n}{c''_n} = \frac{c'}{c''}$$

[最后这个式子在 $c''_n \neq 0 (n=1, 2, \dots)$ 而且 $c'' \neq 0$ 的条件下成立]。

我们把以点 c 为中心以任意的 ρ 为半径的圆的内部叫做点 c

的 ρ -邻域。显然，点 z 当且只当 $|z-c| < \rho$ 的时候属于这一邻域。现在序列 $\{c_n\}$ 的极限的定义可以给予下列的几何说法：若对于任意的 $s > 0$ ，序列中从某一个号码开始的一切点皆属于点 c 的 s -邻域，则称序列 $\{c_n\}$ 收敛于极限 c 。

請讀者证明，由 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ 总可以推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = |c|$ ，此外，如果 $c \neq 0$ ，那末，有 $\text{Arg} c_n$ 的值的序列存在，它的极限等于 $\text{Arg} c$ 的一个值；可以取幅角的主值的序列为这样的序列，但当 c 是负实数时，而 c_n 中既有无限多个点在实轴之上又有无限多个在实轴之下的情形除外。我們約定将上述序列 $\{c_n\}$ 的幅角的性质写作： $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg} c_n = \text{Arg} c$ 。反之，如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Arg} c_n = \text{Arg} c$ 而且 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = |c|$ ，那末 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ 。

4. 无限大和球极投影 为了解析函数論的需要，在上述的正常的（有限的）复数以外还要补充一个非正常的（无限的）复数，用符号 ∞ 表示；叫做无限大或无限远点。无限远点的处理以下列定义和法則为基础。以坐标原点为中心，以 ρ 为半径的圆的外部叫做点 ∞ 的 ρ -邻域。显然，点 z 当且只当 $|z| > \rho$ 时属于这一邻域。

若对于任意的 $\rho > 0$ 序列 $\{c_n\}$ 从某个号码开始的一切点都属于无限远点的邻域 $|z| > \rho$ ，換句話說，若对于任意的 $\rho > 0$ 有 $N(\rho) > 0$ 存在使得 $n > N(\rho)$ 时 $|c_n| > \rho$ ；那末序列 $\{c_n\}$ 叫做收敛于 ∞ （記作 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ ）。因此， $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 的条件与 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = +\infty$ 的条件等价。还要注意，在 $c_n \neq 0$ 的情形， $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 的条件与

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = 0$ 的条件等价。

对于非正常的复数沒有引入实部和虚部的概念以及幅角的概念，精确地說，这些概念都认为沒有意义（注意，幅角的概念对于数 0 也沒有意义）。至于复数 ∞ 的模，則使用記号 $+\infty$ ； $|\infty| =$

$= +\infty$ 。

按照定义建立了下列运算的意义，其中 a 及 α 表示正常复数 ($\alpha \neq 0$):

$$\infty \pm a = a \pm \infty = \infty, \quad \infty \cdot \alpha = \alpha \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty,$$

$$\frac{a}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{a} = \infty, \quad \frac{a}{0} = \infty.$$

运算 $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 没有意义。

为了得到数 ∞ 的几何表示，我们采用以球面上的点表示复数的方法。

为此我们以复平面 z 上的点 O 为球心作半径为 1 的球面 (图 3)。为了明显起见，我们使用地理学上的术语。球面和复平面相交的圆周叫做赤道，通过点 O 与平面垂直的直线叫做球的轴，轴与球面相遇的点 N 和 S 各叫做北极和南极。

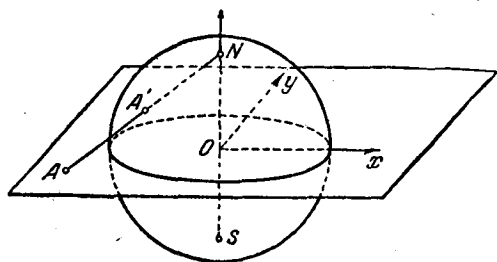


图 3.

此外还要使用下列

的概念和术语：北半球及南半球、子午线（经线）、纬线、经度 λ 及纬度 φ 。纬度由赤道算起，在 $-\frac{\pi}{2}$ (南极) 到 $+\frac{\pi}{2}$ (北极) 的界限内。经度在赤道平面上由 Ox 轴的正的部分算起，在 $-\pi$ 到 π 的界限内 ($-\pi$ 除外而包含 π)；这里，认为由北极的一侧观察时赤道上的逆时针方向是正方向。现在我们将 N 与球面上的任意点用射线连结，而且画出每一射线与平面相遇的点。这样，球面上除点 N 以外的一切点都投影到了平面上。这一投影 (以点 N 为中心的中心投影) 叫做球极投影；它最初是在天文学上，后来又在

地理学上用以把天球或地球投影在平面上的。借助于球极投影, 球面上的每个点(除 N 以外)可以看作是平面上对应点的图象, 同时也是平面上这一点所表示的复数的图象。我们要说明, 球面上表示复数 $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ($\alpha = \arg z$) 的点的纬度和经度与数 z 的模和辐角有怎样的关系。

由图 4 得到, $\widehat{ON A} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, 因此, $r = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$; 此外, 显

然, $\alpha = \lambda$; 由此 $\varphi = 2\operatorname{arctg} r - \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \alpha$ 。如果有序列 $\{z_n\}$, 对于它 $|z_n| = r_n$ 且满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, 那末, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$, 因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\operatorname{arctg} r_n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ 。这样, 球面上表示数 z_n 的点无限地逼近于北极 N 。反之也正确: 如果 $\varphi_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (不管经度有怎样的值 λ_n), 那末 $r_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2}\right) \rightarrow +\infty$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ 。所以很自然地

我们约定把点 N 看作无限远点在球面上的图象。这些约定和下列情况完全符合, 平面上无限远点的邻域 $|z| > \rho$ 在球面上的图象是近极区域 $\varphi > 2\operatorname{arctg} \rho - \frac{\pi}{2}$; 当 $\rho \rightarrow \infty$ 时这一区域收缩成北极。

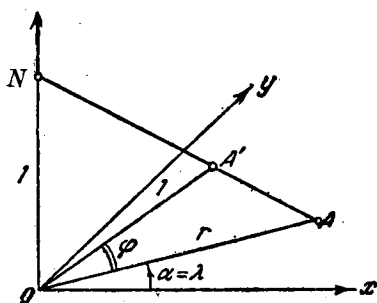


图 4.

复平面加上想象的唯

一的无限远点, 叫做扩充了的复平面或简称扩充平面。扩充平面的直观表示就是全球面。只由正常点(有限点)构成的复平面叫做有限复平面或简称有限平面。由上面所说可知, 有限平面可以用除