解析函数論簡明教程

A. И. 馬庫雪維奇著
閻昌齡　吳望一譯

人民教育出版社

本书原系根据苏联国立技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1957 年出版的馬庫雪維奇 (А. И. Маркушевич) 著“解析函数論簡明教程”(Краткий курс теории аналитических функций) 譯出，这一版是由楊应辰同志帮助本社对旧譯本修訂加工后的訂正本，改正了旧譯本中的一些翻譯錯误以及旧譯本与原书中的一些刊誤与笔误。原书經苏联高等教育部审定为国立大学教科书。

本书可供我国綜合大学数学系及数学力学系数学专业作为教学参考书，也可作为具有数学分析基础知識的讀者进修复变函数論的自学用书。

解析函数論簡明教程

A. И. 馬庫雪維奇著

閻昌齡　吳望一譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·934　开本 850×1168 1/32　印张 11 9/16

字数 290,000　印数 13,501—16,500　定价(6)¥1.10

1961 年 3 月第一版　1963 年 11 月第二版　1963 年 11 月北京第 5 次印刷

序

本书是按大学数学物理系的教学大綱編写的解析函数論教科书。用来說明一般原理及方法的很多例子用小号鉛字印刷。某些(但是不多)补充基础教程的問題和細节也用小号鉛字印刷。对于希望深入这一領域的讀者,請閱讀附在本书末所列的論著。

在这本书的准备中作者广泛地使用了自著"解析函数論"[1]一书。

作者

[1] 有中譯本——譯者。

目　录

引　論

1. 解析函数論的对象　本书叙述的对象有两个名称: 解析函数論和复变函数論。每个名称只强調了事情的一面，因为我們将要研究复变解析函数。

如果$f(x)$是定义在某个（有限的或无限的）区間(a, b)上的实变量x的函数，而且在这区間的每个点x_0的邻域内都可以把$f(x)$表为按$x-x_0$的非負整幂展成的幂級数的和

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

那末，$f(x)$叫做在这区間上的**解析函数**。

任意的多項式，函数e^x, $\sin x$, $\cos x$在整个数軸上是解析的；每个有理函数，函数$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$在不含有該函数无定义(变成无限大)的点的区間上是解析的；函数$\ln x$在区間$(0, \infty)$上是解析的。所有这些論断都容易驗证。例如，如果$x_0>0$, 那末当$|x-x_0|<|x_0|$时

$$\ln x=\ln x_0+\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)=\ln x_0+\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{nx_0^n}.$$

解析函数的和，差，积，商(在除数不取零值的区間内)是解析函数；解析函数的导数同积分也是解析的。下面两个命題在一些补充条件下也成立：a)解析函数的反函数是解析的；б)如果$A_j(x)$ $(j=0, 1, 2, \cdots, n)$是解析函数，那末由方程

$$A_0(x)+A_1(x)f(x)+\cdots+A_n(x)[f(x)]^n=0$$

或方程

$$A_0(x)+A_1(x)\frac{df(x)}{dx}+\cdots+A_n(x)\frac{d^nf(x)}{dx^n}=0$$

确定的函数 $f(x)$ 是解析的。

由这些命题出发，容易明白，由数学分析、几何学、力学和物理学的問題引出来的一切最重要的函数都是解析的。事实上，不但上述的初等函数是解析的，而且如 Gamma 函数（Γ 函数）、圆柱函数（Bessel 函数）、橢圓函数和其他許多函数在相应的区間上都是解析的。这种情况說明，为什么解析函数在数学以及它的应用中起着这样重要的作用，同时，也是将解析函数的一般理論作为独立的数学課程的充分理由。

2. 复变解析函数 在研究最簡单的解析函数——多項式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \quad (a_n\neq 0)$$

的时候，已經显示出来把它看作复变函数是适当的。

事实上，只有采取这种看法才能表明，使这函数取每个值（特别是零）的 x 值有 n 个（其中有些可能重合）。由此还可以得出以下的基本推論，即，多項式可以表示成一次因子的乘积

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

以及其他和这有关的命题。

自然，把多項式当作复变函数研究时，它的系数可以取任意的复数值。同样，在研究复变量 $z=x+iy$ 的最一般的解析函数时，所用冪級数 $\sum\limits_0^\infty A_n(z-z_0)^n$ 中的系数 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$，以及数 z_0 都是复数。如果在复平面（表示复数的平面）上有某个点集，在这集的任意一点的邻域，函数 $f(z)$ 可以用冪級数的和表示为：

$$f(z)=\sum_0^\infty A_n(z-z_0)^n,$$

則称 $f(z)$ 在这点集上是解析的。

以后我們可以看到，数学分析的基本概念一般来說都可以推

广到复变函数上来，其中包括导数 $f'(z)$ 的概念及沿着某个平面曲綫 L 的积分 $\int_L f(z)dz$ 的概念。

在本教程中将要证明以下的基本事实。下列四种条件中的任一种，都是函数 $f(z)$ 在复变量 z 平面的某个圆上为解析函数的必要和充分条件:

а) 函数 $f(z)$ 在圓內每一点有导数 $f'(z)$;

б) 若 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，其中 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是实变量 x 和 y 的两个实函数，那末 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是两次可微函数，滿足 Laplace 微分方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

而且以方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

彼此联系着;

в) 函数 $f(z)$ 在圓上連續，而且它沿圓內任意閉曲綫的积分等于零;

г) 在半徑較小的任一同心圓上函数 $f(z)$ 可以用多項式逼近到任意的精确度。

在这些命題之上建立了全部复变解析函数的理論。性质 а), б), в), г)的任意一个可以作为复变解析函数概念的定义基础。在本教程中将用以性质 а)为基础的定义，而只是在以后才证明这一定义和用冪級数的定义是等价的。

我們指出，解析函数論在物理及力学中的許多应用是以性质 б)为基础的;例如，所謂平面上的热平衡或电平衡問題、液体或气体稳恒流圍平面閉路的繞流問題，都归結到 Laplace 方程，而 Laplace 方程的种种解可构成全部解析函数。

第一章　复数及其几何表示

1. 复数在平面上的几何表示　在高等代数教程中叙述了复数的理論①。这里我們只回忆一下复数理論的基本定义及結論，并且为了便于以后的討論，再作一些补充。

每个复数 c 具有 $a+bi$ 的形状，其中 a 和 b 是实数，而 i 是所謂虛数单位；a 叫做 c 的实部，b 叫做 c 的虛部。記作：$a=\mathrm{Re}c$，$b=\mathrm{Im}c$(Re 是拉丁文 realis(实的) 开首两个字母，Im 是 imaginarius(虛的)开首两个字母)。两个复数 c'和c'' 当且只当$\mathrm{Re}c'=\mathrm{Re}c''$，$\mathrm{Im}c'=\mathrm{Im}c''$ 的时候相等。如果 $\mathrm{Im}c=0$，那末 $c=\mathrm{Re}c$ 是实数；如果 $\mathrm{Im}c\neq0$，那末 c 叫做虛数，如果同时 $\mathrm{Re}c=0$，就叫做純虛数。

为了在平面上作复数的几何表示，选取 Descartes 直角坐标系，而且把每个点 $M(x, y)$看作是复数 $x+yi$ 的象；数 $x+yi$ 叫做点M的附标。这一假定建立了平面上一切点集和一切复数集間的双方单值的对应。并且一切实数集由横坐标軸表示，因此叫做实軸，一切虛数集由不在横坐标軸上的点集表示，特别地，純虛数集由纵坐标軸表示，叫做虛軸(注意，虛軸上有一个点——坐标原点表示实数 0)。表示复数的平面叫做复平面(有时叫做 Gauss平面)，或按照表示复数的字母是 $z, w, \cdots$而叫做(z)平面，(w)平面等等。

"复数 $x+iy$"和"点 $x+iy$"用作同义語。

为了得到数 $z=x+iy$ 的几何表示，除了用点(x, y)以外，还用在坐标軸上的投影是 x 和 y 的矢量来表示；它的起点可以安放在

---

① 例如，参看 А. Г. Курош 著高等代数教程(有中譯本)。

任意点(图 1)。因此，可以把“复数”和“矢量”用作同义語。矢量的长度$|z|$叫做复数 z 的模，实軸的正方向和矢量之間的角度$\mathrm{Arg}z$(这里假定 $z\neq0$) 叫做 z 的輻角；同一个 z 的輻角可以相差 2π 的整数倍。但只有一个輻角的値 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$；它叫做輻角的主值，而且用 $\arg z$ 表示。显然

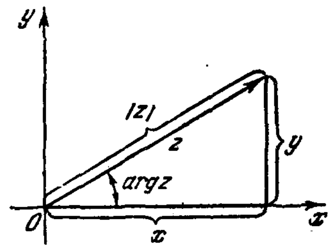

图 1.

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,$$

其中 k 表示任意整数。

我們还要指出下列的关系式:

若 $z=x+iy$，那末 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$；

当 $x>0$ 时 $\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$,

当 $x<0$ 而 $y\geqslant0$ 时 $\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi$,

当 $x<0$ 而 $y<0$ 时 $\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi$.

z 的实部和虚部可以用模和輻角表示为:

$\mathrm{Re}z=|z|\cos\mathrm{Arg}z$，$\mathrm{Im}z=|z|\sin\mathrm{Arg}z$；因此，$z$ 本身可以表示成 $z=|z|(\cos\mathrm{Arg}z+i\sin\mathrm{Arg}z)$的形式，这个式子叫做 z 的三角形式。

二复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 叫做是(相互)共軛的。如果其中之一用 z 表示，那末另一个用 $\bar{z}$ 表示。显然，点 z 和 $\bar{z}$ 关于实軸是对称的。因此$|z|=|\bar{z}|$；此外，如果 z 不是負实数，那末 $\arg z=-\arg\bar{z}$；如果 z 是負实数，那末 $\arg z=\arg\bar{z}=\pi$。

2. 复数的运算 复数的加法和乘法运算由下列的等式定义:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1),$$

而减法和除法定义作相应的逆运算。由这些定义推出下列的重要推論:加法和乘法具有可交换和可結合的性质,乘法对于加法具有可分配的性质;两个因子的乘积,当且只当两因子中至少有一个是零时才等于零;减法总是可能的,除法在除数不等于零的条件下是可能的。这一切表明复数构成域。我們指出一个乘法的特殊情形:若 $c=a+ib$,那末 $c\cdot\bar{c}=a^2+b^2=|c|^2$,由此 $|c|=\sqrt{c\cdot\bar{c}}$。

复数 $c_1=a_1+ib_1$ 和 $c_2=a_2+ib_2$ 的加法在几何表示中按照矢量加法規則来进行(图 2, a)。差 c_1-c_2 可以用起点在点 c_2,終点在点 c_1 的矢量来表示(图 2, $б$)。由此推出,二点 $c_1=a_1+ib_1$, $c_2=a_2+ib_2$ 的距离等于差的模: $\rho(c_2,c_1)=|c_1-c_2|$。我們还要指出关于和及差的模的重要不等式

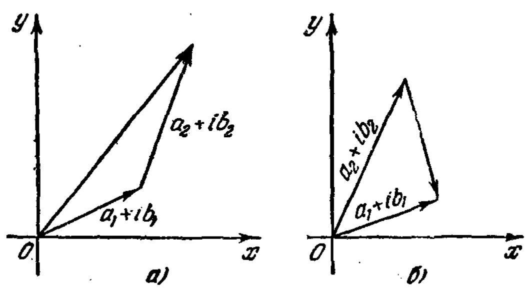

图 2.

$$|c_1+c_2|\leqslant|c_1|+|c_2|,\quad |c_1-c_2|\geqslant||c_1|-|c_2||;$$

等号只在矢量 c_1 和 c_2 共綫而且同方向的时候成立。

第一个不等式可以推广到任意个相加項的情形:

$$|c_1+c_2+\cdots+c_n|\leqslant|c_1|+|c_2|+\cdots+|c_n|;$$

这里的等式也只能在所有 n 个矢量 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 共綫而且同方向的条件下成立。

为了得到乘法的几何解釋,将 c_1 和 c_2 写成三角形式

$$c_1=|c_1|(\cos\operatorname{Arg}c_1+i\sin\operatorname{Arg}c_1),$$

$$c_2=|c_2|(\cos\operatorname{Arg}c_2+i\sin\operatorname{Arg}c_2);$$

由乘法的定义得到:

$$c=c_1c_2=|c_1||c_2|[\cos(\operatorname{Arg}c_1+\operatorname{Arg}c_2)+\\+i\sin(\operatorname{Arg}c_1+\operatorname{Arg}c_2)];$$

由此得到:

$$|c_1\cdot c_2|=|c_1||c_2|,\quad \operatorname{Arg}(c_1\cdot c_2)=\operatorname{Arg}c_1+\operatorname{Arg}c_2$$

(最后的等式应該理解如下: $\operatorname{Arg}c_1$ 和 $\operatorname{Arg}c_2$ 的值的一切可能的和所成的集, 与 $\operatorname{Arg}(c_1\cdot c_2)$值的集一样)。$c_1$ 乘以 c_2 的几何表示, 就是矢量 c_1 伸長 $|c_2|$ 倍而且繞自己的起点旋轉一个角 $\operatorname{Arg}c_2$。对于商 $c_1:c_2=\frac{c_1}{c_2}(c_1\neq0,\ c_2\neq0)$我們得到等式

$$|c_1:c_2|=|c_1|:|c_2|,\ \operatorname{Arg}(c_1:c_2)=\operatorname{Arg}c_1-\operatorname{Arg}c_2.$$

由最后的等式推出, 矢量 c_1 与 c_2 之間的角度, 由 c_2 到 c_1 按反时針方向計算(可以相差 2π 的整数倍), 等于 $\operatorname{Arg}\frac{c_1}{c_2}$:

$$\widehat{c_2,\ c_1}=\operatorname{Arg}\frac{c_1}{c_2}.$$

由乘法規則得到:

$$c^n=|c|^n(\cos n\operatorname{Arg}c+i\sin n\operatorname{Arg}c),$$

其中 n 是自然数; 显然, 这公式当 $n=0(c^0=1)$时也是成立的。注意到 $c^{-n}=\frac{1}{c^n}$, 我們得到:

$$c^{-n}=|c|^{-n}[\cos(-n\operatorname{Arg}c)+i\sin(-n\operatorname{Arg}c)].$$

因此, 对于任意整数 m 下列公式成立:

$$c^m=|c|^m(\cos m\operatorname{Arg}c+i\sin m\operatorname{Arg}c).$$

如果 p 和 q 是整数, $q\geqslant2$ 而且分数 $\frac{p}{q}$ 是不可約的, 那末公式

$$c^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{c^p}=\sqrt[q]{|c|^p}_{+}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg}c\right)+i\sin\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg}c\right)\right]$$

的右边給出 $c^{\frac{p}{q}}$ 的 q 个相异的值，其中 $\sqrt[q]{|c|^p}_{+}$ 表示 $|c|^{\frac{p}{q}}$ 的正值。

为了得到全部相异的值，只要固定 Arg$c$ 的某一个值，設此值为 φ，在等式右边用下列的 q 个值：φ, $\varphi+2\pi$, $\cdots$, $\varphi+(q-1)2\pi$ 代入 Arg$c$。

3. 序列的极限 复数序列 $\{c_n=a_n+ib_n\}$ 在下列情况下叫做收斂于极限 $c=a+ib$(記作：$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ 或 $c_n\to c, n\to\infty$)，如果对于任意的 $\varepsilon>0$ 有正数 $N(\varepsilon)$ 存在，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|c_n-c|<\varepsilon$。因为当 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|a_n-a|\leqslant|c_n-c|<\varepsilon$ 和 $|b_n-b|\leqslant|c_n-c|<\varepsilon$，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$。因此，最后的这两个关系式是 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+ib_n)=a+ib$ 的推論。反之，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，那末当 $n>N_1(\varepsilon)$ 时 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ 和 $|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$；因此，当 $n>N_1(\varepsilon)$ 时 $|a_n+ib_n-(a+ib)|=|c_n-c|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}_{+}<\varepsilon$，这就是說 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$。

因此，关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+ib_n)=a+ib$ 和两个关系式 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 是等价的。这一事实使得实数序列极限的一切理論都可以轉移到复数序列的情形。例如，我們得到下列收斂的必要和充分条件(Cauchy 准則)：对于每个 $\varepsilon>0$ 有 $N(\varepsilon)$ 存在，使当 $n>N(\varepsilon)$ 而 p 是任意自然数的时候 $|c_{n+p}-c_n|<\varepsilon$。此外，若 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n'=c'$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n''=c''$，那末

$$\lim_{n\to\infty}(c_n'\pm c_n'')=c'\pm c'',\quad \lim_{n\to\infty}(c_n'\cdot c_n'')=c'\cdot c'',\quad \lim_{n\to\infty}\frac{c_n'}{c_n''}=\frac{c'}{c''}$$

[最后这个式子在 $c_n''\neq0(n=1,2,\cdots)$ 而且 $c''\neq0$ 的条件下成立]。

我們把以点 c 为中心以任意的 ρ 为半徑的圓的內部叫做点 c

的 ρ-邻域。显然，点 z 当且只当 $|z-c|<\rho$ 的时候属于这一邻域。现在序列 $\{c_n\}$ 的极限的定义可以给予下列的几何說法：若对于任意的 $\varepsilon>0$，序列中从某一个号碼开始的一切点皆属于点 c 的 ε-邻域，則称序列 $\{c_n\}$ 收斂于极限 c。

請讀者证明，由 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=c$ 总可以推出 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=|c|$，此外，如果 $c\neq 0$，那末，有 $\operatorname{Arg}c_n$ 的值的序列存在，它的极限等于 $\operatorname{Arg}c$ 的一个值；可以取幅角的主值的序列为这样的序列，但当 c 是負实数时，而 c_n 中旣有无限多个点在实軸之上又有无限多个在实軸之下的情形除外。我們約定将上述序列 $\{c_n\}$ 的幅角的性質写作：$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Arg}c_n=\operatorname{Arg}c$。反之，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{Arg}c_n=\operatorname{Arg}c$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=|c|$，那末 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$。

4. 无限大和球极投影 为了解析函数論的需要在上述的正常的（有限的）复数以外还要补充一个非正常的（无限的）复数，用符号 ∞ 表示；叫做无限大或无限远点。无限远点的处理以下列定义和法則为基础。以坐标原点为中心，以 ρ 为半徑的圓的外部叫做点 ∞ 的 ρ-邻域。显然，点 z 当且只当 $|z|>\rho$ 时属于这一邻域。

若对于任意的 $\rho>0$ 序列 $\{c_n\}$ 从某个号碼开始的一切点都属于无限远点的邻域 $|z|>\rho$，换句話說，若对于任意的 $\rho>0$ 有 $N(\rho)>0$ 存在使得 $n>N(\rho)$ 时 $|c_n|>\rho$；那末序列 $\{c_n\}$ 叫做收斂于 ∞（記作 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$）。因此，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 的条件与 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|=+\infty$ 的条件等价。还要注意，在 $c_n\neq 0$ 的情形，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 的条件与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c_n}=0$ 的条件等价。

对于非正常的复数沒有引入实部和虛部的概念以及幅角的概念，精确地說，这些概念都认为沒有意义（注意，幅角的概念对于数 0 也沒有意义）。至于复数 ∞ 的模，則使用記号 $+\infty$：$|\infty|=$

$=+\infty$。

按照定义建立了下列运算的意义，其中 a 及 α 表示正常复数 ($\alpha\neq 0$):

$$\infty\pm a=a\pm\infty=\infty,\ \infty\cdot\alpha=\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\infty=\infty,$$

$$\frac{a}{\infty}=0,\ \frac{\infty}{a}=\infty,\ \ \frac{\alpha}{0}=\infty.$$

运算 $\infty\pm\infty, 0\cdot\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 沒有意义。

为了得到数 ∞ 的几何表示，我們采用以球面上的点表示复数的方法。

为此我們以复平面 z 上的点 O 为球心作半徑为 1 的球面(图 3)。为了明显起見，我們使用地理学上的术語。球面和复平面相交的圓周叫做赤道，通过点 O 与平面垂直的直綫叫做球的軸，軸与球面相遇的点 N 和 S 各叫做北极和南极。

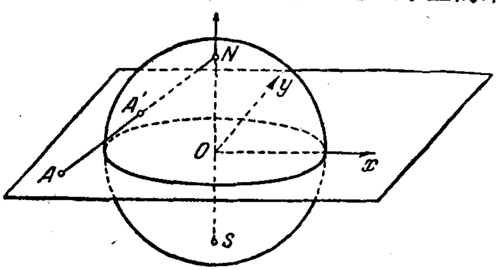

图 3.

此外还要使用下列的概念和术語：北半球及南半球、子午綫(經綫)、緯綫、經度 λ 及緯度 φ。緯度由赤道算起，在 $-\frac{\pi}{2}$(南极)到 $+\frac{\pi}{2}$(北极)的界限內。經度在赤道平面上由 Ox 軸的正的部分算起，在 $-\pi$ 到 π 的界限內 ($-\pi$ 除外而包含 π)；这里，认为由北极的一側观察时赤道上的逆时針方向是正方向。現在我們将 N 与球面上的任意点用以点 N 为起点的射綫連結，而且画出每一射綫与平面相遇的点。这样，球面上除点 N 以外的一切点都投影到了平面上。这一投影(以点 N 为中心的中心投影)叫做球极投影；它最初是在天文学上，后来又在

地理学上用以把天球或地球投影在平面上的。借助于球极投影，球面上的每个点(除N以外)可以看作是平面上对应点的图象，同时也是平面上这一点所表示的复数的图象。我們要說明，球面上表示复数$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(\alpha=\arg z)$的点的緯度和經度与数z的模和輻角有怎样的关系。

由图 4 得到，$\widehat{ONA}=\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}$，因此，$r=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$；此外，显然，$\alpha=\lambda$；由此$\varphi=2\operatorname{arctg} r-\frac{\pi}{2}$，$\lambda=\alpha$。如果有序列$\{z_n\}$，对于它$|z_n|=r_n$且滿足条件$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$，那末，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=+\infty$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\operatorname{arctg} r_n-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$。这样，球面上表示数$z_n$的点无限地逼近于北极$N$。反之也正确：如果$\varphi_n\to\frac{\pi}{2}$（不管經度有怎样的值$\lambda_n$），那末$r_n=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_n}{2}\right)\to+\infty$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$。所以很自然地我們約定把点$N$看作无限远点在球面上的图象。这些約定和下列情况完全符合，平面上无限远点的邻域$|z|>\rho$在球面上的图象是近极区域$\varphi>2\operatorname{arctg}\rho-\frac{\pi}{2}$；当$\rho\to\infty$时这一区域收縮成北极。

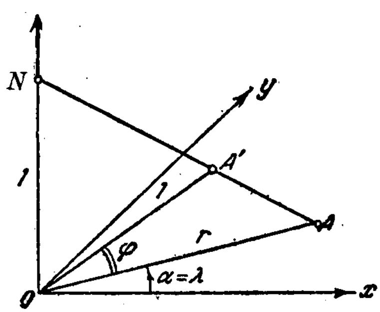

图 4.

复平面加上想象的唯一的无限远点，叫做**扩充了的复平面**或簡称**扩充平面**。扩充平面的直观表示就是全球面。只由正常点(有限点)构成的复平面叫做有限复平面或簡称有限平面。由上面所說可知，有限平面可以用除