

本系列图书一律安排在王迈迈英语教学网授课

<http://www.wmmenglish.com>

E-mail: sale@wmmenglish.com

与同济大学《线性代数》第三版配套

最新

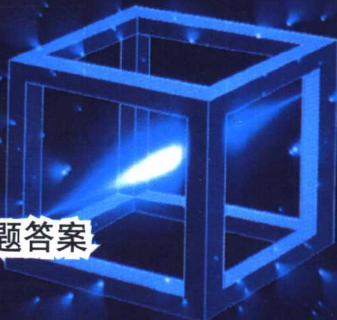
线性代数

教与学 参考

主编 钱志强

本书八大特色

- 考点提示及大纲要求
- 重点知识结构图
- 常考题型与范例精解
- 疑难解答
- 考研经典题剖析
- 典型错误类型及根源分析
- 学习效果三级测试
- 课后习题详解与三级测试题答案



中国致公出版社

本系列图书一律安排在王迈迈英语教学网授课

<http://www.wmmenglish.com>

E-mail: sale@wmmenglish.com

与同济大学《线性代数》第三版配套

最新线性代数

教与学参考

主编 钱志强

编者 胡喜珍 熊金明

本书八大特色

- ★考点提示及大纲要求
- ★重点知识结构图
- ★常考题型与范例精解
- ★疑难解答
- ★考研经典题剖析
- ★典型错误类型及根源分析
- ★学习效果三级测试
- ★课后习题详解与三级测试题答案

中国致公出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新线性代数教与学参考/钱志强主编.—北京:中国致公出版社,2001.12

ISBN 7-80096-859-6

I.最... II.钱... III.线性代数—高等学校—教学参考资料 IV.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 091612 号

最新线性代数教与学参考

中国致公出版社出版

新华书店经销

文字六〇三厂印刷

开本:787×1092 1/32 印张 20 字数 580 千字

2002 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 1 次印刷

印数:1—10000 册

ISBN 7-80096-859-6/G·666

定价:17.00 元

内 容 提 要

全书共六章,是根据现行教材(同济大学《线性代数》第三版)编写的辅导用书,突出了考点和大纲要求,收集了 1990 年至 2001 年全国硕士研究生数学试题线性代数部分的考题,精选了 400 多道例(习)题,并附以详细的解答过程.依照内容之间的内在联系编排,系统地总结了线性代数中各类问题的主要方法,通俗易懂,循序渐进,并附以教材课后习题的全部解答,以供读者自学参考.

本书可作为理工科大学学生学习线性代数的辅导用书,也可作为广大考研的朋友复习线性代数的参考书.

前言

线性代数是理工科学生的一门重要的必修基础课程. 但该课程教学课时少, 概念多, 定理多, 内容抽象而实例少, 这就使教师在教学过程中常有“内容无法完全展开”之苦, 而学生在学习过程中常出现“知其然, 而不知其所以然”的现象. 为此, 我们结合多年来的教学经验和考研辅导反馈的信息, 试图编写一本能帮助学生巩固、加深、提高和拓宽所学知识的参考书, 把学生在学习中感到困难的问题、容易出错的问题集中起来进行分析探讨, 对线性代数中的问题与方法进行全面系统的总结和分类, 指导学生应该如何去分析解决问题, 并用难度适中的题目对学生进行有计划、有步骤的训练. 这对培养学生的思维能力和独立钻研精神是非常有益而必要的.

基于这种想法, 我们精心汇集了历年来全国硕士研究生数学试题线性代数部分考题, 对其进行了较全面的整理和分析, 并反复推敲, 修改和筛选出其具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性的题目, 并附以详细的解答过程, 以便读者参考学习和自测自评, 特别地, 为了使学生在学完每一章节后可以立即转入到本书的学习, 本书内容在编排上完全与现行教材线性代数(同济大学第三版)同步, 可以作为课堂教学的补充和延续.

我们不提倡“题海战术”, 但是我们一贯注重对学生思维能力的培养, 基于这一宗旨, 我们在对例题进行分类讲解时, 特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法, 而不是题目的堆砌或单纯的题解. 为了方便考研的读者, 我们在解题过程中还贯穿了知识结构的前后呼应, 一题多解, 以期能帮助读者举一反三, 起到事半功倍的效果.

本书每一章(第六章除外)都包括以下八个方面的内容:

- 一、考点提示及大纲要求. 大纲要求一目了然, 考点简明扼要.
- 二、重点知识结构图. 该图提纲挈领, 逻辑性强, 体系完整.
- 三、常考题型与范例精解. 题型典型灵活, 解题方法富于技巧, 内容覆盖面宽.
- 四、疑难解答. 抓住要害, 突出重点、难点, 深化概念, 拓宽知识面.

五、考研经典题剖析.开阔视野,“一步到位”,使读者更加明了考研的题型和难度,做到有的放矢.

六、典型错误类型及根源分析.析理透彻,一针见血.

七、学习效果三级测试.循序渐进,层次分明,适合不同要求,便于复习巩固所学知识.

八、习题解答与三级测试题详解.便于读者自我检测.

参考本书时,对每道题请坚持先做再看的学习方法.

我们衷心希望《线性代数教与学参考》能够成为广大读者的得力助手.当然,由于知识水平有限再加之时间仓促,书中不妥之处在所难免,恳请广大读者及同行批评指正.

编者

2002年1月

符号说明

符号	含义
$i_1, i_2, \dots, i_n$ $t = \tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$	由数 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 组成的一个 n 级排列 排列 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 的逆序数
$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	n 阶行列式
$= a_{ij} $	
D^T	行列式 D 的转置行列式
M_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的余子式
A_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$ 矩阵
$= (a_{ij})_{m \times n}$	
A^T	矩阵 A 的转置矩阵
$ A $	方阵的行列式
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	单位矩阵
A^*	矩阵 A 的伴随矩阵
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$r_i \times k (c_i \times k)$	行列式(或矩阵)的第 i 行(列)中所有的元素都乘以同一个数 k
$r_i + kr_j (c_i + kc_j)$	把行列式(或矩阵)的第 j 行(列)的各元素以同一个数 k 然后加到第 i 行(列)对应的元素上去
$\alpha (\text{或 } \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$	n 维列向量

符号	含义
R^n	n 维向量空间
$e_1, e_2, \dots, e_n$	n 维单位向量组
$A \sim B$	矩阵(或向量组) A 与 B 等价
$R(a_1, a_2, \dots, a_n)$	向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的秩
$R(A)$	矩阵 A 的秩
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$	一般的线性方程组
$AX = b$	一般线性方程组的矩阵形式
$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \beta$	一般线性方程组的向量形式
A	线性方程组的系数矩阵
$B = (A, b)$ 或 $B = (A b)$	线性方程组的增广矩阵
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$	齐次线性方程组
$AX = 0$	齐次线性方程组的矩阵形式
A	矩阵 A 对角化后的对角矩阵
$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	对角线上元素分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的对角矩阵
$f = X^tAX$	二次型的矩阵形式

目 录

第一章 行列式	(1)
一、考点提示及大纲要求	(1)
二、重点知识结构图	(2)
三、常考题型及范例精解	(3)
四、疑难解答	(25)
五、考研经典题剖析	(27)
六、典型错误类型及根源分析	(33)
七、学习效果三级测试	(36)
基础测试题	(36)
提高测试题	(39)
考研训练题	(42)
八、课后习题解答与三级测试题详解	(44)
第二章 矩阵及其运算	(74)
一、考点提示及大纲要求	(74)
二、重点知识结构图	(75)
三、常考题型及范例精解	(76)
四、疑难解答	(95)
五、考研经典题剖析	(100)
六、典型错误类型及根源分析	(113)
七、学习效果三级测试	(118)
基础测试题	(118)
提高测试题	(122)
考研训练题	(126)
八、课后习题解答与三级测试题详解	(128)
第三章 矩阵的初等变换及线性方程组	(180)
一、考点提示及大纲要求	(180)
二、重点知识结构图	(181)
三、常考题型及范例精解	(182)
四、疑难解答	(204)
五、考研经典题剖析	(206)
六、典型错误类型及根源分析	(218)
七、学习效果三级测试	(222)
基础测试题	(222)

提高测试题	(226)
考研训练题	(229)
八、课后习题解答与三级测试题详解	(232)
第四章 向量组的线性相关性	(283)
一、考点提示及大纲要求	(283)
二、重点知识结构图	(284)
三、常考题型及范例精解	(285)
四、疑难解答	(309)
五、考研经典题剖析	(315)
六、典型错误类型及根源分析	(341)
七、学习效果三级测试	(345)
基础测试题	(345)
提高测试题	(351)
考研训练题	(356)
八、课后习题解答与三级测试题详解	(360)
第五章 相似矩阵及二次型	(426)
一、考点提示及大纲要求	(426)
二、重点知识结构图	(427)
三、常考题型及范例精解	(428)
四、疑难解答	(455)
五、考研经典题剖析	(461)
六、典型错误类型及根源分析	(489)
七、学习效果三级测试	(492)
基础测试题	(492)
提高测试题	(496)
考研训练题	(501)
八、课后习题解答与三级测试题详解	(504)
* 第六章 线性空间与线性变换	(572)
一、考点提示及大纲要求	(572)
二、疑难问题解答	(572)
三、经典例题精析	(574)
四、学习效果测试题	(589)
五、课后习题解答及测试题详解	(591)
习题六解答	(591)
学习效果测试题详解	(598)
综合测试题(一)	(606)
综合测试题(二)	(608)

第一章 行列式

一、考点提示及大纲要求

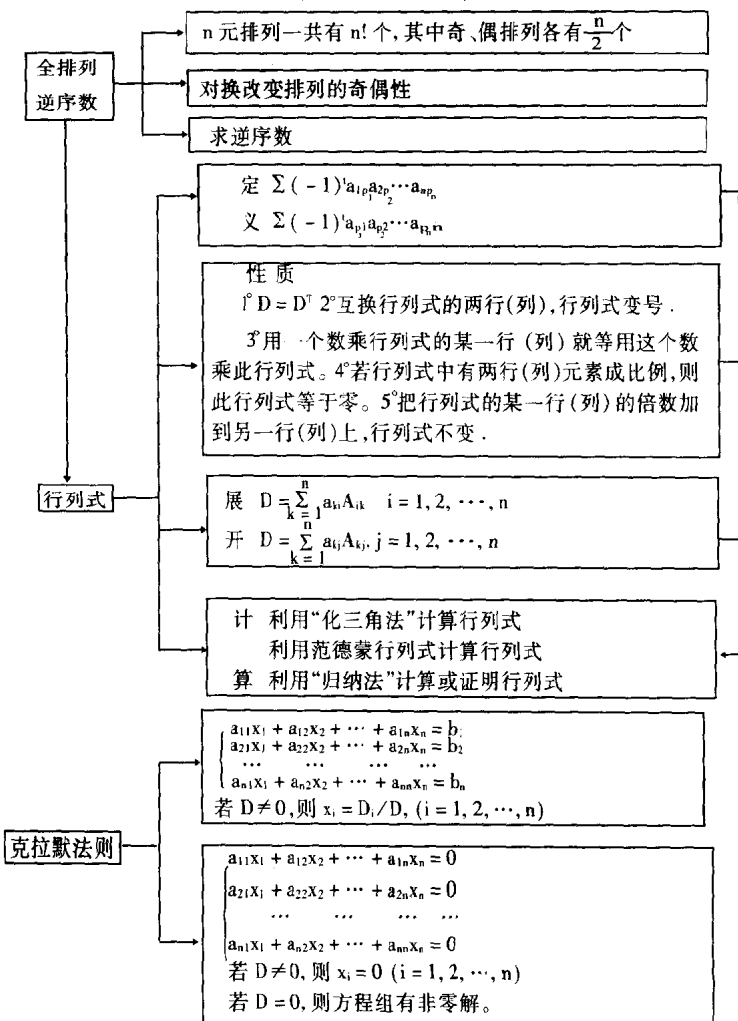
考点提示

1. 排列、排列的奇偶性;
2. 逆序、逆序数;
3. 对换改变排列的奇偶性;
4. 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数;
5. 行列式的定义;
6. 行列式的展开;
7. 行列式的性质;
8. 行列式的化简及计算;
9. 克拉默法则;
10. 行列式的证明.

大纲要求

1. 会求 n 元排列的逆序数;
2. 深入领会行列式的定义;
3. 掌握行列式的性质,并且会正确使用行列式的有关性质化简、计算行列式;
4. 灵活掌握行列式按行(列)展开;
5. 会用克拉默法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解.

二、重点知识结构图



三、常考题型与范例精题

选择题

例1 排列 134782695 的逆序数为()

(A)9; (B)10; (C)11; (D)12.

解 在排列 134782695 中,

1排在首位,逆序数为0;

3,4,7,8各数的前面没有比它们自身大的数,故这四个数的逆序数均为0;

2的前面比2大的数有四个(3,4,7,8),故逆序数为4;

6的前面比6大的数有两个(7,8),故逆序数为2;

9是最大数,逆序数为0;

5的前面比5大的数有四个(7,8,6,9),故逆序数为4;

于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 0 + 4 + 2 + 0 + 4 = 10$$

故正确答案为(B).

例2 下列排列中()是偶排列.

(A)4312; (B)51432; (C)45312; (D)654321.

解 按照例1的方法计算知:

排列 4312 的逆序数为 5,

排列 51432 的逆序数为 7,

排列 45312 的逆序数为 8,

排列 654321 的逆序数为 15,

故正确答案为(C).

例3 行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$,

若 $D_1 = D_2$, 则 λ 的取值为()

(A)0, 1; (B)0, 2; (C)1, -1; (D)2, -1.

解 按三阶行列式的对角线法则, 有

$$D_1 = 10 + 2 + 27 - 6 - 30 - 3 = 0$$

$$D_2 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

若 $D_1 = D_2$, 则 $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$, 解得 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = 1$

故正确答案为(C).

例4 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有唯一解时,对 λ 的要求是()

(A) $\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$; (B) $\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$;

(C) $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$; (D) $\lambda = 1, \lambda \neq 2$.

解 由克拉默法则知,当所给非齐次线性方程组的系数行列式不等于零时,该方程组有唯一解,于是令行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2) \neq 0$$

即 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$

故正确答案为(C).

综合题

例5 用定义计算5阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第2,3行及第2,3列上的元素都不等于零.

解 D_5 中各行非零元素的列标分别可取以下各值

$$p_1 = 2, 3; \quad p_2 = 1, 2, 3, 4, 5; \quad p_3 = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$p_4 = 2, 3; \quad p_5 = 2, 3;$$

在上述可能取的数码中,不能组成任何一个5元排列 $p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$, 换句话说,在 D_5 的每一项5个元素中,必至少含有一个零元素,故按行列式的定义有: $D_5 = 0$.

例6 写出五阶行列式 $|a_{ij}|_{5 \times 5}$ 中包含因子 $a_{13} a_{25}$ 且带负号的所有项.

解 按行列式的定义,五阶行列式中包含因子 $a_{13} a_{25}$ 的项的一般式为

$$(-1)^{\tau(35p_3 p_4 p_5)} a_{13} a_{25} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$$

故含有 $a_{13} a_{25}$ 的所有项的项数为5元排列 $35p_3 p_4 p_5$ 的个数. 因排列 $p_3 p_4 p_5$ 是三个数码1,2,4的全排列,共3!个,故 $35p_3 p_4 p_5$ 能组成6个5元排列,即

$$35124; \quad 35142; \quad 35214; \quad 35241; \quad 35412; \quad 35421.$$

其中 35142, 35214, 35421 为偶排列, 35124, 35241, 35412 为奇排列, 故包含因子 $a_{13} a_{25}$ 且带负号的所有项为

$$a_{13} a_{25} a_{31} a_{42} a_{54}; \quad a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51}; \quad a_{13} a_{25} a_{34} a_{41} a_{52}.$$

例 7 求多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 2 & -4 & 1 \\ -x & x & -1 & 3 \\ 7 & 5 & 2x & 2 \\ x & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数.

解 4 阶行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4}$$

要求 x^4 的系数, 则必须每个 a_{ip_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) 都要含有 x , 这样的项只有

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = (-1)^0 3x \cdot x \cdot 2x \cdot x = 6x^4,$$

于是 $f(x)$ 中 x^4 的系数是 6.

要求 x^3 的系数, 则必须 4 个 a_{ip_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) 中有 3 个含有 x , 这样的项有

$$(-1)^{\tau(2134)} a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} = 4x^3$$

$$(-1)^{\tau(4231)} a_{14} a_{22} a_{33} a_{41} = -2x^3$$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数是 $4 - 2 = 2$.

例 8 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

解法一 因为这个 n 阶行列式中每一列中的 n 个元素之和都为 $n + 1$, 所以将第 2, 3, $\dots$, n 行元素都加到第 1 行上, 得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \\ &= (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{r_i - r_1}{i = 2, 3, \dots, n} (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= n+1.$$

解法二 利用 n 阶行列式的性质化简

$$D_n \frac{r_i - r_1}{i = 2, 3, \dots, n} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n+1.$$

例 9 设 $abcd = 1$, 计算行列式 $D =$

$$\begin{vmatrix} a^2 + \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 + \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 + \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 + \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \\ &= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{例 10 计算行列式 } D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2002 \end{vmatrix}$$

$$\text{解 按最后一行展开, 得到 } D = 2002 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2001 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2002 \times (-1)^{\frac{2001 \times 2000}{2}} \times 2001! = 2002!.$$

例 11 已知 4 阶行列式 D 中第一行上元素分别为 1, 2, 0, -4; 第三行上元素的余子式依次为 6, x , 19, 2; 试求 x 的值.

解 由题设知, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 分别为 1, 2, 0, -4, $M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}$ 分别为 6, x , 19, 2, 从而得 $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ 分别为 6, $-x$, 19, -2. 由行列式按行(列)展开定理, 有

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} + a_{14}A_{34} = 0$$

$$\text{于是 } 1 \times 6 + 2 \times (-x) + 0 \times 19 + (-4) \times (-2) = 0$$

$$\text{所以 } x = 7.$$

$$\text{例 12 设 } D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \text{求 } 4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42},$$

其中 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} ($i = 1, 2, 3, 4$) 的代数余子式.

解法一 因 4, 2, -3, 6 恰好为 D 中第 3 列元素, 而 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式, 故 $4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与第 2 列的对应元素的代数余子式乘积的和, 由行列式按行(列)展开定理知, 此和必等于零, 即

$$4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42} = 0$$

解法二 因 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} ($i = 1, 2, 3, 4$) 的代数余子式, 故将 D 中第 2 列元素依次换为 4, 2, -3, 6, 即得

$$4A_{12} + 2A_{22} - 3A_{32} + 6A_{42} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{例 13 已知 5 阶行列式 } D = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$