YINGYONGDUOYUANFENXI

应用多元分析

樊家琨 编

河南大学出版社

(豫)新登字09号

应用多元分析

樊家琨 编

责任编辑 姜保庆

河南大学出版社出版
(开封市明伦街85号)
河南省新华书店发行
河南大学出版社电脑排版
开封包府印刷厂印刷

开本:850×1168毫米 1/32 印张:8 字数:201千字
1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷
印数:1—1500 定价: 4.60元

ISBN7-81018-939-5/O·60

前　言

多元统计分析(简称为多元分析)是数理统计学中近 20 多年来迅速发展的一个重要分支.它是实用性很强的一门学科,尤其是近十几年来电子计算机的普及,使多元分析在许多学科领域里,例如生化、医药、地质、气象、工程技术、社会经济、企业管理、教育学、人文科学等,得到日益广泛的应用,从自然科学到社会科学的许多方面,都证实了多元分析是处理多维数据的有效方法.因此,这门学科受到了实际工作者和理论工作者的普遍重视.

随着社会经济的发展,急需培养高层次的实用人才,掌握多元分析的理论和方法,是实际工作人员的迫切需要.然而,目前国内还缺少多元分析这门学科适用面较宽的合适的教科书,本书的目的就是为此而编写的.编者在近几年来为本科生和研究生讲授多元分析的实践表明,本书符合理工类有关专业乃至经济类有关专业学生的实际程度及其培养目标,是一本较为合适的教科书.本书的出版得到了河南省教育委员会的审批和资助.

鉴于多元分析的内容极其丰富,所以,本书的取材不仅着眼于近年来新成果的引进,而且侧重于实用方法的阐述,理论的证明兼收并蓄.凡具备一元统计分析知识的读者,均可阅读本书.全书内容结构和文字表述力求深入浅出,通俗易懂,便于读者自学.

本书较系统地论述了多元分析的基本理论和方法,全书结构分为七章:第一章论述了多元正态分布的基本理论,其中包括正态参数的估计与检验,本章是多元分析的基石.第二章至第四章介绍了主成分分析、因子分析与典型相关分析,这三章阐述了相关分析的各种技术的理论和方法,并对这些方法的实际应用提供了一些

典型的范例. 第五章介绍判别分析，主要论述距离判别、Bayes 判别与 Fisher 判别等三类典型的判别方法，并提供了一些富有启发性的应用实例. 第六章介绍聚类分析，侧重阐述目前国内外使用较为广泛的系统聚类法，并通过实际应用例子对各种聚类方法进行分析和比较. 第七章介绍多对多回归分析，特别对逐步回归的实用方法作了较系统的阐述. 各章末均附有适量的习题，这是为读者掌握和巩固各章的理论与方法并培养、提高分析问题与解决实际问题的能力而设计的. 为使读者顺利阅读本书，在书末附录中介绍了有关矩阵代数的预备知识. 在本书编写过程中，参阅了目前国内外一些有关文献，引用了部分文献中的一些实例，恕不一一指明出处，在此一并向有关作者致谢.

本书的出版得到了河南大学数学系领导的关怀和鼓励，河南大学出版社副总编程庆同志给予大力支持，姜保庆和王慧同志为本书的编辑付出了大量的辛勤劳动，在此一并表示衷心的感谢. 由于编者才疏学浅，纰误之处，在所难免，敬请读者不吝指教.

编者

1992 年 12 月

目　录

前　言 …………………………………………………………………………（1）
第一章　多元正态分布及其参数的估计与检验 ……………（1）
§1　多元正态分布 ……………………………………………………（1）
§2　多元正态分布的参数 μ 与 V 的估计 ………………（23）
§3　多元正态分布的参数 μ 与 V 的检验 ………………（30）
习题一 ……………………………………………………………………（43）
第二章　主成分分析 …………………………………………………（45）
§1　引言 ……………………………………………………………………（45）
§2　求主成分的基本思想与方法 ………………………………（46）
§3　主成分的方差贡献率与个数的确定 ……………………（49）
§4　随机变量的标准化 ……………………………………………（52）
§5　主成分分析的应用实例 ………………………………………（53）
习题二 ……………………………………………………………………（67）
第三章　因子分析 ……………………………………………………（69）
§1　引言 ……………………………………………………………………（69）
§2　因子分析的线性模型 …………………………………………（71）
§3　因子载荷矩阵的统计意义 ……………………………………（72）
§4　因子载荷 矩阵的求法 …………………………………………（73）
§5　因子载荷矩阵的近似求法 ……………………………………（83）
习题三 ……………………………………………………………………（86）
第四章　典型相关分析 ………………………………………………（88）
§1　引言 ……………………………………………………………………（88）
§2　总体典型相关分析 ……………………………………………（90）
§3　样本典型相关分析 ……………………………………………（95）
§4　典型相关系数的显著性检验 ………………………………（101）
§5　典型相关分析的应用实例 …………………………………（103）

习题四 …………………………………………………………………… (112)
第五章 判别分析………………………………………………………… (113)
§1 引言 ……………………………………………………………… (113)
§2 距离判别 ………………………………………………………… (114)
§3 Bayes 判别………………………………………………………… (125)
§4 Fisher 判别 ……………………………………………………… (135)
§5 错判概率 ………………………………………………………… (145)
习题五 …………………………………………………………………… (151)
第六章 聚类分析………………………………………………………… (154)
§1 概述 ……………………………………………………………… (154)
§2 分类统计量 ……………………………………………………… (155)
§3 系统聚类法 ……………………………………………………… (159)
习题六 …………………………………………………………………… (176)
第七章 多元(多对多)回归分析………………………………………… (178)
§1 引言 ……………………………………………………………… (178)
§2 多元线性回归模型 ……………………………………………… (179)
§3 回归参数的估计 ………………………………………………… (183)
§4 回归系数的假设检验 …………………………………………… (191)
§5 逐步回归 ………………………………………………………… (192)
习题七 …………………………………………………………………… (208)
附录 矩阵代数知识……………………………………………………… (210)
附表 1 标准正态分布表 ……………………………………………… (230)
附表 2 χ^2 分布的分位数表 ……………………………………… (232)
附表 3 t 分布的分位数表…………………………………………… (234)
附表 4 F 分布的分位数表 ………………………………………… (236)
参考文献………………………………………………………………… (248)

第一章　多元正态分布及其参数的估计与检验

多元统计分析(简称为多元分析)是讨论多维随机变量的统计方法的总称.在多变量的统计分析中,大多是以多元正态总体为出发点,来推导各种统计方法.虽然导出的方法也常用于非正态总体的情况,但较多的分析和依据还是针对正态总体的.所以,我们先介绍有关多元正态总体的一些基本知识,然后介绍多元分析中的一些基本问题和方法.

§1　多元正态分布

一、多元分布的基本知识

1.随机向量与随机矩阵

由 p 个随机变量 $x_1,\cdots,x_p$ 构成的 p 维列向量

$$X=(x_1,\cdots,x_p)'=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

称为 p 维随机向量.它的概率分布称为 p 元分布.

由 pn 个随机变量 $x_{ij}(i=1,\cdots,p;j=1,\cdots,n)$ 构成的 $p\times n$ 阶矩阵

$$X=(x_{ij})_{p\times n}=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix}$$

$$=(X^{(1)},\cdots,X^{(n)})_{p\times n}=\begin{pmatrix} X'_{(1)} \\ \vdots \\ X'_{(p)} \end{pmatrix}_{p\times n} \tag{1.1}$$

称为 $p\times n$ 阶随机矩阵. 其中 $X^{(1)},\cdots,X^{(n)}$表示 $\boldsymbol{X}$ 的列向量;$X_{(1)},\cdots,X_{(p)}$表示 $\boldsymbol{X}$ 的行向量的转置向量. $\boldsymbol{X}$ 的概率分布是指按列拉直的 pn 维随机向量$(x_{11},\cdots,x_{p1},\cdots,x_{1n}\cdots,x_{pn})'$的 pn 元分布.

2. 数字特征

(1) 称

$$EX=\begin{pmatrix} Ex_1 \\ \vdots \\ Ex_p \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

为 p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$的均值向量.

(2) 称

$$EX=\begin{pmatrix} Ex_{11}\cdots Ex_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ Ex_{p1}\cdots Ex_{pn} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

为 $p\times n$ 阶随机矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{p\times n}$的均值矩阵.

(3) 称

$$\begin{aligned} DX &=\mathrm{cov}(X,X)\stackrel{\triangle}{=}E(X-EX)(X-EX)' \\ &=E(XX')-(EX)(EX)' \\ &=\begin{pmatrix} \mathrm{cov}(x_1,x_1) & \cdots & \mathrm{cov}(x_1,x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{cov}(x_p,x_1) & \cdots & \mathrm{cov}(x_p,x_p) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

为 p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$的协方差阵. 其中 $\mathrm{cov}(x_i,x_j)=E(x_i-Ex_i)(x_j-Ex_j)=E(x_ix_j)-Ex_iEx_j,i,j=1,\cdots,p.$

很明显,X 的协方差阵是对称方阵:$\mathrm{cov}(x_i,x_j)=\mathrm{cov}(x_j,x_i)$,$i$、$j=1,\cdots,p$,且主对角线上元素就是 x_i 的方差 $Dx_i=\mathrm{cov}(x_i,x_i)$,

$i=1,\cdots,p$.

(4) 称 p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$ 的协方差阵的行列式的值

$$|DX|=|\operatorname{cov}(X,X)|=\begin{vmatrix}\operatorname{cov}(x_1,x_1) & \cdots & \operatorname{cov}(x_1,x_p)\\ \vdots & & \vdots\\ \operatorname{cov}(x_p,x_1) & \cdots & \operatorname{cov}(x_p,x_p)\end{vmatrix} \tag{1.5}$$

为 p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$ 的广义方差.

(5) 称

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&\triangleq E(X-EX)(Y-EY)'\\ &=E(XY')-(EX)(EY)'\\ &=\begin{pmatrix}\operatorname{cov}(x_1,y_1) & \cdots & \operatorname{cov}(x_1,y_q)\\ \vdots & & \vdots\\ \operatorname{cov}(x_p,y_1) & \cdots & \operatorname{cov}(x_p,y_q)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.6}$$

为 p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$ 与 q 维随机向量 $Y=(y_1,\cdots,y_q)'$ 的协方差阵. 其中 $\operatorname{cov}(x_i,y_j)=E(x_i-Ex_i)(y_j-Ey_j)$ $=E(x_iy_j)-Ex_iEy_j$, $i=1,\cdots,p$; $j=1,\cdots,q$.

易证 $\operatorname{cov}(X,Y)=[\operatorname{cov}(Y,X)]'$.

事实上,
$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=E(X-EX)(Y-EY)'\\ &=\{E(Y-EY)(X-EX)'\}'\\ &=[\operatorname{cov}(Y,X)]'.\end{aligned}$$

(6) p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$ 中任意两个分量 x_i 与 x_j 之间的相关系数定义为

$$r_{ij}=\frac{\operatorname{cov}(x_i,x_j)}{\sqrt{Dx_i}\sqrt{Dx_j}},\quad i,j=1,\cdots,p \tag{1.7}$$

称

$$R=(r_{ij})_{p\times p}=\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & \cdots & r_{pp} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

为 p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$ 的相关矩阵.

很明显,R 是对称方阵,且主对角线上的元素 $r_{ii}=1,i=1,\cdots,p$.

3. 数字特征的一些常用性质

设 a,b,c,d 为常数,U,U_1,U_2 为常数向量,A,B,C 为常数矩阵,X,Y,X_0,Y_0 为随机向量,$\boldsymbol{W},\boldsymbol{Z}$ 为随机矩阵(假定下面涉及的运算总可以进行),则有

(1) $E(aX)=aEX$; (1.9)

(2) $E(AX+U)=AEX+U$; (1.10)

(3) $E(A\boldsymbol{W}B+C)=AE\boldsymbol{W}B+C$; (1.11)

(4) $E(A\boldsymbol{W}+B\boldsymbol{Z})=AE\boldsymbol{W}+BE\boldsymbol{Z}$; (1.12)

(5) $D(aX)=a^2DX$; (1.13)

(6) $D(AX+U)=ADXA'$; (1.14)

(7) $\mathrm{cov}(AX,BY)=A\mathrm{cov}(X,Y)B'$; (1.15)

(8) $\mathrm{cov}(AX+U_1,BY+U_2)=A\mathrm{cov}(X,Y)B'$; (1.16)

(9) $\mathrm{cov}(aX+bY,dX_0+eY_0)$

$$=ad\mathrm{cov}(X,X_0)+ae\mathrm{cov}(X,Y_0)+bd\mathrm{cov}(Y,X_0)+be\mathrm{cov}(Y,Y_0); \tag{1.17}$$

(10) X 的协方差阵 DX 与相关矩阵 R 都是非负定阵,即

$$DX\geqslant 0,R\geqslant 0. \tag{1.18}$$

(这两个不等式右端的 0 都表示零矩阵)

证明:(1)显然.

(2)设 $A=(a_{ij})_{n\times p},X=(x_1,\cdots,x_p)',U=(u_1,\cdots,u_n)'$,则

$$AX+U=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{p}a_{1j}x_j+u_1\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{p}a_{nj}x_j+u_n\end{pmatrix},$$

$$E(AX+U)=\begin{pmatrix}E(\sum_{j=1}^{p}a_{1j}x_j+u_1)\\ \vdots\\ E(\sum_{j=1}^{p}a_{nj}x_j+u_n)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{p}a_{1j}Ex_j+u_1\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{p}a_{nj}Ex_j+u_n\end{pmatrix}=AEX+U.$$

(3)设 $A=(a_{ij})_{n\times p}$, $B=(b_{ij})_{m\times q}$, $C=(c_{ij})_{n\times q}$,

$$W=\begin{pmatrix}w_{11}&\cdots&w_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ w_{p1}&\cdots&w_{pm}\end{pmatrix},$$

则 $$AWB+C=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{1j}w_{jk}b_{k1}+c_{11}&\cdots&\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{1j}w_{jk}b_{kq}+c_{1q}\\ \vdots&&\vdots\\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{nj}w_{jk}b_{k1}+c_{n1}&\cdots&\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{nj}w_{jk}b_{kq}+c_{nq}\end{pmatrix},$$

$$E(AWB+C)=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{1j}Ew_{jk}b_{k1}+c_{11}&\cdots&\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{1j}Ew_{jk}b_{kq}+c_{1q}\\ \vdots&&\vdots\\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{nj}Ew_{jk}b_{k1}+c_{n1}&\cdots&\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}a_{nj}Ew_{jk}b_{kq}+c_{nq}\end{pmatrix}$$

$$=AEWB+C.$$

(4)设 $A=(a_{ij})_{n\times p}$, $B=(b_{ij})_{n\times q}$,

$$W=\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{p1} & \cdots & w_{pm} \end{pmatrix},Z=\begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{q1} & \cdots & z_{qm} \end{pmatrix},$$

则 $$AW+BZ=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p}a_{1j}w_{j1}+\sum_{j=1}^{q}b_{1j}z_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{p}a_{1j}w_{jm}+\sum_{j=1}^{q}b_{1j}z_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{p}a_{nj}w_{j1}+\sum_{j=1}^{q}b_{nj}z_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{p}a_{nj}w_{jm}+\sum_{j=1}^{q}b_{nj}z_{jm} \end{pmatrix},$$

$$E(AW+BZ)=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p}a_{1j}Ew_{j1}+\sum_{j=1}^{q}b_{1j}Ez_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{p}a_{1j}Ew_{jm}+\sum_{j=1}^{q}b_{1j}Ez_{jm} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{p}a_{nj}Ew_{j1}+\sum_{j=1}^{q}b_{nj}Ez_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{p}a_{nj}Ew_{jm}+\sum_{j=1}^{q}b_{nj}Ez_{jm} \end{pmatrix}$$
$$=AEW+BEZ.$$

(5) $$D(aX)=\mathrm{cov}(aX,aX)=E(aX-aEX)(aX-aEX)'$$
$$=a^2E(X-EX)(X-EX)'=a^2\mathrm{cov}(X,X)=a^2DX.$$

(6) $$D(AX+U)=E[AX+U-E(AX+U)][AX+U-E(AX+U)]'$$
$$\overset{(2)}{=}E[AX-AEX][AX-AEX]'$$
$$=E[A(X-EX)(X-EX)'A']$$
$$\overset{(3)}{=}AE(X-EX)(X-EX)'A'$$
$$=ADXA'.$$

(7) $$\mathrm{cov}(AX,BY)\overset{(2)}{=}E[AX-AEX][BY-BEY]'$$
$$=E[A(X-EX)(Y-EY)'B']$$
$$\overset{(3)}{=}AE(X-EX)(Y-EY)'B'$$
$$=A\mathrm{cov}(X,Y)B'.$$

(8) $$\mathrm{cov}(AX+U_1,BY+U_2)$$
$$\overset{(2)}{=}E[AX+U_1-AEX-U_1][BY+U_2-BEY-U_2]'$$
$$=\mathrm{cov}(AX,BY)\overset{(7)}{=}A\mathrm{cov}(X,Y)B'.$$

(9) $\mathrm{cov}(aX+bY,dX_0+eY_0)$

$$\overset{(1)}{=}E(aX+bY-aEX-bEY)(dX_0+eY_0-dEX_0-eEY_0)'$$
$$=E[a(X-EX)+b(Y-EY)][d(X_0-EX_0)+e(Y_0-EY_0)]'$$
$$=adE(X-EX)(X_0-EX_0)'+aeE(X-EX)(Y_0-EY_0)'$$
$$+bdE(Y-EY)(X_0-EX_0)'+beE(Y-EY)(Y_0+EY_0)'$$
$$=ad\mathrm{cov}(X,X_0)+ae\mathrm{cov}(X,Y_0)+bd\mathrm{cov}(Y,X_0)+be\mathrm{cov}(Y,Y_0).$$

(10)设 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$. 对任意非零常数向量 $K=(k_1,\cdots,k_p)'$,则有

$$K'DXK=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}k_ik_jE(x_i-Ex_i)(x_j-Ex_j)$$
$$=E\left[\sum_{i=1}^{p}k_i(x_i-Ex_i)\right]^2\geqslant 0,$$

所以,$DX\geqslant 0$.

又
$$K'RK=K'\left(\frac{\mathrm{cov}(x_i,x_j)}{\sqrt{Dx_i}\sqrt{Dx_j}}\right)_{p\times p}K$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}k_ik_j\frac{E(x_i-Ex_i)(x_j-Ex_j)}{\sqrt{Dx_i}\sqrt{Dx_j}}$$
$$=E\left[\sum_{i=1}^{p}k_i\frac{x_i-Ex_i}{\sqrt{Dx_i}}\right]^2\geqslant 0,$$

所以,$R\geqslant 0$. (证毕)

4. 特征函数

(1) 随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$的特征函数定义为

$$\varphi(t)=E\exp(\mathrm{i}t'X)=E\exp(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}t_jx_j), \tag{1.19}$$

其中 $t=(t_1,\cdots,t_p)'$是实数列向量,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

(2) 随机矩阵 $W=(w_{jk})_{p\times n}$的特征函数定义为按列拉直的 pn 维随机向量$(w_{11},\cdots,w_{p1},\cdots,w_{1n},\cdots,w_{pn})'$的特征函数

$$\varphi(T)=E\exp(\mathrm{i}\ \mathrm{tr}(T'W))=E\exp(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}t_{jk}w_{jk}),\tag{1.20}$$

其中 $T=(t_{jk})_{p\times n}$，$\mathrm{tr}(T'W)$表示矩阵 $T'W$ 的迹.

5.独立性与条件分布

(1)独立性

将 p 维随机向量 X 剖分为两个子向量：

$$X=(x_1,\cdots,x_p)'=\begin{pmatrix}X_{(1)}\\X_{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}q\\p-q\end{matrix},$$

其中 $X_{(1)}=(x_1,\cdots,x_q)'$，$X_{(2)}=(x_{q+1},\cdots,x_p)'$，$(1\leqslant q<p)$. 设 $F(x_1,\cdots,x_p)$，$F_1(x_1,\cdots,x_q)$，$F_2(x_{q+1},\cdots,x_p)$分别是 X，$X_{(1)}$，$X_{(2)}$ 的分布函数(注意：x_i 在随机向量中表示实随机变量，而在分布函数和下面介绍的分布密度中表示普通实变量)，若

$$F(x_1,\cdots,x_p)=F_1(x_1,\cdots,x_q)F_2(x_{q+1},\cdots,x_p),\tag{1.21}$$

则称 q 维随机向量 $X_{(1)}$与 $p-q$ 维随机向量 $X_{(2)}$相互独立.

设 $\varphi(t)$，$\varphi_1(t_{(1)})$，$\varphi_2(t_{(2)})$分别是 X，$X_{(1)}$，$X_{(2)}$的特征函数，其中

$$t=(t_1,\cdots,t_p)'=\begin{pmatrix}t_{(1)}\\t_{(2)}\end{pmatrix}\begin{matrix}q\\p-q\end{matrix},$$

$$t_{(1)}=(t_1,\cdots,t_p)',t_{(2)}=(t_{q+1},\cdots,t_p)'\quad(1\leqslant q<p)$$

则 $X_{(1)}$与 $X_{(2)}$相互独立等价于

$$\varphi(t)=\varphi_1(t_{(1)})\varphi_2(t_{(2)}).\tag{1.22}$$

若 X 具有分布密度 $f(x_1,\cdots,x_p)$，则 $X_{(1)}$与 $X_{(2)}$也分别有分布密度 $f_1(x_1,\cdots,x_q)$与 $f_2(x_{q+1},\cdots,x_p)$，此时，$X_{(1)}$与 $X_{(2)}$相互独立又等价于

$$f(x_1,\cdots,x_p)=f_1(x_1,\cdots,x_q)f_2(x_{q+1},\cdots,x_p).\tag{1.23}$$

(2)条件分布

条件分布常常就离散型随机向量与连续型随机向量分别给出定义. 这里仅就连续型情形讨论条件分布，对于离散型情形有类似的定义.

设 X 具有分布密度 $f(x_1,\cdots,x_p)$，沿用上述记号. $X_{(1)}$关于给定 $X_{(2)}=x_{(2)}$($x_{(2)}$为定值向量)时的条件分布密度定义为

$$f_1(x_1,\cdots,x_q|x_{q+1},\cdots,x_p)=\frac{f(x_1,\cdots,x_p)}{f_2(x_{q+1},\cdots,x_p)}. \qquad (1.24)$$

$$(f_2(x_{q-1},\cdots,x_p)\neq 0).$$

同理,$X_{(2)}$关于给定 $X_{(1)}=x_{(1)}$($x_{(1)}$为定值向量)时的条件分布密度定义为

$$f_2(x_{q+1},\cdots,x_p|x_1,\cdots,x_q)=\frac{f(x_1,\cdots,x_p)}{f_1(x_1,\cdots,x_q)}. \qquad (1.25)$$

$$(f_1(x_1,\cdots,x_q)\neq 0).$$

由上可见,$X_{(1)}$与 $X_{(2)}$相互独立的充要条件是

$$f_1(x_1,\cdots,x_q|x_{q+1},\cdots,x_p)=f_1(x_1,\cdots,x_q).$$

$$(\text{当 } f_2(x_{q-1},\cdots,x_p)\neq 0 \text{ 时}).$$

或 $$f_2(x_{q+1},\cdots,x_p|x_1,\cdots,x_q)=f_2(x_{q-1},\cdots,x_p).$$

$$(\text{当 } f_1(x_1,\cdots,x_q)\neq 0 \text{ 时}).$$

(3)独立随机向量的数字特征的性质

设随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$ 与 $Y=(y_1,\cdots,y_p)'$ 相互独立,则有

(i)$E(X'Y)=(EX)'(EY)$, (1.26)

$E(XY')=(EX)(EY)'$; (1.27)

(ii)$\mathrm{cov}(X,Y)=0$(此时,称 X 与 Y 不相关); (1.28)

(iii)$D(X+Y)=DX+DY$. (1.29)

证明:(i)$E(X'Y)=E(\sum_{i=1}^{p}x_iy_i)=\sum_{i=1}^{p}E(x_iy_i)$

$$\overset{\text{独立}}{=}\sum_{i=1}^{p}Ex_i\cdot Ey_j=(EX)'(EY).$$

$$E(XY')=E(x_iy_j)_{p\times p}=(E(x_iy_j))_{p\times p}$$

$$\overset{(\text{独立})}{=}(Ex_i\cdot Ey_i)_{p\times p}=(EX)(EY)'.$$

(ii) $\text{cov}(X,Y)=E(XY')-(EX)(EY)'$

$$\overset{(1.27)}{=}(EX)(EY)'-(EX)(EY)'=0.$$

(iii) $D(X+Y)=\text{cov}(X+Y,X+Y)$

$$\overset{(1.17)}{=}\text{cov}(X,X)+\text{cov}(X,Y)+\text{cov}(Y,X)+\text{cov}(Y,Y)$$

$$\overset{(1.28)}{=}\text{cov}(X,X)+\text{cov}(Y,Y)=DX+DY.$$ （证毕）

二、多元正态分布

1. 多元正态分布的定义

多元正态分布有多种定义方法，一种是用 p 维随机向量 $X=(x_1,\cdots,x_p)'$ 的联合分布密度来定义，其缺点是要求 X 的协方差阵 $DX\triangleq V$ 可逆，即 V^{-1}存在；另一种是用 X 的特征函数来定义，虽然它不要求 V^{-1}存在，但却需要对特征函数加以说明. 还有一种是用 X 的分量的任一线性组合是一维正态变量来定义，这种定义方式较为简单且具有一般性，但有时用它来证明其性质时，因为要说明其分量的线性组合为正态，推导较繁. 下面，我们用另一种简单方式来给出多元正态分布的定义.

定义 1.1 设 $y_1,\cdots,y_p$ 是相互独立且同分布 $N(0,1)$ 的一维随机变量，则称 $Y=(y_1,\cdots,y_p)'$ 为 p 维标准正态向量.

容易计算，$EY=(0,\cdots,0)'_{1\times p}=\underset{p\times 1}{0}$；

$$V\triangleq DY=E(YY')=\begin{pmatrix} Dy_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Dy_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Dy_p \end{pmatrix}_{p\times p}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{p\times p}=I_p.$$

因此，Y 的分布记作 $Y\sim N_p(0,I_p)$，简记作 $Y\sim N(0,I_p)$.

Y 的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=E\exp(\mathrm{i}t'Y)=E\exp(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{p}t_jy_j)$$

$$=E(\prod_{j=1}^{p}\exp(\mathrm{i}t_jy_j))\overset{独立}{=}\prod_{j=1}^{p}E\exp(\mathrm{i}t_jy_j)$$

$$=\prod_{j=1}^{p}\exp\left(-\frac{1}{2}t_j^2\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}t't\right), \qquad (1.30)$$

其中 $t=(t_1,\cdots,t_p)'$.

Y 的分布密度为

$$f_Y(y)=\prod_{k=1}^{p}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y_k^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}y'y\right), \qquad (1.31)$$

其中 $y=(y_1,\cdots,y_p)'$ 表示普通实变量.

定义 1.2 设 Y 为 p 维标准正态向量,即 $Y\sim N_p(0,I_p)$,A 为 $n\times p$ 阶实数矩阵,μ 为 n 维实向量,令 $X=AY+\mu$,则称 X 服从 n 元正态分布.记作 $X\sim N_n(\mu,V)$,其中 $V=AA'$ 为 n 阶非负定阵.

我们指出,若给定了 V,则 $V=AA'$ 的分解一般是不唯一的,可以利用这一点进一步刻划正态分布的性质.

定理 1.1 设 $X\sim N_n(\mu,V)$,则

$$EX=\mu,\quad DX=V. \qquad (1.32)$$

证明: 由定义 1.2 知,$X=AY+\mu$,$Y\sim N(0,I_p)$,$V=AA'$.于是

$$EX=AEY+\mu=\mu;$$

$$DX=D(AY+\mu)=ADYA'=AI_pA'=AA'=V.$$

(证毕)

下面的定理将说明 n 元正态分布的特征函数可由其均值向量 μ 与协方差阵 V 唯一确定.

定理 1.2 设 $X\sim N_n(\mu,V)$,,则 X 的特征函数为

$$\varphi_X(t)=\exp\left(\mathrm{i}t'\mu-\frac{1}{2}t'Vt\right). \qquad (1.33)$$