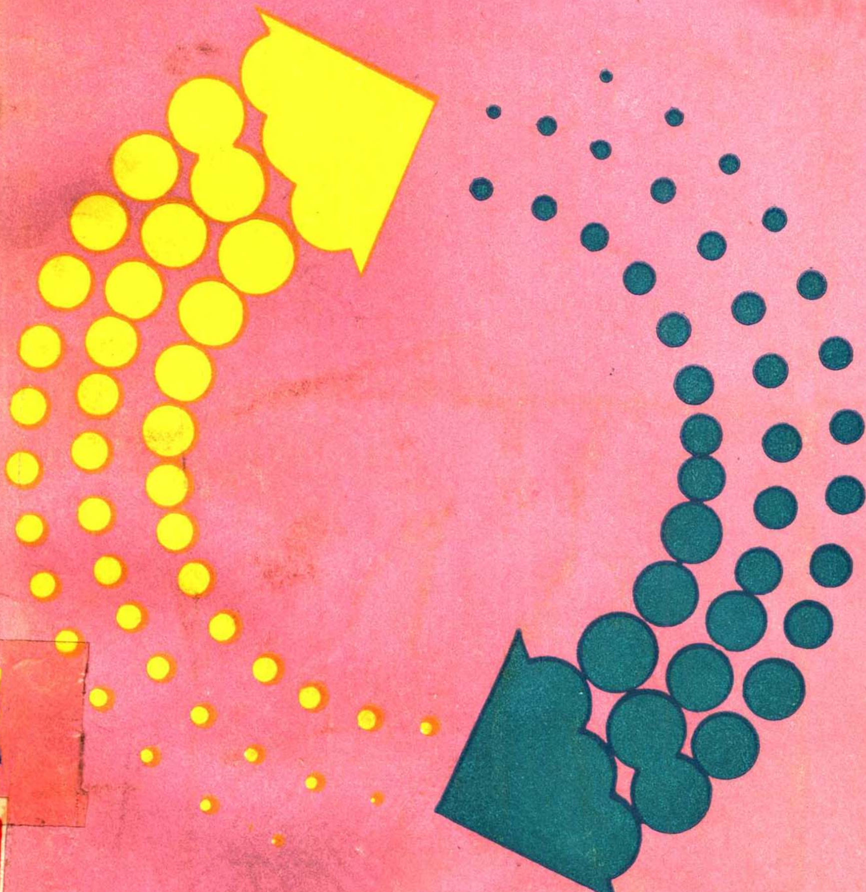
代数学引论

下册

〔苏〕阿·伊·柯斯特利金 著

蓝以中 丘维声 张顺燕 译



高等教育出版社

代数学引论

下册

[苏]阿·伊·柯斯特利金 著
蓝以中 丘维声 张顺燕 译

高等教育出版社

出版前言

原书是为莫斯科大学力学数学系学生编写的代数教材，它反映了近年该校代数课程所采用的教学模式。全书内容分为两部分，第一部分是代数的基础，供一年级上学期使用，第二部分是群、环、模、供二年级上学期使用。

本书注重联系实际，强调代数在自然科学及数学其他分支中的应用。书中配有大量习题，有不少是富有启发性的。

本书可供综合大学或师范院校数学、应用数学专业师生参考。

本书根据斯普林格出版社 1982 年出版的英译本 A. I. Kostrikin 著《*Introduction to Algebra*》译出。中译本分上、下两册出版，分别为原书的第一、第二部分。

代数学引论

下册

〔苏〕阿·伊·柯斯特利金 著

蓝以中 丘维生 张顺燕 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防出版社印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张6.75 字数163 000

1988年1月 第一版 1988年8月第1次印刷

印数00 001—3 200

ISBN 7—04—000110—1/O·47

定价 2.10 元

目　　录

“在当代，认为数学的许多分支只不过是某些特殊群的不变量理论的观点，已经越来越流行了.”

索福斯·李，1893

第二部分 群，环，模

这本书的第二部分内容加深了，但是我希望它不是第一部分的太抽象的续篇. 所引进的新概念相对地说是不多的. 在第四章中我们的一些“老相识”再度出现，它们引导我们进入一个更深的领域. 读者应当密切注意至少占课文四分之一的例子（例如第七章 § 1 和第八章 § 3）. 在选择这些例子时，我力图通过它们在代数和数学的其它分支之间架设起一座桥梁. 如果它们能加深读者对数学的整体性的认识，那么，在第二部分中作者的目的就可以认为是达到了.

补充读物

1. M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
2. T. C. Bartee and G. Birkhoff, *Modern Applied Algebra*, McGraw-Hill, 1970.
3. Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Academic Press, 1966.

4 . N. Bourbaki, *Algebra(Modules, Rings, Forms)*.

5 . J. B. Carrell and J. A. Dieudonné, *Invariant Theory Old and New*, Academic Press, 1971.

6 . P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Harper and Row, 1965.

7 . C. C. Faith, *Algebra: Rings, Modules and Categories*, Springer-Verlag, 1973.

8 . M. Hall, *The Theory of Groups*, Chelsea Pub. Co. , 1976.

9 . I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, A. M. S. (J. Wiley), 1968.

10. N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Pub. , 1962.

11. A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, 1976.

12. A. G. Kurosh, *Lectures on General Algebra*, Pergamon Press, 1965.

13. G. I. Liubarskii, *The Application of Group Theory in Physics*, Pergamon Press, 1960.

14. A. I. Mal'tsev, *Algebraic Systems*, Springer-Verlag, 1973.

15. L. S. Pontryagin, *Topological Groups*, Gordon and Breach, 1966.

16. M. M. Postnikov, *Foundations of Galois Theory*, Pergamon Press, 1962

17. J. -P. Serre, *A Course in Arithmetic*, Springer-Verlag, 1973.

18. J. -P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer-Verlag, 1977.

19. H. Weyl, *The Classical Groups ; Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1939.

20. D. P. Zhelobenko, *Compact Lie Groups and Their Representations*, Translated by A. M. S. , 1973

第七章 群

本章将进一步阐述在第四章中引进的群的概念. 在这一章里，我们的重点与其说是讨论抽象群，不如说是讨论几类自然的群在集合上的“作用”. 它使群具体化了，从而推动群的一般理论的发展，又使群是数学研究的有效工具这一观点得到体现.

仔细考察一些特殊的（然而是重要的）例子，我们将看到群的态射（同态，满同态，同构）所起的关键性作用. 群论中的这些概念使我们有可能把复杂的研究对象转化为简单的研究对象.

§1 低维的典型群

1. **一般定义**. 线性代数和几何学的基础课程提供给我们一些值得特别仔细研讨的群的例子. 仿射空间，欧几里得空间和埃尔米特空间中保持给定点（比方说，原点）不动的变换提供了**典型群**，即 $GL(n)$，$SL(n)$，$O(n)$，$SO(n)$，$U(n)$，$SU(n)$. 现在已经知道，这些群都是李群的例子. 典型群中也包含辛群 $SP(n)$，但我们这里不准备描述全部典型群，读者可以在许多书上找到辛群的阐述. 如果 n 较小，我们就说典型群是低维的. 在第一部分中我们已经接触到群 $GL(n)$ 和 $SL(n)$，在定义其它几个群时，我们将避免使用几何学的概念. 在 n 维空间中选定一组标准正交基之后，正交群和酉群可以利用矩阵的术语定义为

$$O(n)=\{A\in M_n(\mathrm{R})\mid {}^tA\cdot A=A\cdot {}^tA=E\},$$

$$SO(n)=\{A\in O(n)\mid \det A=1\}$$

$$U(n)=\{A\in M_n(\mathrm{C})\mid A^*\cdot A=A\cdot A^*=E\},$$

$$SU(n)=\{A\in U(n)\mid \det A=1\},$$

这里 $A^* = {}^t\bar{A}$，是把 $A=(a_{ij})$ 取转置后再把其中的元素取复共轭所得到的矩阵. 群 $SL(n)$，$SO(n)$，$SU(n)$分别称为**特殊线性群**，**特殊正交群**，**特殊酉群**. 特别地，

$$O(1)=\{\pm 1\}, \qquad SO(1)=\{1\},$$

$$U(1)=\{e^{i\varphi} \mid 0\leqslant\varphi<2\pi\}, \quad SU(1)=\{1\},$$

$$SO(2)=\left\{\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \middle| 0\leqslant\varphi<2\pi\right\}\cong U(1).$$

我们可以用下式给出群 $SO(2)$到 $U(1)$间的一个同构：

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\longmapsto e^{i\varphi}.$$

因为复数 $e^{i\varphi}(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 在几何上表示平面上的单位圆 S^1，所以通常也说群 $SO(2)$ 和圆 S^1 是拓扑等价的. 上面这句话的确切含意在几何学和拓扑学中阐述.

在群 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 之间存在着一个很值得注意的，但不是显然的联系. 我们首先来讨论 $SU(2)$ 的一种几何实现，而这将引导我们去得出 $SO(3)$的一种几何实现.

2. $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的参数化. 根据欧拉的一个著名的定理，$\mathbf{R}^3$ 的每个刚体旋转，即 $SO(3)$ 的每个元素，总可看作绕某个固定轴的旋转. 例如，矩阵

$$B_\varphi=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ C_\theta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{1}$$

分别相当于绕 z 轴旋转 φ 角和绕 x 轴旋转 θ 角. 假如我们使用欧拉角 $\varphi,\theta,\psi\,(0\leqslant\varphi,\psi<2\pi,\ 0\leqslant\theta<\pi)$ 作为旋转的参变量（现在我们不考虑这些角的几何意义），那么任一矩阵 $A\in SO(3)$ 可以写成下面的形式

$$A=B_\varphi C_\theta B_\psi, \tag{2}$$

这里 B_φ，C_θ和B_ψ是在(1)式中定义的矩阵.

现在令

$$g=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\in SU(2).$$

我们有

$$g^*={}^t\bar{g}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & \bar{\gamma}\\ \bar{\beta} & \bar{\delta}\end{bmatrix},\quad g^{-1}=\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}.$$

因为 $g\in U(2)\Leftrightarrow g^*=g^{-1}$，故由上式推出 $\delta=\bar{\alpha}$ 和 $\gamma=-\bar{\beta}$，于是，在 $SU(2)$ 内任一矩阵 g 有如下形式

$$g=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{bmatrix},\quad |\alpha|^2+|\beta|^2=1. \tag{3}$$

反过来，如果 g 是一个形如 (3) 的矩阵，那么，显然 $g\in SU(2)$. 因此，群 $SU(2)$ 的每个元素由满足条件 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ 的一对复数 α,β 唯一确定. 如果我们令 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2,\beta=\beta_1+i\beta_2$，这里 $\alpha_k,\beta_k\in\mathbf{R}$，而 $i=\sqrt{-1}$. 那么条件 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ 可以写成

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta_1^2+\beta_2^2=1.$$

因此，我们有理由说，群 $SU(2)$ 拓扑等价（同胚）于四维空间 $\mathbf{R}^4$ 内的球面 S^3.

我们现在考察酉矩阵

$$b_\varphi=\begin{bmatrix}e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}}\end{bmatrix},\quad c_\theta=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2}\\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}, \tag{4}$$

在线性代数的基础课中已经证明（在这里也容易直接验证），给定一个形如(3)的酉矩阵 g，存在一个酉矩阵 u，使

$$g=ub_\varphi u^{-1}, \tag{5}$$

这里 $\lambda=e^{i\frac{\varphi}{2}}$ 由下面的二次方程确定：

$$\lambda^2-2\alpha_1\lambda+1=0.$$

我们进一步指出，满足 $\alpha\beta\neq0$ 的形如 (3) 的任意矩阵可以写成形式

$$a(\varphi,\theta,\psi)=b_\varphi c_\theta b_\psi=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}\\ i\sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}}\end{bmatrix},\quad(6)$$

这里

$$0\leqslant\varphi<2\pi,\quad 0\leqslant\theta<\pi,\quad -2\pi\leqslant\psi<2\pi.$$

(以后我们将看到,φ,θ,ψ 就是欧拉角,g 和 $-g$ 对应于 $\mathbf{R}^3$ 中同一个旋转,所以 ψ 的变化范围可以限制在半个区间$[0,2\pi)$内.)为说明这一点,只要注意到

$$|\alpha|=\cos\frac{\theta}{2},\ \mathrm{Arg}\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2},\ |\beta|=\sin\frac{\theta}{2},\ \mathrm{Arg}\beta=\frac{\varphi-\psi+\pi}{2},$$

再利用任一复数 z 由两个实参数$|z|$和 $\arg z$($\mathrm{Arg}z$ 是辐角 $\arg z$ 的主值)给定这一事实就可以了.

现在我们已经为解决这一节的基本问题做好准备了.

3. $SU(2)\to SO(3)$**的满同态.** 对每个向量 $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$(它具有范数 $N(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$),我们让它对应于如下 2×2 复矩阵

$$H_x=\begin{bmatrix}x_3 & x_1+ix_2\\ x_1-ix_2 & -x_3\end{bmatrix}.\quad(7)$$

形如 (7) 的矩阵所组成的空间 M_2^+ 是由所有迹为零的埃尔米特矩阵 (即 ${}^t\overline{H}_x=H_x,\mathrm{tr}H_x=0$) 组成的. 向量 $X\in\mathbf{R}^3$ 和矩阵 $H_x\in M_2^+$ 之间的这个对应显然是一一的. 特别地,基向量 $e_1,e_2,e_3\in\mathbf{R}^3$ 对应于基矩阵 $h_k=H_{e_k}$:

$$h_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ h_2=\begin{bmatrix}0&i\\-i&0\end{bmatrix},\ h_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix};\quad(8)$$

$$H_x=x_1h_1+x_2h_2+x_3h_3,\ M_2^+=\langle h_1,h_2,h_3\rangle_{\mathbf{R}}.$$

注意到,因为 $H_{\alpha x}=\alpha H_x,H_{x+x'}=H_x+H_{x'}$,所以 M_2^+ 上在基(8)下具有矩阵 A 的线性算子 $\Phi^+:H_x\mapsto H_y$ 完全确定 $\mathbf{R}^3$ 上在基 e_1,e_2,e_3 下具有同样矩阵 A 的线性算子 $\Phi:x\mapsto y$. 因为下文中我们只使

用上面取定的基，所以今后我们将把算子与相应的矩阵等同看待.

现在令 g 是群 $SU(2)$ 内一个固定的元素. 我们考虑映射

$$\Phi_g^+ : H_x \longmapsto gH_xg^{-1}. \tag{9}$$

因为相似矩阵的迹相同，所以 $\mathrm{tr}\Phi_g^+(H_x) = \mathrm{tr}H_x = 0$. 另外，$g^* = {}^t\bar{g} = g^{-1}$，因此

$$(gH_xg^{-1})^* = (g^{-1})^* H_x^* g^* = gH_xg^{-1}.$$

于是 $\Phi_g^+(H_x) \in M_2^+$：

$$\Phi_g^+(H_x) = \begin{bmatrix} y_3 & y_1 + iy_2 \\ y_1 - iy_2 & -y_3 \end{bmatrix} = H_y,$$

这里 $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$. 从定义式(7)和(9)容易看出

$$\Phi_g^+(H_{\alpha x + \alpha' x'}) = \alpha\Phi_g^+(H_x) + \alpha'\Phi_g^+(H_{x'}).$$

于是，Φ_g^+（相应地，Φ_g）是 M_2^+（相应地，$\mathbf{R}^3$）内的线性映射.

我们来证明 $\Phi_g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 是一个正交算子. 我们有

$$\begin{aligned} N(\Phi_g(x)) &= N(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = -\det H_y \\ &= -\det\Phi_g^+(H_x) = -\det gH_xg^{-1} \\ &= -\det H_x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = N(x), \end{aligned}$$

即 Φ_g 保持范数不变，因而也保持内积不变. 我们还没有弄清 Φ_g 是否改变 $\mathbf{R}^3$ 的定向；这依赖于 $\det\Phi_g$ 的符号. 我们仅知道 $\det\Phi_g = \pm 1$.

从定义可以推出

$$\begin{aligned} \Phi_{g_1}^+(\Phi_{g_2}^+ H_x) &= g_1(g_2H_xg_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1g_2)H_x(g_1g_2)^{-1} \\ &= \Phi_{g_1g_2}^+(H_x). \end{aligned}$$

令 Φ_E^+ 是对应于 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SU(2)$ 的 3 阶正交单位矩阵，于是映射

$$\Phi : g \to \varphi_g (\text{或} \Phi^+ : g \to \Phi_g^+)$$

是从 $SU(2)$ 到 $O(3)$ 的同态，其核 $\mathrm{Ker}\Phi = \mathrm{Ker}\Phi^+$ 由满足 $\Phi_g^+ = \Phi_E^+$ 的酉矩阵 g 组成. 换句话说，

$$\mathrm{Ker}\Phi = \{g \in SU(2) \mid gH = Hg, \forall H \in M_2^+\}$$
$$= \{g \in SU(2) \mid gh_j = h_j g, j = 1, 2, 3\},$$

这里 $\{h_1, h_2, h_3\}$ 是空间 M_2^+ 的基(8). 通过直接验算可知

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}, gh_j = h_j g, 1 \leqslant j \leqslant 3 \Rightarrow g = \pm E$$
$$\Rightarrow \mathrm{Ker}\Phi = \{\pm E\}.$$

我们现在考虑酉矩阵 (4) 在同态 Φ 下的象. 我们在基 (8) 下对 $\Phi_{b_\varphi}^+$ 进行计算:

$$b_\varphi h_1 b_\varphi^{-1} = (\cos\varphi)h_1 + (\sin\varphi)h_2,$$
$$b_\varphi h_2 b_\varphi^{-1} = (-\sin\varphi)h_1 + (\cos\varphi)h_2,$$
$$b_\varphi h_3 b_\varphi^{-1} = h_3.$$

于是(在这里, 我们应想到从 Φ^+ 到 Φ 和从矩阵到算子是可以自由地转换的), $\Phi_{b_\varphi} = B_\varphi$ (参看 (1) 式) 是 $\mathbf{R}^3$ 中绕 x_3 轴转过 φ 角的旋转. 假如适当选择 φ 和 u 使(5)式成立, 那么, 由于 Φ 是同态, 我们有

$$\Phi_g = \Phi_u \Phi_{b_\varphi} \Phi_u^{-1} \text{和} \det\Phi_g = \det\Phi_u \cdot 1 \cdot (\det\Phi_u)^{-1} = 1.$$

这证明 Φ 实际上是从 $SU(2)$ 到 $SO(3)$ 的同态.

我们可以类似地验证 $\Phi_{c_\theta} = C_\theta$ 是绕 x_1 轴转 θ 角的旋转. 现在对任意矩阵 $A \in SO(3)$, 有

$$A = B_\varphi C_\theta B_\psi = \Phi_{b_\varphi} \Phi_{c_\theta} \Phi_{b_\psi} = \Phi_{b_\varphi c_\theta b_\psi}$$
$$= \Phi_{a(\varphi, \theta, \psi)}.$$

因此, 象 $\mathrm{Im}\Phi$ 充满 $SO(3)$. 这样, 我们证明了

定理 1 群 $SO(3)$ 是 $SU(2)$ 在同态 $\Phi: g \to \Phi_g$ 下的同态象, 其核为 $\mathrm{Ker}\Phi = \{\pm E\}$. 在 $SO(3)$ 内每个旋转在 $SU(2)$ 内恰好对应于两个酉算子 g 和 $-g$. □

4. $SO(3)$ 的几何刻画. 从定理 1 直接推出下面的

系 群 $SO(3)$ 拓扑等价(同胚)于三维实射影空间 $\mathbf{R}(P^3)$.

证明 在第 2 段里, 我们指出 $SU(2)$ 内的元素与 $\mathbf{R}^4$ 内的球面

S^3 的点一一对应. 两个线性算子 g, $-g \in SU(2)$ 分别对应于 S^3 内位于一条直径两端的点,而这两点在同态 Φ 下粘合(等同)在一起. 从而,我们得到射影空间 $\mathbf{R}(P^3)$ 的一个模型. □

在一般的线性代数和几何课中,射影空间 $\mathbf{R}(P^n)$ 定义为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内通过原点的直线的集合. 每条这样的直线与单位球面 S^n(中心在原点)恰好交于两个对径点. 给定这两个点中的一个就能唯一地确定一条通过原点的直线. 如果我们把 S^n 中位于一条直径两端的两个点看作等价的,那么,这意味着 $\mathbf{R}(P^n)$ 可以定义为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的单位球面 S^n 关于这种等价关系的商空间.

目前我们不涉及在 $\mathbf{R}(P^n)$ 中给出拓扑的问题.

我们已经得到值得注意的结果了. 球面 S^3 和空间 $\mathbf{R}(P^3)$ 有群的结构——在第一种情形是 $SU(2)$,在第二种情形是 $SO(3)$. 这就使我们弄清楚了:任何在 S^2 或 $\mathbf{R}(P^2)$ 内定义连续群结构的企图都是注定要失败的(这个事实已经离开我们的论题,因此在这里不证明它).

根据定理 1 和它的系,群 $SO(3)$ 比群 $SU(2)$"小一半". 因为我们有一个满同态: $SU(2) \to SO(3)$, 自然会问是否存在单同态 $SO(3) \to SU(2)$. 在第八章中我们将看到,这个问题的答案是否定的.

习 题

1. 将定理 1 证明中简略去的地方补上,即从等式(2)开始,从头到尾实际地验证(在线性代数和几何学教科书中没有提到的)所有较次要的论断.

2. 使用 $SU(2)$ 的几何刻画证明

$(0,1,0,0)*(0,0,1,0)=(0,0,0,1)\neq(0,0,1,0)*(0,1,0,0)$. (上面是作 S^3 上的点的乘积). 而当把这些同样的点 $(0,1,0,0)$ 和 $(0,0,1,0)$ 放在 $\mathbf{R}(P^3)$ 上考察时,它们是交换的.

3. 证明:将酉矩阵

$$K_1(t)=\begin{bmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{bmatrix},\ K_2(t)=\begin{bmatrix}\cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{bmatrix},$$

$$K_3(t)=\begin{bmatrix}e^{i\frac{t}{2}} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{t}{2}}\end{bmatrix}$$

的元素对 t 求微商，然后令 $t=0$，得到矩阵

$$K_1=\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\frac{i}{2}h_1,\ K_2=\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}=\frac{i}{2}h_2,$$

$$K_3=\frac{i}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\frac{i}{2}h_3,$$

它们构成迹为零的**斜埃尔米特矩阵**

$$K=\begin{bmatrix}ik_3 & -k_2+ik_1\\ k_2+ik_1 & -ik_3\end{bmatrix},\ k_j\in\mathbf{R}$$

（即 $K^*=-K,\mathrm{tr}K=0$）所组成的空间 M_2^- 的一组基.

§2 群在集合上的作用

1. 同态 $G\to S(\Omega)$. 在第四章里，我们是以变换群，即集合 Ω 到自身的一一映射的全体组成的群 $S(\Omega)$ 的子群作为例子开始阐述群的理论的. 这种处理方法既和历史上群论发展过程相一致，又体现了变换群在其它数学领域内的重要性. 在以后的年代（本世纪的上半叶）出现的抽象群理论已经远远超出变换群的范围，但是这个理论中的许多概念仍带有它早期的烙印. 事实上，这些概念共同的最终源泉是群 G 在 $S(\Omega)$ 内的**实现**（**表示**）这一思想，这里 Ω 是某个适当选择的集合. 所谓 G 在 $S(\Omega)$ 内的实现，我们指的是任意同态 $\Phi: G\to S(\Omega)$. 如果以 Φ_g 表示 $S(\Omega)$ 内与 $g\in G$ 相对应的变换，那么 $\Phi_e=e_\Omega$ 是 $\Omega\to\Omega$ 的恒等映射，而且对 $g,h\in G$，我们有 $\Phi_{gh}=\Phi_g\circ\Phi_h$. 一个点（元素）$x\in\Omega$ 在变换 Φ_g 下的象 $\Phi_g(x)$ 一般简单记为 gx；我们把它看作是从笛卡儿乘积 (G,Ω) 到 Ω 的一个映射：$(g,x)\mapsto gx$. 为了不致把这种运算同 G 内的乘法混淆，我们或许