

内 容 提 要

本书是为进一步提高教学质量而编写的新体系教材。在课程体系、内容等方面作了适当的改进,以利于学生对基本内容的深入理解,并为本学科知识的进一步扩展打下必要的基础。

本书共分上、下两册出版。

上册内容包括:导论、应力应变分析基础(一)、内力分析、拉伸与压缩、扭转、截面图形的几何性质、弯曲和工程剪切等。

下册内容包括:应力应变分析基础(二)、极限应力状态理论、杆件在复杂变形时的强度计算、能量法、静不定结构、弹-塑性变形与极限载荷法的概念、关于局部应力的某些概念、动荷问题、压杆的稳定性、薄壁容器、厚壁圆筒与旋转圆盘等。

本书可作为大专院校及电大的教材或参考书,亦可供工程技术人员与自学者使用。

材 料 力 学

(下册)

杜星文 编

顾震隆 主审

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 17 字数 391,000

1985年8月第1版 1985年8月第1次印刷

印数 1—7,000

书号 13341·10 定价 2.85元

下 册 目 录

第6章 应力应变分析基础 (二)

6—1 前言	(1)
6—2 空间应力状态的斜面应力公式	(1)
6—3 主平面 主应力	(3)
6—4 剪应力极值及其作用面	(5)
6—5 例题与指导	(7)
6—6 空间应力状态应力圆	(12)
6—7 体应变与应变能	(13)
问题	(16)
习题	(17)

第7章 极限应力状态理论

7—1 概述	(20)
7—2 最大剪应力理论——屈雷斯加 (Tresca) 屈服条件	(21)
7—3 形状应变能理论——米赛斯 (Mises) 屈服条件	(23)
7—4 屈雷斯加屈服条件和米赛斯屈服条件的试验验证	(23)
7—5 最大正应力理论	(25)
7—6 强度条件	(26)
7—7 莫尔 (Mohr) 理论	(29)
7—8 结语	(33)
问题	(39)
习题	(40)

第8章 杆件在复杂变形时的强度计算

8—1 前言	(43)
8—2 斜弯曲	(46)
8—3 拉弯组合变形	(52)
8—4 弯扭组合变形	(57)
8—5 密圈螺旋弹簧的应力	(63)
8—6 结语	(65)
问题	(66)
习题	(66)

第9章 能量法

9—1 前言	(73)
9—2 外力功 变形能	(73)

9—3	卡斯提里阿诺 (A. Castigliano) 定理	(78)
9—4	虚功原理	(80)
9—5	莫尔 (Mohr) 积分	(81)
9—6	维列沙金 (A. Н. Верещагин) 法	(90)
9—7	例题与指导	(95)
9—8	功的互等定理和位移互等定理	(99)
	问题	(100)
	习题	(101)

第10章 静不定结构

10—1	前言	(106)
10—2	拉压静不定问题	(108)
10—3	例题与指导 (一)	(113)
10—4	简单弯曲静不定问题	(118)
10—5	静不定次数	(125)
10—6	力法的正则方程	(127)
10—7	例题与指导 (二)	(131)
	问题	(135)
	习题	(136)

第11章 弹-塑性变形与极限载荷法的概念

11—1	前言	(141)
11—2	应力-应变曲线的简化曲线	(143)
11—3	拉压静不定结构的承载能力	(143)
11—4	等直杆的弹-塑性弯曲	(147)
11—5	复杂应力状态时的弹-塑性变形	(153)
11—6	结语	(161)
	问题	(161)
	习题	(162)

第12章 关于局部应力的某些概念

12—1	前言	(165)
12—2	孔、槽附近的应力集中	(165)
12—3	变截面杆	(168)
12—4	应力集中现象对强度的影响	(169)
12—5	集中力作用点附近的应力分布	(172)
	问题	(174)
	习题	(174)

第13章 动荷问题

13—1	前言	(177)
13—2	加速运动构件的应力	(178)

13—3 冲击载荷	(180)
13—4 疲劳强度	(189)
问题	(202)
习题	(202)
第14章 压杆的稳定性	
14—1 关于稳定性的概念	(208)
14—2 欧拉 (Euler) 公式	(209)
14—3 压杆的临界应力总图	(216)
14—4 压杆的稳定性计算	(219)
14—5 关于压杆稳定性概念的进一步讨论	(223)
14—6 压杆的稳定性合理设计	(225)
14—7 其它形式的弹性稳定问题的概念	(227)
14—8 例题与指导	(230)
问题	(232)
习题	(232)
第15章 薄壁容器	
15—1 前言	(237)
15—2 薄壁容器的薄膜应力	(238)
15—3 薄壁容器中局部弯曲应力的概念	(240)
问题	(241)
习题	(241)
第16章 厚壁圆筒与旋转圆盘	
16—1 前言	(243)
16—2 厚壁圆筒的计算	(243)
16—3 厚壁圆筒的强度	(249)
16—4 厚壁圆筒的极限压强	(252)
16—5 旋转圆盘	(254)
16—6 小结	(256)
问题	(256)
习题	(257)
下册习题答案	(258)

第6章

应力应变分析基础 (二)

6—1 前 言

在前面各章中,我们是以单元体及其各面上的应力来表征一点及其应力状态的(如图6—1所示)。单元体共有六个面,它表征过该点三个相互正交的方位面。每一个面上通常有三个应力分量。这样,一个单元体上共有9个应力分量,即

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

根据剪应力互等定理,有 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, 因此单元体上共有六个独立的应力分量。单向应力状态、纯剪应力状态和平面应力状态都是应力状态的特殊情况。

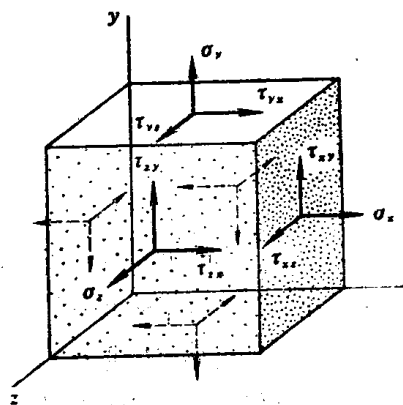


图 6—1

第1章研究了上述几种特殊情况的应力状态分析,即研究过一点不同方位面上应力的变化规律及其特征值。具体地说,在已知单元体各面上应力分量的情况下,研究了任意斜面上的应力分量,研究了主应力、主平面、剪应力极值及作用面等问题。本章将研究同样的问题,所不同的是针对应力状态的一般情况,即图6—1所表征的空间应力状态,而不再是特殊应力状态。

6—2 空间应力状态的斜面应力公式

由第1章知道,假如已知单元体各面上的应力分量,则过同一点任意面上的应力分量(即斜面应力)便可确定。而且斜面上的应力分量是随斜面方位的变化而改变。第1章得到的平面应力状态的斜面应力公式曾有如下形式**

$$\sigma_N = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1)$$

其中 α 角为斜面外法线 N 与 x 轴之间的夹角,如图6—2所示。若以斜面外法线 N 在坐标系 xoy 内的方向余弦 $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta = \sin \alpha$ 表示,斜面应力公式(1)又可写为

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm \quad (2)$$

**注: 参见上册第31页图1—28中斜面应力公式。

若将平面应力状态的斜面应力公式(2)推广到空间应力状态,可以设想,会有如下形式的斜面应力公式:

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl \quad (3)$$

其中 l 、 m 、 n 为空间斜面的外法线 N 在坐标系 xyz 中的方向余弦。公式(3)是否正确? 下面予以证明。

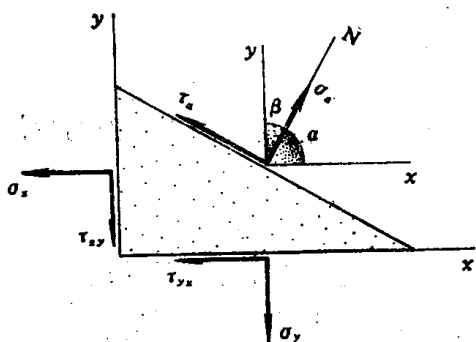


图 6—2

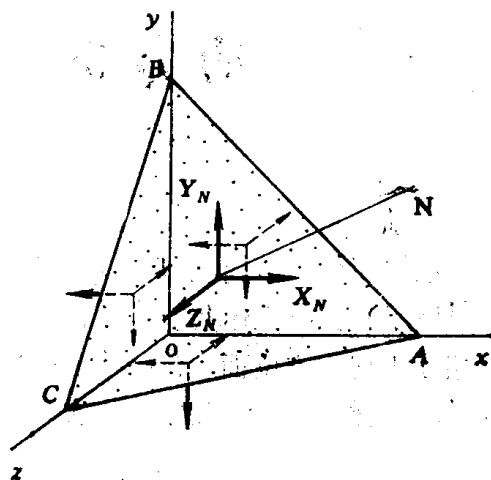


图 6—3

设一单元体如图 6—1 所示,其各面上应力分量已知。现以一斜面 ABC 从单元体上切下一个四面体如图 6—3 所示。并设

(1) 斜面的外法线为 N , 其方向余弦为:

$$l = \cos\alpha = \cos(N, x), m = \cos\beta = \cos(N, y), n = \cos\gamma = \cos(N, z)$$

(2) 斜面的面积为 A_N ,四面体其余三个面的面积根据几何关系则分别为: $A_x = A_N l, A_y = A_N m, A_z = A_N n$ 。

(3) 斜面上全应力 p_N 沿三个坐标方向的分量分别表示为: X_N, Y_N, Z_N (如图 6—3 和图 6—4 所示)。

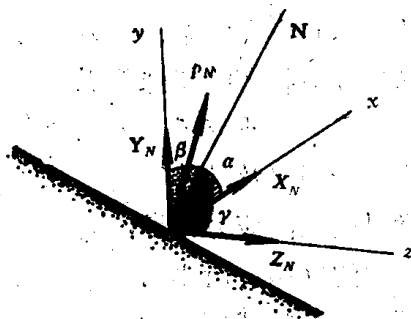


图 6—4

根据四面体的平衡条件

$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad X_N A_N - \sigma_x A_x - \tau_{yx} A_y - \tau_{zx} A_z = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad Y_N A_N - \tau_{xy} A_x - \sigma_y A_y - \tau_{zy} A_z = 0 \\ \sum Z = 0 & \quad Z_N A_N - \tau_{xz} A_x - \tau_{yz} A_y - \sigma_z A_z = 0 \end{aligned}$$

得到

$$\left. \begin{aligned} X_N &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_N &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_N &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

斜面上的全应力 p_N , 为三个应力分量 X_N, Y_N, Z_N 的合应力, 因此

$$p_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 \quad (6-2)$$

斜面上的正应力 σ_N ，为全应力 p_N 在斜面外法线 N 方向上的分量，等于全应力 p_N 在 N 方向上的投影。根据合力投影定理， σ_N 又等于 p_N 的各分量 (X_N, Y_N, Z_N) 在 N 上投影的代数和 (图6—5)，因此

$$\sigma_N = X_N l + Y_N m + Z_N n \quad (4)$$

将 (6—1) 式代入 (4) 式，最后得到

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \quad (6-3)$$

(6—3) 式称为空间应力状态的斜面应力公式。这正是前述的 (3) 式。

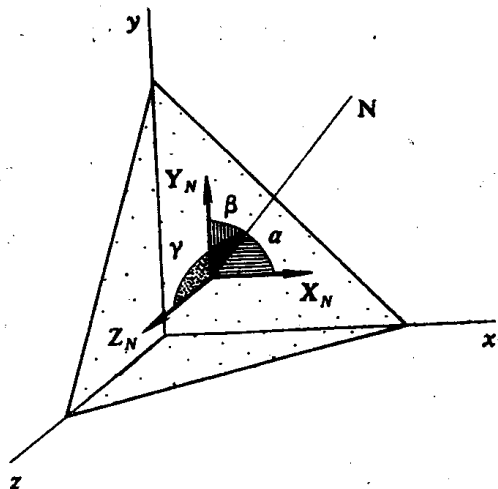


图 6—5

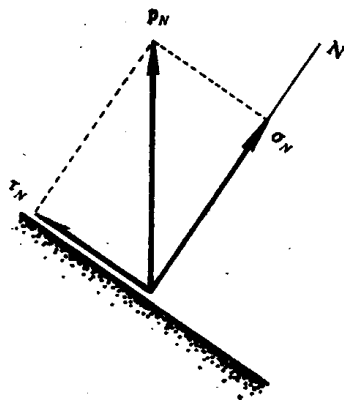


图 6—6

斜面上的剪应力 τ_N ，可由全应力 p_N 和正应力 σ_N 求得 (参见图6—6)

$$\tau_N^2 = p_N^2 - \sigma_N^2 \quad (6-4)$$

斜面应力公式 (6—3) 和 (6—4) 描述了一点应力 (σ_N, τ_N) 随所在截面的方位 (由其外法线 N 的方向余弦 l, m, n 定义) 变化的规律。由斜面应力公式还可看出：对一点来说，只要六个应力分量已知，则该点应力状态完全确定。

6—3 主平面 主应力

前已定义：剪应力为零的面称为主平面，以 N_0 表示主平面的外法线。由于没有剪应力分量，在主平面上的全应力 p_{N_0} 就是它的正应力。主平面上的正应力称为主应力，以 σ_0 表示。

设图 6—7 中所示之斜面为一主平面。由于 $p_{N_0} = \sigma_0$ ，主平面上沿三个坐标方向的三个应力分量为

$$X_{N_0} = p_{N_0} l = \sigma_0 l$$

$$Y_{N_0} = p_{N_0} m = \sigma_0 m$$

$$Z_{N_0} = p_{N_0} n = \sigma_0 n$$

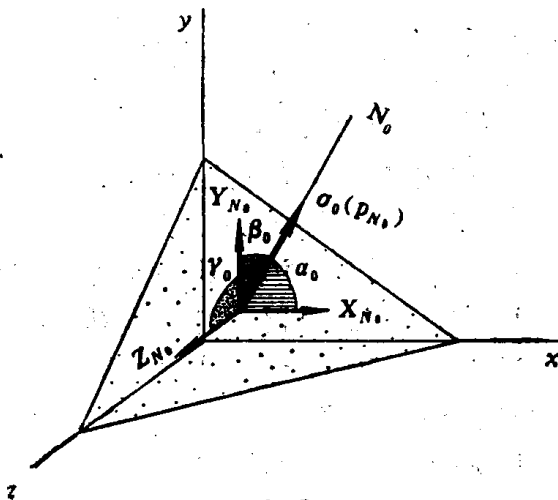


图 6—7

式中 l 、 m 、 n 为主平面外法线 N_0 的方向余弦。利用斜面应力公式 (6—1)，有

$$\begin{aligned} X_{N_0} &= \sigma_0 l = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_{N_0} &= \sigma_0 m = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_{N_0} &= \sigma_0 n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned}$$

经整理后得到

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_0)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_0)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_0)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

(6—5) 式是以主平面外法线 N_0 的方向余弦 l 、 m 、 n 为未知数的齐次线性方程组。它存在非零解的条件是其系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (6-6)$$

展开经整理后为

$$\sigma_0^3 - I_1 \sigma_0^2 + I_2 \sigma_0 - I_3 = 0 \quad (6-7)$$

式中系数为

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (6-8a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \end{aligned} \quad (6-8b)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (6-8c)$$

方程 (6—7) 为关于主应力 σ_0 的三次方程，可解得三个根，即三个主应力值，记为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 。通常将代数值最大者记为 σ_1 ，最小者记为 σ_3 ，亦即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

对一受力点来说，主应力是确定的量，因此方程 (6—7) 的根应为与坐标选取无关的量。由此可断定，方程 (6—7) 中的三个系数 I_1 、 I_2 、 I_3 必为与坐标选取无关的量。当坐标系的方位变化时，尽管各应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 将发生变化，但按 (6—8) 各式所形成的 I_1 、 I_2 、 I_3 的值并不发生变化。因此， I_1 、 I_2 、 I_3 称为该应力状态的不变量，并分别称为第一、第二、第三应力不变量。

在一般情况下，方程 (6—7) 解得三个实根，即三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 。当 $I_1 \neq 0$ ， $I_2 \neq 0$ ，而 $I_3 = 0$ 时，则方程 (6—7) 有一个根必为零，此应力状态即为平面应力状态。当 $I_1 \neq 0$ ，而 $I_2 = I_3 = 0$ 时，则方程 (6—7) 有两个根为零，此应力状态即为单向应力状态。

将求得的三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 中的一个，例如 σ_1 的值代入方程组 (6—5) 中，并考虑到

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (6-9)$$

可求得一组 l_1, m_1, n_1 。它们便是主应力 σ_1 所在的主平面的外法线 N_1 的方向余弦。因此，对应三个主应力可分别由方程 (6-5) 和 (6-9) 确定三个主平面： $N_1 (l_1, m_1, n_1)$ ， $N_2 (l_2, m_2, n_2)$ ， $N_3 (l_3, m_3, n_3)$ 。可以证明，三个主平面之间是相互正交的，即 $N_1 \perp N_2 \perp N_3$ 。这三个相互正交的主应力方向，称为应力主轴。

6-4 剪应力极值及其作用面

若以三个相互正交的应力主轴方向作为坐标轴方向，此坐标系称为主轴坐标系，特殊记为 $x^\circ y^\circ z^\circ$ 。当按主轴坐标系取单元体时，则单元体各面为主平面，各面上没有剪应力分量，分别只有三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ，如图 6-8 所示。因此在主轴坐标系中，一点应力状态可表示为

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

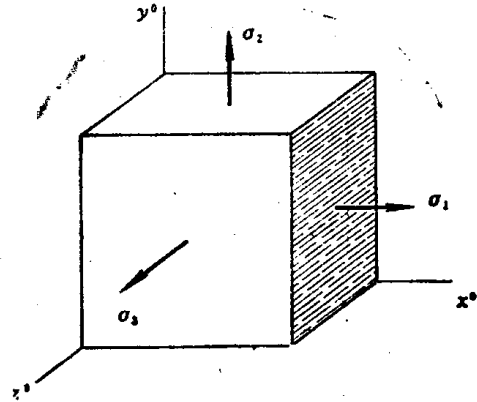


图 6-8

在主轴坐标系中，任一斜面 N 上，沿坐标方向的应力分量，由公式 (6-1) 得

$$\begin{aligned} X_N^0 &= \sigma_1 l \\ Y_N^0 &= \sigma_2 m \\ Z_N^0 &= \sigma_3 n \end{aligned} \quad (1)$$

斜面 N 上的全应力由公式 (6-2) 得

$$p_N^2 = X_N^{0^2} + Y_N^{0^2} + Z_N^{0^2} = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (2)$$

斜面 N 上的正应力，由公式 (6-3) 得

$$\sigma_N = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (3)$$

该面上的剪应力，由公式 (6-4) 得到

$$\begin{aligned} \tau_N^2 &= p_N^2 - \sigma_N^2 \\ &= (\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2) - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

将方向余弦关系式 (6-9)，即 $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ 代入上式，并整理得到

$$\begin{aligned} \tau_N^2 &= [(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2] \\ &\quad - [(\sigma_1 - \sigma_2) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2 \end{aligned} \quad (5)$$

为了求剪应力极值，令

$$\frac{\partial \tau_N}{\partial l} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial \tau_N}{\partial m} = 0 \quad (6)$$

得到

$$(\sigma_1 - \sigma_3) l [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3)m[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0$$

和

$$n^2 = 1 - l^2 + m^2$$

联立求解，得到两组 l, m, n 的解

第 I 组

- (1) $\{l = 0, m = 0, n = \pm 1\}$ z° 面
- (2) $\{l = \pm 1, m = 0, n = 0\}$ x° 面
- (3) $\{l = 0, m = \pm 1, n = 0\}$ y° 面

此组解，显然是三个主平面，在每个面上剪应力为零。

第 II 组

- (1) $\left\{l = 0, m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ $\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$
 - (2) $\left\{l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, m = 0, n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ $\tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$
 - (3) $\left\{l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n = 0\right\}$ $\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$
- (6—10)

此解得到三个剪应力极值作用面，分别示于图6—9中。其中每一个面分别平行一个主应力

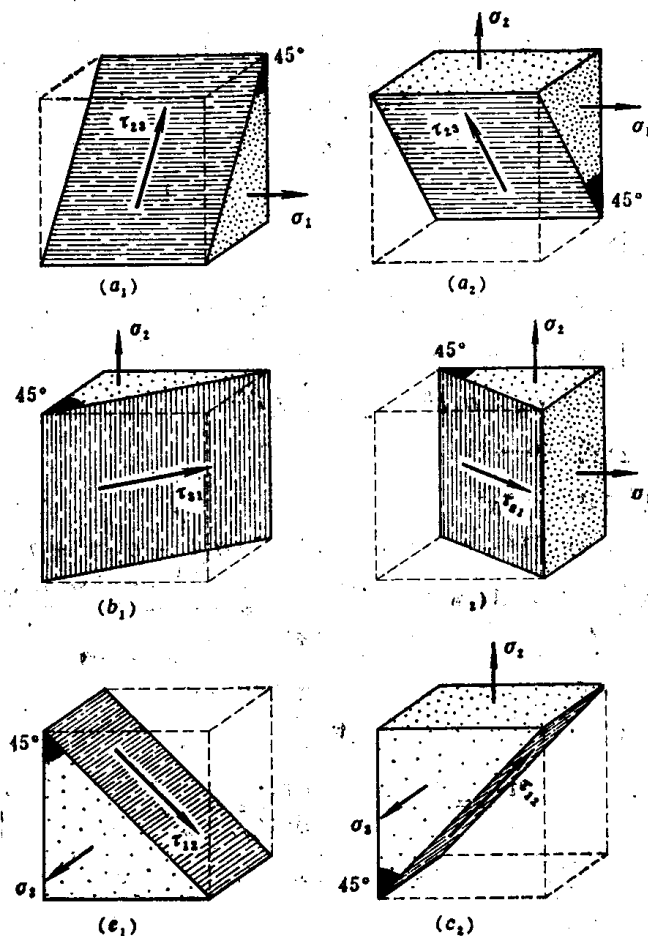


图 6—9

方向而与其两个主应力方向成 45° 角, 例如图 a_1 和 a_2 为平行主应力 σ_1 , 与 σ_2, σ_3 成 45° 角的面。

综上所述, 任何一点都有三个剪应力极值, 它们分别等于每两个主应力之差的一半。其中绝对值最大者为

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (6-11)$$

它作用在平行 σ_2 , 与 σ_1, σ_3 成等倾的面上, 如图 6—9 b_1, b_2 所示。

6—5 例题与指导

本章是第 1 章中关于基本应力状态 (单向、纯剪) 分析和平面应力状态分析内容的继续, 进一步研究了在空间应力状态条件下, 一点应力的变化规律及其特征值。需深入理解:

1. 一点应力是随所在截面方位而变化, 此变化规律以斜面应力公式来描述。
 2. 一点应力状态是由六个应力分量确定的。这六个应力分量一般是: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 。只要给定六个应力分量值, 则一点任意斜面上的应力 (σ_N, τ_N) 都可由斜面应力公式确定。
 3. 任一点, 都至少有三个相互正交的主平面, 和相应的三个主应力。按代数值排列, 这三个主应力为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。
 4. 任一点都有三个剪应力极值, 分别等于每两个主应力之差的一半, 作用面分别在两个主平面成等倾的斜面上。最大剪应力 (按绝对值) 为 $\tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, 作用在平行 σ_2 , 与 σ_1, σ_3 成等倾的斜面上。
 5. 一点应力状态的特征值有: 主应力、剪应力极值、应力不变量等等。
- 下面举数例, 说明上述概念的运用。

[例6—1]

已知物体内某一点的应力分量: $\sigma_x = 50 \text{ MPa}, \sigma_y = 0, \sigma_z = -30 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 50 \text{ MPa}, \tau_{yz} = -75 \text{ MPa}, \tau_{zx} = 80 \text{ MPa}$ 。求该点具有外法线 N ($l = 1/2, m = 1/2, n = 1/\sqrt{2}$) 的斜面上的正应力和剪应力。

[解]

将已知数据代入斜面应力公式 (6—3), 得斜面正应力为

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \\ &= 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + (-30) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \cdot 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ &\quad - 2 \cdot 75 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2 \cdot 80 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 26.04 \text{ MPa} \end{aligned}$$

由斜面应力公式 (6—1), 计算斜面上沿坐标方向的应力分量, 得

$$\begin{aligned}
 X_N &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\
 &= 50 \cdot \frac{1}{2} + 50 \cdot \frac{1}{2} + 80 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= 106.57 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_N &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\
 &= 50 \cdot \frac{1}{2} + 0 - 75 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= -28.03 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \\
 &= 80 \cdot \frac{1}{2} - 75 \cdot \frac{1}{2} - 30 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= -18.71 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

斜面上的剪应力为

$$\begin{aligned}
 \tau_N &= \sqrt{p_N^2 - \sigma_N^2} \\
 &= \sqrt{X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2} \\
 &= \sqrt{(106.57)^2 + (-28.03)^2 + (-18.71)^2 - (26.04)^2} \\
 &= 108.7 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

关于剪应力符号，第1章中的规定对空间应力状态不再有效。对空间应力状态重新规定为：对于外法线的正方向与坐标轴的正方向一致的截面上，若剪应力分量的方向与坐标轴的正方向一致者为正，否则为负；对于外法线的正方向与坐标轴的正方向相反的截面上，若剪应力分量的方向与坐标轴的负方向一致者为正，否则为负。图6—1所示单元体各面上的剪应力分量皆为正。

〔例6—2〕

求图6—10所示一点应力状态的主应力和最大剪应力（应力单位为MPa）。

〔解〕

选取坐标系，如图6—10所示。图中已知应力分量为

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 0, \quad \sigma_y = 20, \quad \sigma_z = 30, \\
 \tau_{xy} &= 25, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0.
 \end{aligned}$$

根据公式(6—8)各式计算该应力状态的各应力不变量为

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 + 20 + 30 = 50$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix}$$

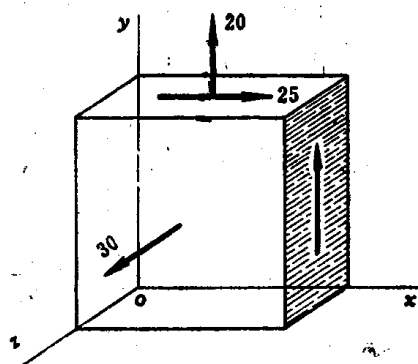


图 6—10

$$= \begin{vmatrix} 0 & 25 \\ 25 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = -25$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 0 & 25 & 0 \\ 25 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} \\ = -18750$$

代入方程 (6—7), 得

$$\sigma_0^3 - 50\sigma_0^2 - 25\sigma_0 + 18750 = 0 \quad (1)$$

设方程的三个根为 σ_I 、 σ_{II} 、 σ_{III} , 则 (1) 式可表示成

$$(\sigma_0 - \sigma_I)(\sigma_0 - \sigma_{II})(\sigma_0 - \sigma_{III}) = 0 \quad (2)$$

由题设条件, z 面上没有剪应力 $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$, 可知 $\sigma_z = 30$ MPa 必为主应力之一, 即为方程 (1) 的三个根之一。设 $\sigma_I = \sigma_z = 30$ MPa, 代入 (2) 式, 并展开整理得到

$$\sigma_0^3 - (30 + \sigma_{II} + \sigma_{III})\sigma_0^2 + (30\sigma_{II} + 30\sigma_{III} + \sigma_{II}\sigma_{III})\sigma_0 \\ - (30\sigma_{II}\sigma_{III}) = 0 \quad (3)$$

方程 (3) 和方程 (1) 应该具有相同的解, 因此两式的系数必对应相等, 由此得到

$$30 + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 50 \quad (4)$$

$$30\sigma_{II} + 30\sigma_{III} + \sigma_{II}\sigma_{III} = -25 \quad (5)$$

$$30\sigma_{II} + \sigma_{III} = -18750 \quad (6)$$

由方程 (4)、(5)、(6) 解得 $\sigma_{II} = -16.92$ MPa, $\sigma_{III} = 36.92$ MPa 与 $\sigma_I = 30$ MPa 三个根。按代数值排列, 三个主应力为

$$\sigma_1 = 36.92 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -16.92 \text{ MPa}$$

该点最大剪应力值为

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{36.92 + 16.92}{2} = 26.92 \text{ MPa}$$

〔例6—3〕

已知一点应力状态如图 6—11 所示, 求该点的主应力及最大剪应力值 (应力单位皆为 MPa)。

〔解〕

选取坐标系如图所示, 该点各应力分量为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 14, \quad \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 12$$

根据公式 (6—8) 各式计算该应力点的各不变量:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 + 14 + 0 = 14$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -144$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 14 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2016$$

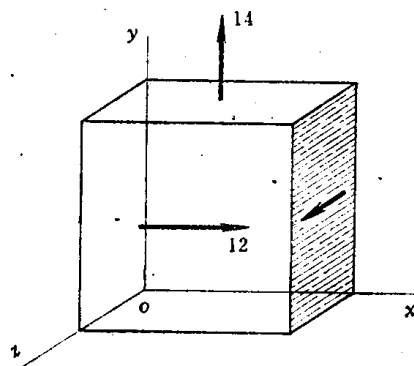


图 6—11

代入方程 (6—7), 得到

$$\sigma_0^3 - 14\sigma_0^2 - 144\sigma_0 + 2016 = 0 \quad (1)$$

由于 $\tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$, y 面为主平面, σ_y 为主应力。设 (1) 式的三个根为 $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, 并设 $\sigma_I = \sigma_y = 14$ MPa。 (1) 式可写成

$$(\sigma_0 - 14)(\sigma_0 - \sigma_I)(\sigma_0 - \sigma_{II}) = 0 \quad (2)$$

将 (2) 式展开并整理后成为

$$\sigma_0^3 - (14 + \sigma_I + \sigma_{II})\sigma_0^2 + (14\sigma_I + 14\sigma_{II} + \sigma_I\sigma_{II})\sigma_0 - (14\sigma_I\sigma_{II}) = 0 \quad (3)$$

(3) 式与 (1) 式系数应对应相等, 由此得到

$$14 + \sigma_I + \sigma_{II} = 14 \quad (4)$$

$$14(\sigma_I + \sigma_{II}) + \sigma_I\sigma_{II} = -144 \quad (5)$$

$$14\sigma_I\sigma_{II} = -2016 \quad (6)$$

最后解得该点的三个主应力值分别为

$$\sigma_1 = 14 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 12 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -12 \text{ MPa}$$

其最大剪应力值为

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{14 + 12}{2} = 13 \text{ MPa}$$

[例6—4]

设某点应力状态为 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = a$, 求该点的主应力及最大剪应力。

〔解〕

根据 (6—8) 各式计算应力不变量

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3a$$

$$I_2 = 3 \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} = 0$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$$

其特征方程为

$$\sigma_0^3 - 3a\sigma_0^2 = 0$$

$$\sigma_0^2(\sigma_0 - 3a) = 0$$

由此式解得该点三个主应力值为: $\sigma_1 = 3a$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, 该点的最大剪应力值为:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3}{2}a$$

〔例6—5〕

设一点应力状态为

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

求该点的主应力。

〔解〕

根据 (6—8) 各式计算该点的各应力不变量

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = 3 \begin{vmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{vmatrix} = -3\tau^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{vmatrix} = 2\tau^3$$

特征方程为

$$\sigma_0^3 - 3\tau^2\sigma_0 - 2\tau^3 = 0$$

先用试算法得一个根为 $\sigma_1 = -\tau$ 。再以 $(\sigma + \tau)$ 除特征方程, 得二次方程

$$\sigma_0^2 - \tau\sigma_0 - 2\tau^2 = 0$$

经因式分解后, 上式成为

$$(\sigma_0 - 2\tau)(\sigma_0 + \tau) = 0$$

最后得到该点三个主应力为: $\sigma_1 = 2\tau$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -\tau$ 。

6-6 空间应力状态应力圆

第1章曾介绍平面应力状态分析的莫尔应力圆。本节将进一步介绍空间应力状态的莫尔应力圆。仅以定性分析的方法予以介绍，不作严格的推证。

设某点的主应力为 σ_1 , σ_2 , σ_3 。以其主平面方向取单元体，如图6-12a所示。

设 $x^0y^0z^0$ 为该点之应力主轴。若让单元体绕主应力 σ_1

(即图中应力主轴 x^0)旋转，主应力 σ_1 不会发生变化。由于单元体平行 σ_1 各面的方位的变化，不再是主平面，面上的应力亦不再是

主应力。各面上应力值(如图6-12b所示) σ_y , τ_{yz} , σ_z , τ_{zy} ，显然与主应力 σ_2 , σ_3 以及旋转角 α 相关；而与主应力 σ_1 无关。它们的变化规律与平面应力状态时一样，可应用平面应力分析的斜面应力公式来描述，或用平面应力状态的应力圆，即 σ_2 - σ_3 应力圆来描述。同样，当单元体绕主应力 σ_2 旋转时(如图6-13所示)，平行 σ_2 的面上应力的变化规律，可

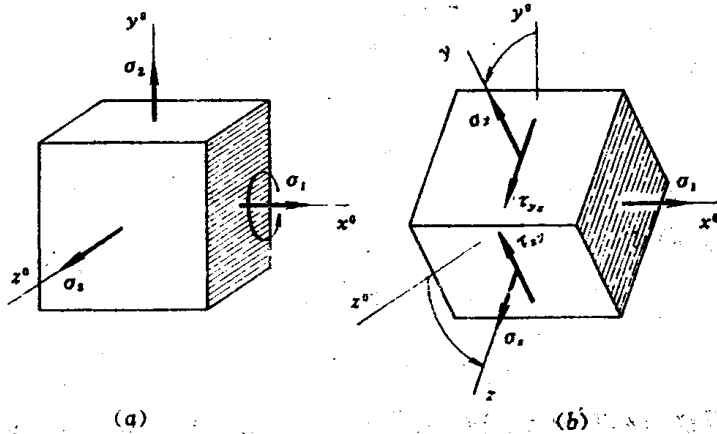


图 6-12

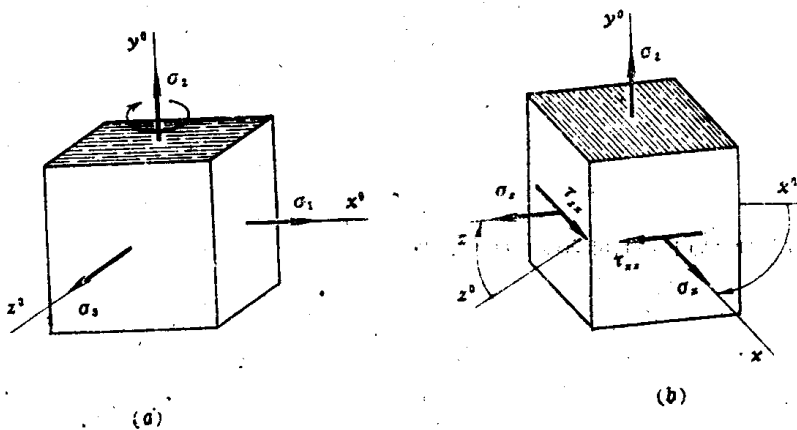


图 6-13

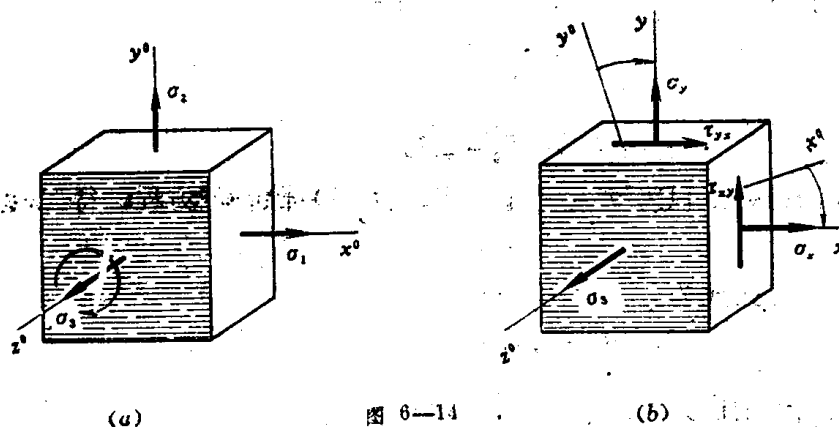


图 6-14

由 $\sigma_1 - \sigma_3$ 应力圆来描述。当单元体绕主应力 σ_3 旋转时 (如图 6—14 所示), 平行 σ_3 的面上的应力的变化规律, 可由 $\sigma_1 - \sigma_2$ 应力圆来描述。将单元体分别绕三个应力主轴旋转时的应力圆画在同一个坐标系内如图 6—15 所示。

图 6—15 即为空间应力状态应力圆, 它由三个圆组成。任一斜面上的应力 (σ_N , τ_N) 在坐标面 ($\sigma - \tau$) 上的坐标点, 一般落在三个圆之间的区域内。若斜面平行三个应力主轴中的一个时, 则该面上的应力 (σ_N , τ_N) 的坐标点, 落在其中一个应力圆的曲线上。例如某一斜面平行应力主轴 σ_1 , 那么该面上的应力 (σ_N , τ_N) 对应的坐标点必在 $\sigma_2 - \sigma_3$ 应力圆上。

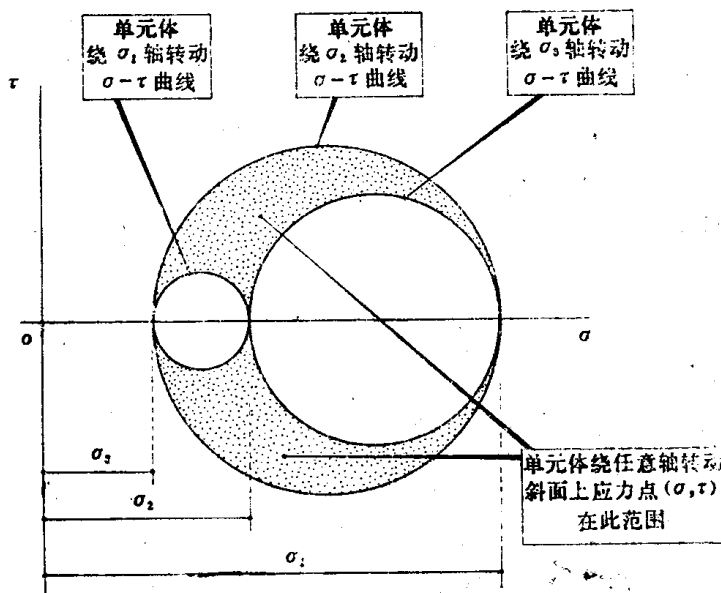


图 6—15

由空间应力状态的应力圆可见, 按代数值最大正应力为 $\sigma_{max} = \sigma_1$, 最小正应力为 $\sigma_{min} = \sigma_3$, 最大剪应力为 $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 。

6—7 体应变与应变能

一、体应变

体应变是表征一点附近体积变形的量, 以单位体积的改变量来量度。由于一般情况下, 物体上各点的体积变形是不均匀的, 因此用单元体的体积变形来描述一点的体应变。在小变形情况下, 剪应变不引起单元体的体积变化, 因此体应变只与线应变有关。

设一单元体 (如图 6—16 所示), 变形前的体积为

$$dV_0 = dx dy dz \quad (1)$$

变形后的体积为

$$\begin{aligned} dV &= (1 + \epsilon_x) dx \cdot (1 + \epsilon_y) dy \cdot (1 + \epsilon_z) dz \\ &= (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) dV_0 \end{aligned} \quad (2)$$

在小变形时, 应变值都是远远小于 1 的量。例如在单向应力状态时, 低碳钢的弹性极限所对应的应变值约为 $\epsilon = 0.001$ 。因此可将应变值作为微量。忽略二阶以上微量, 由 (2) 式得到

$$dV = (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \dots) dV_0 \quad (3)$$

根据定义, 体应变为

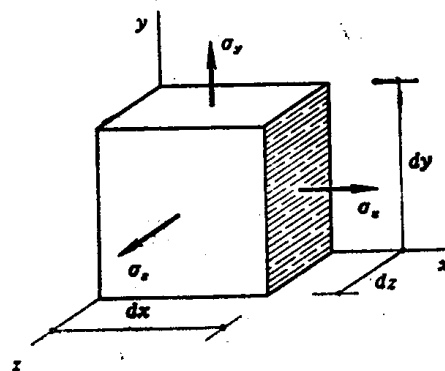


图 6—16