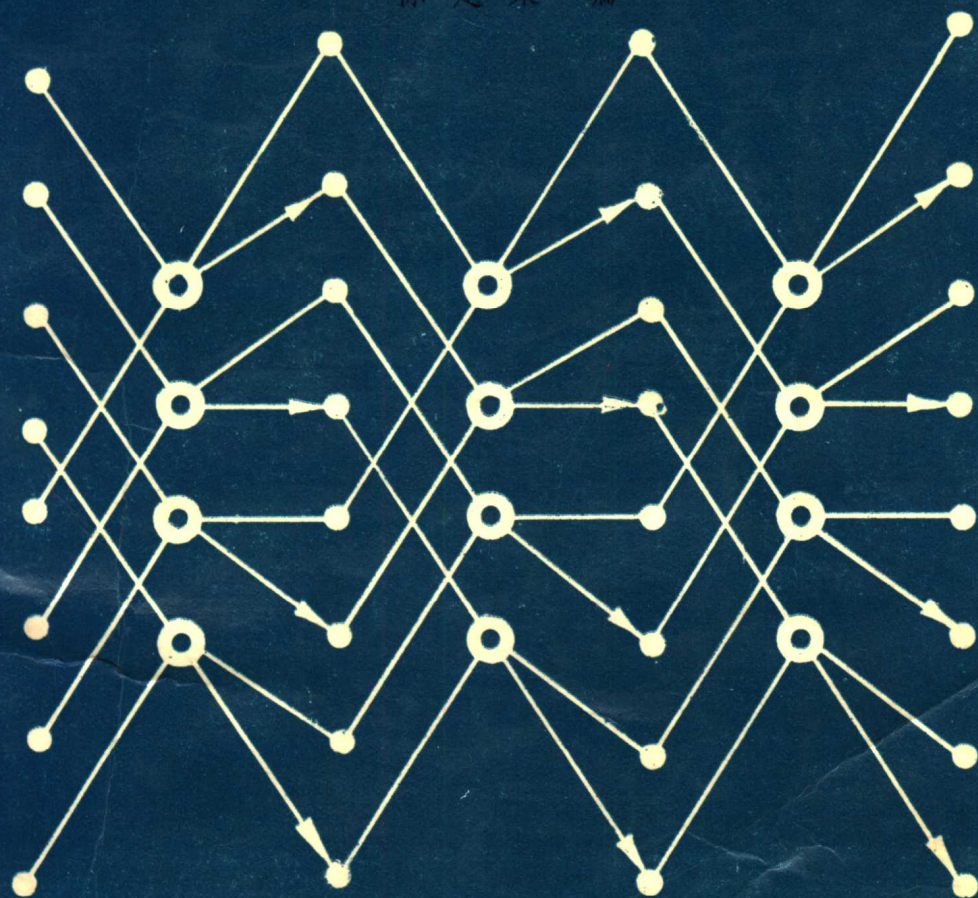


数字信号处理 的基本方法

徐定策 编



成都科技大学出版社

数 字 信 号 处 理 的 基 本 方 法

徐定策 编

前 言

数字信号处理技术现已渗透到各种科学技术领域。随着计算机、通讯、控制理论及其技术的广泛应用和高速发展,数字信号处理技术在这些领域中已得到卓有成效的应用。目前高校有关专业普遍开设“信号与系统”课,“数字信号处理”在许多专业仅作为选修课开设。为了避免教学内容重复,本书只着重基本处理方法部分的论述,以便于高等院校相应的专业选用。基本处理方法对于相关专业学生和从事应用技术工作的科技人员学习用计算机进行信号处理是很有用的。

作者根据多年从事数字信号处理的教学、科研的实践经验和读者学习本课程的一些反应,并考虑少学时特点,编写的内容力图符合读者学习和应用的需要。但限于水平,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正。

本书由成都科技大学李烈忠副教授主审;成都科技大学滕福生教授,王贵德副教授对本书的编写给予了热情的支持,并提出了许多宝贵意见,在此谨向三位老师表示深切的谢意。

编 者

1987年6月于成都科技大学

目 录

第一章 数字信号处理的一般概念	(1)
1-0 引 言	(1)
1-1 概 论	(1)
1-2 数字信号处理的基本内容	(4)
1-3 数字信号处理技术的应用	(5)
第二章 离散傅里叶变换	(8)
2-1 离散周期序列和离散傅里叶级数	(8)
2-2 有限长度序列和离散傅里叶变换	(17)
2-3 逐段卷积和	(41)
习 题	(49)
第三章 数字滤波器的结构	(53)
3-1 数字滤波器的结构特点与表示方法	(54)
3-2 I.I.R. 滤波器的结构	(57)
3-3 F.I.R. 滤波器的结构	(61)
3-4 结构分析举例	(64)
习 题	(67)
第四章 无限冲激响应数字滤波器的设计	(70)
4-1 从模拟滤波器设计数字滤波器的方法	(70)
4-2 常用模拟滤波器的特性	(80)
4-3 几种常用 I.I.R. 数字滤波器的设计	(88)
4-4 I.I.R. 数字滤波器的计算机辅助设计	(106)
习 题	(114)
第五章 有限冲激响应数字滤波器的设计	(117)
5-1 窗口设计法	(120)
5-2 频率抽样设计法	(145)
5-3 F.I.R. 数字滤波器的计算机辅助设计	(157)
习 题	(163)

第六章 快速傅里叶变换	(166)
6-1 基数2时间抽取 F.F.T. 算法	(168)
6-2 基数2频率抽取 F.F.T. 算法	(177)
6-3 I.D.F.T. 的运算方法	(180)
6-4 任意基数的 F.F.T. 算法	(183)
6-5 F.F.T. 的软件实现	(196)
习 题	(204)

第一章 数字信号处理的一般概念

1-0 引言

数字信号处理技术是研究用数字或符号的序列来表示信号, 以及对这些序列信号进行处理的一门学科, 人们根据需要利用数字运算方法对信号的产生、变换、滤波、调制、解调、均衡、增强、压缩、估值、识别等进行的加工处理, 都可纳入数字信号处理领域。它是六十年代随着大规模集成电路技术和数字计算机技术的迅速发展与信息论和网络理论的相互结合而综合发展起来的, 在理论上和实践上都具有十分重大的意义。近年来, 为达到各种信号处理的目的, 采用了数字计算, 用特种数字电路来代替旧的模拟设备, 有很大的进展。由于集成电路不断革新, 且成本不断降低, 各种微处理机和小机计算机, 具有不同的信号处理功能, 能做成与以前全模拟性质的系统具有相同大小和相同成本限制的特殊目的的数字信号处理器。

1-1 概论

通信、雷达、电子对抗、声纳、自动控制系统的键问题是消息的传输和处理。所谓消息是指待传输或待检测的数据、信息, 统称为信号。

信号定义为传递信息的函数, 该信息一般是有关某一物理系统的状态或性能的。虽然信号可以用许多方式来表示, 但在所有情况下, 信息都可以用某种形式变化的图形来表示。例如, 信号可以取随时间或随空间变化之图形。各种信号在数学上可表示为一个或几个独立变量的函数。例如, 语言信号在数学上可以表示成时间的函数, 而图象可以表示成一个二元空间变量的亮度函数。(通常的习惯是把信号之数学表示式的独立变量当作时间, 尽管实际上它可以不代表时间)。

信号可以分为模拟信号与离散信号。

所谓模拟信号是指: 在规定的连续时间内, 信号的幅值可以取在此连续时间范围内的任意数值。这样的连续时间函数所表示的信号就是模拟信号。如正弦信号(正弦函数)、阶跃信号(阶跃函数)以及由传声器等所产生的信号都属于模拟信号。“模拟”这个名词显然是从模拟计算演变出来的。在模拟计算中, 电压和电流做为实际变量, 但“模拟”的意义已经大大超出了这一范围。

连续时间信号是指: 在连续时间范围内的信号, 其幅值可以是连续数值, 也可以是离散的数值。模拟信号可以看作连续信号的一个特例。实际上, “连续时间信号”与“模拟信号”这两个名词可以相互通用, 并且经常用来说明同一信号。因为“模拟”与“模仿”容易混淆起来, 所以在多数情况下以采用“连续时间信号”为宜, 只有当与“数字”相提并论时, 才用“模拟”这个名词。

离散时间信号是指：在一组特定的时间下，表示信号数值的函数，做为独立变量的时间变量被量化了。如果离散时间信号的幅值是连续值，则有时又称为“抽样数据”信号。即在离散时间下对模拟信号的抽样。

“量化”这个名词是：由于每个抽样值是连续的模拟量，它有无穷多个值，而 n 位二进制数字进行化零取整（类似四舍五入）的处理，这个过程就叫“量化”。这是利用一组数值来表示变量的过程。所谓“量化变量”实际上就是一组不同的数值。

数字信号是在时间上和幅值上都是经过量化的信号，可以用一序列的数来表示，而每一个数又是由有限个数码来表示的。因而“离散时间”和“数字”两个名词在实际应用中经常是指同一种信号。关于离散时间信号的一些理论也适用于数字信号，这两个名词无需严格区分。“离散时间”多用于理论问题的讨论，而“数字”却更习惯于讨论硬件和软件设备。

根据所选用的硬件和软件的形式以及所用信号的性质来确定系统的名称是比较合适的，例如“模拟系统”、“数字系统”、“连续时间系统”与“离散时间系统”等等。

所谓线性系统是指：它的参数与输入激励信号的性质和幅度无关，也就是满足叠加定理的系统。一个线性系统可以利用线性的微分方程和差分方程来表示。线性时不变系统是指：系统参数是固定的，不随时间而变的系统。

集中参数系统是指描述系统工作的参数，只集中表现在系统的元件上，与连接系统传输信号的导线无关。集中参数系统满足常微分方程和差分方程。

本书不讨论分布参数系统。在进行理论研究时，特别指出讨论的系统是（1）连续时间、线性和时不变系统，简称为CTLTI系统，（2）离散时间、线性和时不变系统，简称为DTLTI系统。

随着信号传输理论与技术的发展，必然出现所谓信号处理的新课题。信号处理可以定义为对信号进行某种加工或变换。加工或变换的目的是：削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰；或者是将信号变换成容易分析与识别的形式，以便估计和选择它的特征参量。

所谓信号数字处理乃是相对于目前大量接触的模拟处理技术而言的。随着科学技术的进展，特别是大规模集成电路、（LSI）电子计算机、和微处理机技术的进展。因为信号有模拟与数字之分，人们正在试图将信号的模拟处理改用数字处理。故其概念稍宽一些。其中，数字信号处理为狭义的（因为信号有模拟与数字之分）。信息的数字处理为广义的（因为信号是信息的载荷者，故概念也很明确，只不过更宽一些）。

由上面的一些名词和定义，我们对数字信号处理可以有一个大致的轮廓概念。先从模拟信号的数字化处理谈起，模拟信号的数字化处理就是先将模拟信号转变为数字信号，然后用数字处理方法进行加工，最后再还原为模拟信号的处理过程。图1-1(a)用方框图表示了信号数字处理系统的过程。图1-2更清楚地说明了图1-1(b)中抽样信号的处理过程。

模拟输入信号 $x_a(t)$ 首先通过抽样器每隔时间 T 秒读出一数据，并将它存放在模数（A/D）变换器的保持电路中。经过抽样以后的信号称为“离散时间信号”，它只表达时间轴上一些离散点（0、 T 、 $2T$ 、 $\dots$ 、 nT ）上的信号值，这些值为 $x_a(0)$ 、 $x_a(T)$ 、

$x_s(2T) \dots, x_s(nT)$, 如图 1-2(b)。因此, 离散时间信号就是指一组特定时间下表达信号数值的函数, 抽样过程也就是模拟信号对时间的量化过程。

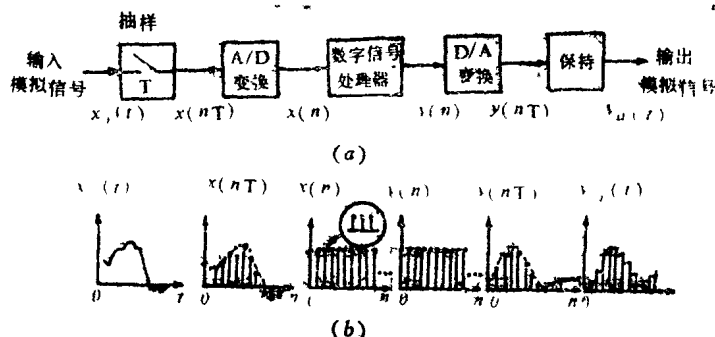


图1-1 信号的数字处理过程

A/D 变换器的功能则是将保持电路中抽样信号电平进一步变换成数字, 数字信号处理中所采用的典型数字形式是二进制数系, 仅用 0 和 1 两个数值来表示所有可能的数。一个数值为 m 的数可以用一包括有 n 个二进制码 (码位) 的数来表示:

$$M = 2^N$$

相反地, 如果 M 是所需的可能电平数, 则所需的码位 N 等于或大于 $\log_2 M$ 的最小正整数。例如, 每个数字用 5 位二进制码表示吧, 那末只能表达 $2^5 = 32$ 种不同的信号幅度, 这些幅度称为量化电平。当离散时间信号的幅度不同于量化电平时, 就必须以最相近的一个量化电平来近似。因而, 经过 A/D 转换后, 信号在幅度上也量化了, 这种在时间上和幅度上都量化的信号, 就称为“数字信号”。它本质上只是一序列的“数”, 而每个数则是用有限个数码来表示的。

二进制数码的数字信号序列我们用 $x(n)$ 来表示, 自变量 n 是一个整型变量, 它表示这个数在序列中的次序位置, 如图 1-2(c) 所示。 $x(n)$ 被送到数字信号处理器进行所需要的数学运算和逻辑运算, 如加、减、乘、与/或等, 这里的数字信号处理器可以是通用的数字计算机、微型计算机或专用的计算装置, 包

括有足够的逻辑存贮能力的存贮器。数字信号序列 $x(n)$ 经过数字信号处理器按一定的要求加工后, 转变为另一组输出序列 $y(n)$, 它经过数模 (D/A) 输换器变换成类似于抽样数据信号的离散信号 $y(nT)$, $y(nT)$ 实际上将数码反过来转换成模拟电压 (或电流), 这些电压在时间点 $0, T, 2T \dots$ 上的幅度, 应该等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的大小, 再通过保持电路, 使它能够按照预定的曲线在相邻点之间对输出信号进行外推

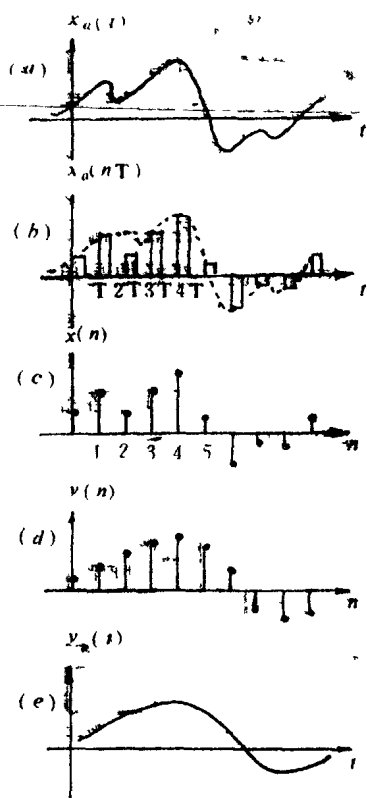


图1-2 抽样信号处理过程

逼近，把脉冲之间的空隙填充起来，最后通过平滑滤波器，滤去这些模拟电量中不需要的一些高频成分，就得到系统所需要的输出，这就是 $y_a(t)$ 。如图1-2(d)、(e)所示。

有些系统在其一端或两端的信号已经是数字形式，在此情况下就无需模数转换与数模转换。例如：有一些连续时间的遥测、遥控信号需要使用数字设备来处理，但是为了压缩数据和计算，输出数据应该保持为数字形式，它的输出端就无需 D/A 转换设备。另外有一些系统，其本身的输入就是数字量，这样，开始的 A/D 变换当然也就不需要了，这种系统有时也称为“纯数字系统”。

由此可见，数字信号处理器是整个系统的基本环节，它完成由该系统所规定的运算过程。由于数字信号处理器所用的计算设备是通用计算机、微计算机或专用计算机。此外，还应具备足够的存贮能力。因此，采用这样复杂的系统只处理单一信号是不经济的。如果利用“时分”复用的方法就可以实现用一套计算设备同时处理几路独立的信号的技术。它的方框图如图1-3。当各路输入信号分别输入一序列值时，同步系统控制它们在时间上前后错开，并依次进入处理器，处理器在算完一路的结果以后，再算第二路的结果，在各路输入信号输入第二个序列以前，处理器已将各路信号算完一遍，并将结果分别送给了各路的输出，因此，对于每一路信道来说，都好像是单独占用着处理器一样。处理器的运算速度越高，它所能同时处理的信道也越多。在输出端按相应的时间顺序输出，最后通过分路器把输出的组合序列分离送出。

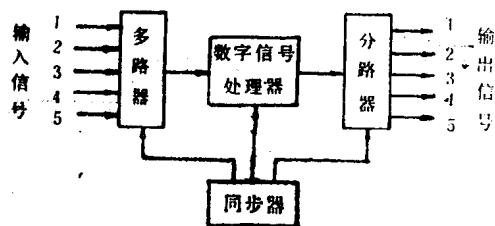


图1-3 时分系路数字信号处理系统

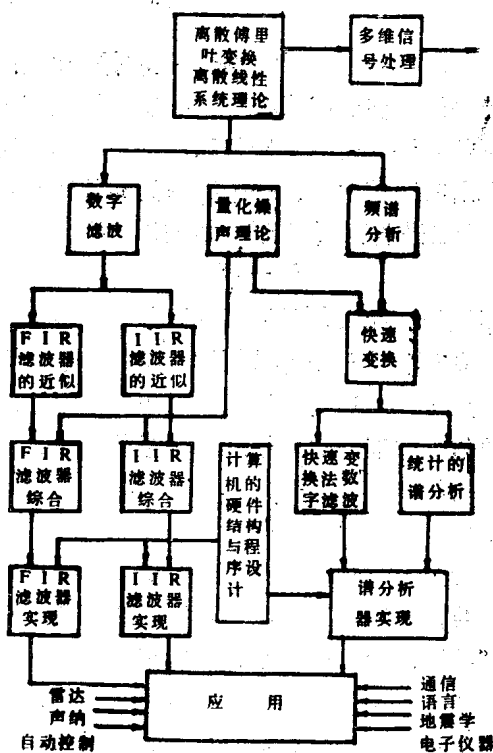


图1-4 数字信号处理的基本内容

1-2 数字信号处理的基本内容

作为一门现代学科，数字信号处理技术近十多年来已迅速扩展到包含许多单独部门的程度，并为这些部门提供了牢固的理论基础。图1-4说明此领域怎样出现和扩展的情况。由于数字信号处理多半是依据离散时间线性非时变系统理论，在图中我们把这一理论作为统一整个领域的主要因素。

数字信号处理领域的两个主要分支是数字滤波和频谱分析。数字滤波领域进一步分

成有限冲激响应 ($F.I.R.$) 滤波器和无限冲激响应 ($I.I.R.$) 滤波器。数字频谱分析领域进一步分为用离散傅里叶变换 ($D.F.T.$) 的频谱计算和用统计方法对随机信号频谱的计算——例如, 数字系统中量化噪声频谱的计算。从以后的分析讨论可知, 在实际频谱分析技术中几乎无例外地采用快速傅里叶变换 ($F.F.T.$) 和有关的快速卷积法。多维信号处理是一个比较新的领域, 所以在图 1-4 中关于其发展方向也不予详述。

数字信号处理的其余方面, 如图 1-4 中所示是各种数字系统实现的重要课题以及应用范围。如果不同时对用有限精度的硬件或软件去实际实现这些系统所涉及的各种问题有充分的理解, 那么所有关于数字滤波器和频谱分析仪设计的理论上的考虑就不会有什么价值。所以, 实现方面的问题首先与离散系统中量化的数学基础有关; 其次是与要求用硬件还是用软件来实现有关, 懂得这两种实现方法内在的限制和优点是很重要的。

1-3 数字信号处理技术的应用

数字信号处理的基本数学原理在一个世纪以前就已出现, 但是, 到本世纪六十年代之前, 信号处理却一直沿用模拟处理而未采用数字处理的方法。仅仅在近十多年的时间里, 数字信号处理技术及其应用才以惊人的速度发展起来。这既是由于模拟处理存在的某些问题, 不能适应现代科学技术的发展, 也是由于近代数字集成技术与数字电子计算机的发展才促进了信号的数字处理的缘故。

目前, 数字信号处理的应用范围日益扩大, 其重要性正逐渐为人们所认识, 现已卓见成效的应用在包括: 数据通信、语言通信、自动控制工程、生物医学工程、遥感技术、雷达技术、声学、声纳、图象处理及传输技术、核物理、地震学、波谱学、振动学及电子测量仪器等方面。而且已渗透到电子对抗、测控、制导、模式识别等国防尖端电子技术的各个领域。

在电子测量领域利用数字计算机和微处理器可以控制仪器测试的自动化, 有利于高速度和高精度地完成各种测量。这种仪器如自动网络分析仪, 即可以比较方便地进行多种参量之间的变换, 通过大量数据计算和变换, 就可以给出表征被测件特性的多种参量, 又可以比较方便地做统计平均的计算, 用来消除误差。此外, 使用具有信息处理机的计算计数器和带微处理器的通用计数器等, 还可以对测量结果进行统计分析, 给出各种统计量。在信号波形处理上, 通过小型计算机和微计算机 $F.F.T.$ 算法, 可以提取深埋在噪声中的信号, 再通过适当处理之后显示出来。这种仪器有数字处理示波器和信号处理系统等智能仪器和自动测试系统。图 1-5 表示带微处理器的数字处理示波器的简化方块图。仪器有两个相同的输入通道, 输入信号经模数变换后, 由微处理器控制多路开关的逻辑将数字信号送入数据存贮器, 可以直接送给显示部分给出实时显示, 也可送给由微处理器组成的中央处理单元, 对存贮

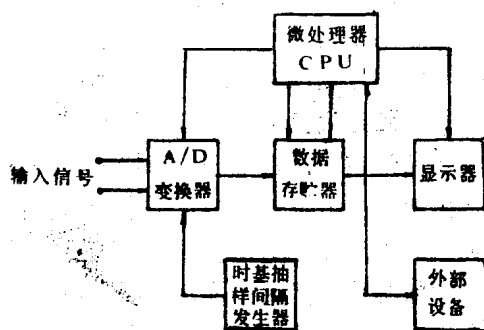


图1-5 数字处理示波器示意方块图

的数据进行四则运算，求平均值、均方根值以及平方值等运算。这种仪器的特点是：它能同时获得电压和电流的波形，并通过微处理器的数字处理可显示瞬时功率波形，还可把均方根功率值显示在荧光屏上。

如果在上述数字处理示波器上外加一个计算机件如 FFT 部件，则仪器可具有傅里叶变换、信号平均、相关分析等数字处理功能，可以用来测量网络和系统的频率响应。因此，这种数字波形处理系统，就兼有时域与频域两方面的分析功能，可以对波形进行多种分析和计算，成为多功能的智能示波器。

值得提出，近年来出现了一种智能显示终端，较多地应用了数字信号处理技术。这种智能终端可做为大型计算机中心的分时系统的终端设备。这种终端内往往装有微型计算机，可以独立编制程序，以适应各种科学技术领域的应用。如用于数据通信，作大型计算机网的显示终端等。利用键盘或其它输入装置如光笔等，可以直接对荧光屏上所显示的内容进行重新编辑修改，用来控制工业生产过程或某特种操作的全过程。另外，通过微型计算机的数控与运算，可以实时地显示工序过程中某一组数据或曲线。

在通信方面，有一种自适应数字数据传输系统，其核心部件就是快速傅里叶变换处理机。它可以兼容移频键控、移相键控和移相调幅结合等六种数据传输中的调制方式，相当于未用数字信号处理机的八种设备的功能，而且这种智能性的通信系统能够自适应传输信道的特性变化始终保持最佳效果。随着微处理器的出现和发展，在数据通信与电子电话交换机等方面应用数字信号处理日益增多，例如，在国际与国内通信的中间系统内，已采用微处理器把信号、编码、传输速度、字符格式进行转换，使两个不同的网络能接口通信。国内电话通信，一般采用频分制，也有用脉冲编码调制 (PCM) 的时分制。对于多路的频分制与时分制之间的自动转接，需应用数字滤波器与 $F.F.T.$ 等数字信号处理技术。对图象通信更需应用二维的图象信息编码与图象处理等技术。此外，还有用微处理器控制收发信机的调谐和进行信号检测等等。

在雷达方面应用数字信号处理技术，除了前述智能显示终端可配用在指挥仪上之外，在军事上，由雷达数字计算机，射击武器等组成一个自动控制系统，控制导弹、火炮、鱼雷等武器的发射。当目标进入雷达作用半径以内，一旦被自动跟踪雷达发现时就进行跟踪，同时自动跟踪雷达将测得的目标的当时位置（距离、方位角和高低角）随时送入计算机，以便计算机按人们事先规定的推算方法，迅速推算出目标的航速，引导导弹或其它射击武器去击中目标。如发射的是导弹，发射后，导弹的飞行数据与目标的座标数据都由计算机进行计算比较，然后再用控制雷达引导导弹去接近目标。这是一个大的自动控制和随动系统，其中数字计算机及其两端的 A/D 转换和 D/A 转换部件就构成一个数字信号处理系统。此外，近代的超远程预警雷达系统，由于重复频率低，难以采用一般的延迟线模拟处理方法，也是采用 $F.F.T.$ 数字处理机来实现的。

在声纳方面，例如一个海岸实时警戒系统，其中心部分就是一个快速傅里叶分析系统，由海岸线上设置的若干个水听器检测海洋水域中船舶和潜艇的航行噪声，经过一定模拟信号处理传送到监视站，通过监视站内快速傅里叶分析系统的实时分析，包括对海洋噪声的滤波和多次平均，求得被测信号的频谱，然后将此信号谱与预先存贮的各种标准谱进行比较，从而可以识别出舰艇的类型和航速、航向，当获得这些识别结果后，就

可发生警报等信号，同时还进行显示和记录。

地震勘探是石油与天然气勘探的重要手段，也广泛应用数字计算机进行地震资料的数字处理。地震法可以看成是一种以地层为传输信道的通信系统，因而能用通信理论解决地震信息的改善和自动提取问题。但地震法也有其特殊性，即送入地下的是一个宽频带的尖脉冲信号，它受到地层对高频分量的严重吸收而衰减，同时还受到局部散射与混响，微小地震的噪声等因素的影响，以致不能从接收到的包含干扰的信息中知道期望信号的全部参数，故在信号处理方法上又与雷达、通信的不同，而需采用一套特殊的地震信息改善和信息自动提取、分析的数理统计方法。信息改善系统包括一维与二维的数字滤波、最佳滤波、反鸣震与反卷积滤波、以及其深度点迭加等。因此，地震勘探、地震波测量和核试验监测，都要用到多维的数字信号处理技术。

在图象处理方面，如增强X射线、增强和分析探测森林火灾或农业航空摄影，分析卫星天气照片以及增强从月球和深空探测器送回的电视传输等，都需要用二维信号处理技术，排除背景的干扰，可以获得清晰的图象。

总地说来，目前数字信号处理技术已被广泛应用到各种科学技术领域，在这些领域里借助于数字计算机的控制和运算功能，可以获得不同的信号数字处理用途。对于确定性信号进行卷积运算，可以实现数字卷积滤波。对随机信号进行相关函数的运算，实现相关滤波，可以从背景噪声的干扰中提取信号。相关滤波和相关分析有着广泛的用途，例如测量自动控制系统的动态特性，测量建筑物的固有振动频率、抗震、隔音等参数，地质方面的勘探，地震监测等。此外，还可以进行各种随机信号的谱分析、识别舰艇的类型和定位测量，物理学上的核磁共振分析，原子炉噪声及地球磁场测量和分析，以及医学上的心电、心音、脑电等病理分析和检查等等。

第二章 离散傅里叶变换

2-1 离散周期序列和离散傅里叶级数

一、信号的时域与频域中的变换关系

有三种信号或序列的傅里叶变换

(1) 模拟周期信号 $\tilde{x}_s(t)$ ，其变换是傅里叶级数 $X_s(nF_s)$ ，即离散频率谱。若 $\tilde{x}_s(t)$ 的周期为 T_s ，则离散谱的间距是 $F_s = \frac{1}{T_s}$ ，表示式为

$$\left. \begin{aligned} X_s(nF_s) &= \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \tilde{x}_s(t) e^{-j2\pi nF_s t} dt \\ \tilde{x}_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s(nF_s) e^{j2\pi nF_s t} \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

其变换图形如图2-1(a)所示。

(2) 模拟非周期信号 $x_s(t)$ ，其变换是傅里叶积分 $X_s(j\Omega)$ 即是连续谱。表示式为

$$\left. \begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x_s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_s(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

其变换图形如图2-1(b)所示。

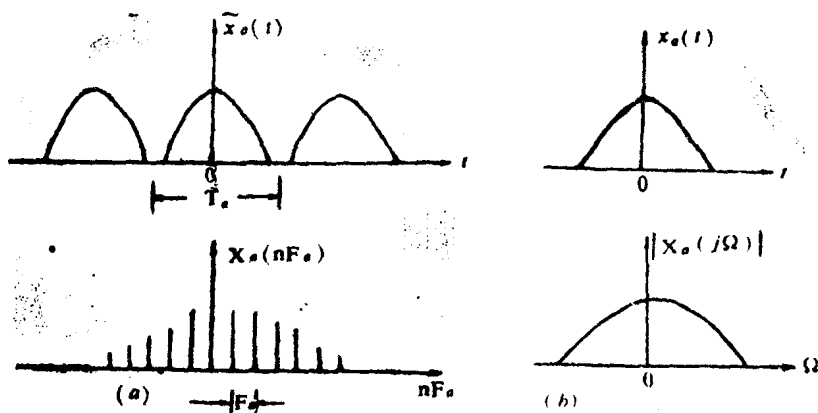


图2-1

(3) 离散非周期序列信号 $x(n)$, 其变换是序列的傅里叶变换 $\tilde{X}(e^{j\omega})$, 即是周期为 2π 的 ω 的连续谱。表示式为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其变换图形如图2-2所示。

综上所述, 从逻辑上来推断, 还可能存在第四种情况, 即信号是离散周期序列 $\tilde{x}(n)$, 其周期为 N 的情况。它的傅里叶变换将是什么形式? 有什么性质? 另外, 我们还可以设想第五种情况, 即如果我们取出这个周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期来作为一个“有限长度序列” $x(n)$, 那么, 它的傅里叶变换又将是什么形式? 有什么性质? 这两种变换与 Z 变换关系如何?

本章就是讨论这后两种序列信号情况下的傅里叶变换。它们就是离散傅里叶级数简称为 (DFS) 和离散傅里叶变换简称为 (DFT)。由于下述原因, 这两种变换在数字信号处理中得到最广泛的应用。

我们看到, 在第三种情况下, 非周期离散序列的谱是周期的和连续频率的谱。正是由于谱是连续的, 即是 Ω 或 ω 的连续函数, 因此不可能由计算机运算给出, 计算机不可能在连续频率坐标上给出谱的值; 同时, 它也不可能对这个连续谱进行反变换的运算来得到原序列。然而, 在后面讨论中将会看到, D.F.S 或 D.F.T 情况下, 信号是离散序列, 谱也是离散的谱。这就给数字电子计算机抽述和运算它们以必不可少的有利条件, 计算机可以进行它们的傅里叶正、反变换的运算。特别在六十年代以来, 发展了一种快速运算 D.F.T. 的方法, 称为快速傅里叶变换简称为 F.F.T 的算法, 大大促进了数字信号处理技术的发展。我们将在下面分别介绍这二种变换的性能。

二、周期序列和离散傅里叶级数

我们把周期序列记作 $\tilde{x}(n)$, 它具有周期重复性, 可以写成

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN) \quad 0 \leq n \leq N$$

式中 k 为任意整数, N 为它的周期长度。一个周期内有 N 个信号值 $x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)$ 。我们可以把周期序列 $\tilde{x}(n)$ 看作由 N 个不同幅值 $x(n)$ 的双边子序列的组合, 或 N 个均以周期 N 作间隔的等幅双边子序列集。由前面双边序列的分析结果可知, 等幅的双边序列的 Z 变换是不存在收敛域的。拿幅值等于 $x(0)$ 的双边子序列来说, 它的右边子序列的 Z 变换为

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(0) Z^{-k} = x(0) \sum_{k=0}^{\infty} Z^{-k} = x(0) \frac{1}{1-Z^{-1}}, \quad |Z| > 1$$

而它的左边子序列的Z变换为

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} x(0) Z^{-k} = x(0) \sum_{m=1}^{\infty} Z^m = x(0) \frac{Z}{Z-1}$$

$$= x(0) \frac{1}{1-Z^{-1}}, |Z| < 1$$

因此两个子序列无公共收敛域。这意味着幅值为 $x(0)$ 的双边子序列的Z变换无收敛域，那末由 N 个双边子序列组合成的周期序列当然也就不存在Z变换的封闭解析函数。所以，对周期序列是不能用Z变换的。也可以这样理解，即周期序列在整个 $n=-\infty$ 到 $+\infty$ 都周而复始永不衰减，因而在整个Z平面上任何地方也找不到一个衰减因子 $|Z|$ 能使序列绝对可积，即，满足

$$\sum |\tilde{x}(n)| |Z|^{-n} < \infty \text{ 的条件不存在。}$$

但是，正如连续时间周期

信号可以用傅氏级数表示那样，周期序列也可以用离散的傅氏级数来表达。我们可以把周期序列看成由基波序列和很多谐波序列组成的组合波序列，它的基频和谐频分别为

$$\text{周期序列的基频} = 1/NT = f_s/N$$

$$\text{其} k \text{次谐波} = k(f_s/N)$$

如果周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数的系数为 $\tilde{X}(k)$ ，并把 $\Omega = 2\pi \left(k \frac{1}{NT} \right) (nT) = \frac{2\pi}{N} nk$ 代入，则复指数形式的傅里叶级数表示式可以写成

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

k —频率序数
 n —时间序数

其中 $e_1(n) = e^{j\Omega \cdot t} = e^{j 2\pi \frac{1}{NT} nT} = e^{j \left(\frac{2\pi}{N} \right) n}$

为基频成分

$$e_k(n) = e^{j k \Omega \cdot t} = e^{j \left(\frac{2\pi}{N} \right) k n}$$

为 k 次谐波成分

因为

$$e^{j \left(\frac{2\pi}{N} \right) k n} = e^{j \left(\frac{2\pi}{N} \right) (k+N) n}$$

所以

$$e_{k+N}(n) = e_k(n)$$

这表明在频域的有限带宽 $f_s = \frac{1}{T}$ 内的频谱密度 $\tilde{X}(k)$ 也按等频率间隔 $\frac{1}{NT}$ 抽样，得

到 N 个离散化的样本点 $\tilde{X}\left(k\frac{1}{NT}\right)$ ，因此在上述级数中，只有 $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ 为止的 N 次独立的谐波分量，所以在级数中只能取 0 到 $(N-1)$ 项，并且乘以习惯上已经采用的常数 $\frac{1}{N}$ ，这样就得

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.4)$$

式中 $\tilde{X}(k)$ 即是此傅里叶级数中 k 次谐波 $e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$ 的系数，也是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的频谱，求解这个系数可以利用正弦序列的周期特性

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j(\frac{2\pi}{N})rN}}{1 - e^{j(\frac{2\pi}{N})r}} = \begin{cases} 1 & r=mN \\ 0 & \text{其它 } r \end{cases} \quad (2.5)$$

上式中 m 为任意整数，将(4.1)式两端乘以 $e^{-j(\frac{2\pi}{N})rn}$ ，并对一个周期求积

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})rn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})(k-r)n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N})(k-r)n} \right] = \tilde{X}(r)$$

或者说，(4.1)式中的系数 $\tilde{X}(k)$ 为

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \quad (2.6)$$

这个等式虽然是用来求 $k=0$ 到 $N-1$ 的 N 次谐波系数的，但是我们比较(2.6)式及(2.4)式的对称形式，就会发现(2.6)式本身也是一个用 N 次独立谐波分量组成的傅里叶级数，

它们所表达的也应该是一个以 N 为周期的周期序列 $\tilde{X}(k)$

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k+mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})(K+mN)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})Kn} = \tilde{X}(k) \end{aligned}$$

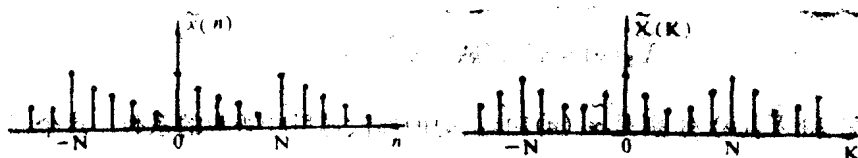


图2-3 周期序列及其DFS

因此我们看到, 时域上周期序列的离散傅里叶级数在频域上仍然是一个周期序列 见图 2-3 所示, $\tilde{X}(k)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 是频域与时域的一个周期序列对, 是一对相互表达周期序列的离散傅里叶级数关系, 这个关系是非常对称的, 可以表达为

$$\tilde{X}(k) = DFS\{\tilde{x}(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \quad (2.7)$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS\{\tilde{X}(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} \quad (2.8)$$

其中 $DFS\{\cdot\}$ 表示离散傅里叶级数变换, $IDFS\{\cdot\}$ 表示离散傅里叶级数反变换。习惯上也常用符号 W_N

$$W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})} \quad (2.9)$$

这样上式又可表达为

$$\tilde{X}(k) = DFS\{\tilde{x}(n)\} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (2.10)$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS\{\tilde{X}(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{kn} \quad (2.11)$$

一个周期序列虽然是无穷长序列, 但是只要知道它一个周期的内容, 其他的内容也知道了。所以这种无穷长序列实际上只有 N 个序列值有信息, (2.10)、(2.11) 两个表达式都只取 N 个点正说明了这个意义, 因此周期序列与有限长序列有着本质的联系。

三、离散傅里叶级数的主要性质

只讨论离散傅里叶级数的三个主要性质。

(1) 线性特性

如果有周期皆等于 N 的两个周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$, 按下式组合构成一个新的周期序列

$$\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n) \quad (2.12)$$

式中 a 和 b 为常数。那么, 这个新的周期序列 $\tilde{x}_3(n)$ (它的周期仍然是 N) 的离散傅里叶级数的系数将为

$$\tilde{X}_3(k) = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k) \quad (2.13)$$

式中 $\tilde{X}_1(k)$ 和 $\tilde{X}_2(k)$ 分别是 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 的离散傅里叶级数的系数。这个新的 $D.F.$

S 系数 $\tilde{X}_3(k)$ 也是周期为 N 的周期序列。