微积分

（上册）

上海交通大学数学系 编

上海交通大学出版社

微 积 分

(上册)

上海交通大学数学系 编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是在原上海交通大学应用数学系编写的《高等数学》使用多年的基础上改编而成的微积分教材. 本册主要包括了一元微积分和微分方程的内容. 全书共分六章:函数;极限和连续;导数和微分;微分中值定理和导数的应用;积分;微分方程.

本书在保持微积分教材的传统框架下,概念论述更加清晰,推理更加简明扼要,强调微积分的基本思想和方法. 全书给出了大量例题,每章编排有配套习题和补充题,书末附有全部计算题的答案.

本书可作为高等学校非数学专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分 . 上册/上海交通大学数学系编 . 一上海:上海交通大学出版社,2002
ISBN 7-313-03104-1

Ⅰ. 微… Ⅱ. 上… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材
Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 045414 号

微积分(上册)
上海交通大学数学系编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)
电话:64071208 出版人:张天蔚
上海交通大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:890mm×1240mm 1/32 印张:12 字数:340 千字
2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷
印数:1~5050
ISBN 7-313-03104-1/O · 147 定价:25.00 元

前　　言

微积分是高等学校的一门重要的基础课程，在培养高素质人才的过程中起着不可替代的作用. 国内外有大量的微积分教材，同时由于数学对现代科技和文化产生越来越大的影响，对这门传统课程教材的改革要求也日益迫切. 事实上，随着大学数学教学改革的进行，已经有一批新教材出版，并且产生了一定影响.

本教材是在原上海交通大学应用数学系所编《高等数学》教材使用多年的实践基础上重新编写的.

近年来上海交大基础课程的内容和教学有很大的变化，微积分课程面临的情况是：一方面由于科学技术的发展和提高学生综合素质的要求，各种相关课程的增设，使得数学课程在基础课教学中的比重相对减少；另一方面由于数学在各领域中的广泛应用，对学生数学素养和应用能力的要求则明显提高. 在这种情况下，编写一本突出基本思想方法、简明扼要、便于学习、适应教学新形势的微积分教材就十分必要了.

在本教材中，编者力图体现下列特点：

1. 努力将微积分的基本思想和方法融入各部分内容的阐述之中，以突出包括极限、导数和积分等重要概念的内涵以及它们之间的有机联系. 例如对积分的概念，从背景介绍、实例引述和定义解释直至计算应用中始终强调“分割求和”这一基本思想，而且无论是一元定积分、重积分或是曲线、曲面积分，均围绕这一思想加以展开.

2. 对数学中的一些常见重要方法在教材中加以重视. 例如两分法这一在理论和计算中有效而朴素的方法以及证明数学命题常用的辅助函数法等，在本教材中都给予了有意识地关注.

3. 作为探索，在微积分中适度渗入了现代数学观点和表达形式. 本教材通过映射导出函数概念，对线性齐次微分方程的解集合指出了其线性空间的实质，在多元函数部分采取向量表示，指出二维 Green 公

式和三维 Gauss 公式具有相同表达形式，从而揭示它们是微积分基本定理在多元情况下的推广，以及某些数学符号的采用都是这一方面的一些尝试.

4. 本教材在内容的安排和阐述上作了慎重的选择和推敲，力求朴素明了，深入浅出；对运算技巧尤其是积分方法的介绍有所淡化，这是由于功能强大的计算工具已经可以轻易解决问题而这些技巧并未涉及基本的数学思想和方法.

5. 本教材在每章开端用简洁的引言介绍有关内容的历史和作用，指出微积分发展的线索，以提高读者对该课程的兴趣，从而引导读者的深入学习.

6. 例题丰富是本教材所保持的原《高等数学》教材的特点之一. 各种典型例题的介绍有助于对微积分基本方法尤其是运算法则的领会和掌握，在学时偏紧的情况下也利于读者自学.

本书从整体框架而言并未改变传统微积分的基本结构，而就具体部分的处理而言则作了一些改革. 我们的主要目的是在教材中注重体现微积分的思想和基本方法而不强调某些法则和公式的套用. 当然，这些改革毫无疑问仍以适宜于教学为最大前提.

本书分上、下两册，上册内容为一元微积分，下册为多元微积分.

本书适用于高等院校非数学专业作为微积分(高等数学)教材，参考教学时数为 162～180 学时，书中个别小节或内容标以“*”的，读者和教师可根据实际情况选择是否采用.

本书各章分别由乐经良、景继良、孙薇荣教授和王承国副教授编写，全书由乐经良统稿. 各章后的习题由郑麒海、钱芝蓁、汪静和何铭副教授选编，部分插图由咸进国讲师制作.

本书的编写得到上海交通大学数学系和国家工科数学教学基地的支持，也得到交大教务处的关心和支持，上海交通大学出版社的陈克俭和孙岐昆两位编辑认真细致的工作保证了本书的顺利出版，编者在此表示衷心的感谢.

尽管本书编者大多有微积分教学的长期经验，也大致了解国内外各种微积分教材的内容与特点，然而对本教材的编写还是不能驾轻就

熟,对许多内容的处理虽均斟酌再三依然未觉满意,深感这一数学基础课教材编写之不易.限于编者水平,加上时间仓促,本书中的缺点乃至错误之处恐怕难免,敬请国内同行和读者不吝指正.

编者

2002 年 6 月

目　　录

第1章　函　数

函数是数学最基本的概念之一，也是微积分研究的主要对象.

函数概念是随着人类社会生产力发展而产生并逐步形成的，它反映了变量之间的依赖关系. 函数一词是法国数学家 Leibniz(莱布尼茨，1646～1716)最早提出的，虽然他并没有给出函数的定义；而函数的记号 $f(x)$则是由瑞士数学家 Euler(欧拉，1707～1783)最先使用的. 在相当长的时期内，数学家都认为函数是由一个解析表达式所给出的，直至1837 年才由德国的 Dirichlet(狄利克雷，1805～1859)首先给出接近现代概念的函数定义.

本书中的函数都是在实数范畴内变化. 这一章将首先介绍有关实数集的基本概念和一些性质，继而讨论函数的概念及其一般性态，同时对基本初等函数的性质概括地加以研究. 本章的内容是初等数学某些知识的复习、总结和提高，也是学习微积分的基础.

1.1　实数集

1.1.1　集合

具有某种属性的事物作为一个整体称为**集合**，而集合中的每个事物称为这集合的**元素**. 若 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记为 $a \in A$；若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a \notin A$.

表示一个集合可以通过列出它所有元素的方式，例如集合

$$A = \{1,2,3,4\};$$

也可以通过描述集合中元素的属性的方式，常写为$\{x \mid 使\ x\ 属于\ A\ 的性质\}$，例如自然数集

$$\mathbb{N} = \{n \mid n\ 是正整数或零\}$$

以及一次函数集合

$$S=\{f(x)\mid f(x)=kx+b,k\text{ 和 }b\text{ 是实数},k\neq 0\}.$$

若集合 A 中每一个元素都属于集合 B，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$，也称 A 包含于 B 或 B 包含 A. 例如，若将整数集和正整数集分别记为 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{N}_+$，那么就有

$$\mathbb{N}_+\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}.$$

不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$，空集是任何集合的子集.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记为 $A=B$.

设 A,B 是两个集合，则称由所有 A 的元素和 B 的元素组成的集合为 A 与 B 的**并集**，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

称由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合为 A 与 B 的**交集**，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

而称由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合为 A 与 B 的**差集**，记为 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

例如

$$A=\{x\mid x^2<1\},\quad B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\},$$

那么

$$A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 2\},\quad A\cap B=\{x\mid 0<x<1\},$$
$$A-B=\{x\mid -1<x\leqslant 0\}.$$

在集合 A,B 均非空时，还可以定义一种由有序元素对组成的集合，称为 A 与 B 的**直积**，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

例如 $A=\{1,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，那么

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}$$

是由 6 个数对组成的集合；而若 $C=\{x\mid 1<x<2\}$，$D=\{x\mid -1<x<1\}$，那么

$$C\times D=\{(x,y)\mid 1<x<2,-1<y<1\},$$

若将数轴上的线段与 C,D 对应，那么不难看出与 $C\times D$ 对应的是直角坐标平面上的矩形.

1.1.2 逻辑符号

在数学概念和命题的论述中，经常使用以下一些逻辑符号.

符号“$\forall$”表示“任意的”或“任给的”，它是 Any 的第一个字母 A 的倒写；符号“$\exists$”表示“存在”，它是 Exist 的第一个字母 E 的倒写.

例如命题“对任意的正整数 n，存在整数 m，使得 $n+m=0$”，用逻辑符号可以表述为：

$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$\exists m\in\mathbb{Z}$，使得 $n+m=0$.

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴含着”或“推导出”；符号“$\Leftrightarrow$”表示“等价于”或“充要条件是”.

例如命题“若 $a>b,b>c$，则有 $a>c$”，用逻辑符号可以表述为

$$a>b,b>c\Rightarrow a>c,$$

“$x^2-x-2\leqslant 0$ 等价于 $-1\leqslant x\leqslant 2$”，用逻辑符号可以表述为

$$x^2-x-2\leqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 2.$$

1.1.3 有理数集和实数集

实数是有理数和无理数的总称，通常用$\mathbb{Q}$ 表示有理数集，$\mathbb{R}$ 表示实数集.

有理数集

$$\mathbb{Q}=\left\{x=\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}_+,\text{且 }p,q\text{ 互质}\right\}$$

有一些重要性质：

$\mathbb{Q}$ 是一个数域，即任意两个有理数进行加、减、乘、除（零不为除数），运算的结果仍为有理数，或者说有理数集对于四则运算是**封闭**的.

$\forall a,b\in\mathbb{Q}$，下列关系有且仅有一个成立：

$$a<b,\ a>b,\ a=b.$$

我们常用 $a\leqslant b$ 表示 $a<b$ 或 $a=b$，于是 $\forall a,b\in\mathbb{Q}$，则 $a\leqslant b$ 与 $a>b$ 两者必居其一，即有理数是**有序**的.

任意两个不同的有理数之间必定还存在有理数，即 $\forall a,b\in\mathbb{Q}, a<b, \exists c\in\mathbb{Q}$，使得 $a<c<b$. 由此可推知任意两个不同的有理数间存在无穷多个有理数，这个性质称为有理数的**稠密**性.

有理数可以与数轴上的点对应，每个有理数对应于数轴上一点（有理点）. 稠密性意味着数轴上任何一小段内都有无穷多个有理点.

然而有理点并不能充满整个数轴，换言之，在有理点之间有着"空隙". 例如考虑边长为 1 的正方形对角线的长度 a，若在数轴上作出到原点距离等于 a 的点 A（见图 1-1），这个点就不是有理点.

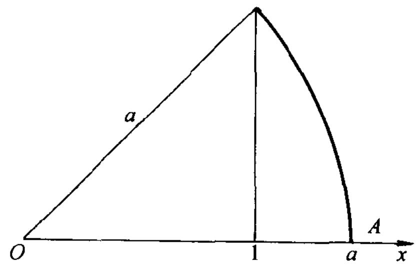

图 1-1

命题 1.1 正数 a 满足 $a^2=2$，则 a 不是有理数.

证 用反证法. 设 a 是有理数，则 $\exists p,q\in\mathbb{N}_+$，且 p,q 互质，使得 $a=\dfrac{p}{q}$，那么 $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2=2$，即 $p^2=2q^2$，于是 p^2 是偶数，故 p 是偶数. 可设 $p=2n, n\in\mathbb{N}_+$，从而 $4n^2=2q^2$ 即 $2n^2=q^2$，可知 q^2 是偶数，故 q 是偶数. 这与 p,q 互质矛盾，从而就证明了 a 不是有理数.

事实上，我们知道数 a 是无理数 $\sqrt{2}$，不难证明任何两个不同的有理数之间都有无理数. 数轴上有理点之外的空隙处的点均表示无理数，因此实数集 $\mathbb{R}$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的扩充.

$\mathbb{R}$ 仍然是一个数域，即它对四则运算是封闭的. 显然实数也是有序的并且有着稠密性.

实数同样可以与数轴上的点对应. 与有理数不同，实数与数轴上的点是一一对应的，即每个实数对应数轴上一个点；反过来，数轴上每个点也对应一个实数. 这意味着与实数对应的点（有理点和无理点）充满了整个数轴，没有空隙，没有间断. 这反映了实数与有理数根本不同的性质，称为实数的**连续性**.

实数的连续性将保证实数集在以后所学的微积分基本运算——极限运算下依然是封闭的.

我们知道实数与数轴上点的对应是通过点的坐标来实现的，在以后的讨论中往往对实数和它所对应数轴上的点不加区别，例如数轴上点的坐标为 x，我们常说点 x 或数 x.

1.1.4 区间和邻域

实数集$\mathbb{R}$ 的子集称为数集，一类常见的数集就是**区间**. 设实数 $a<b$，则

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b, x\in\mathbb{R}\},$$
$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in\mathbb{R}\}$$

和

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b, x\in\mathbb{R}\},$$
$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b, x\in\mathbb{R}\}$$

分别称为开区间、闭区间和半开半闭区间. 上述区间都是有穷区间，另外还有无穷区间，例如

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x,\ x\in\mathbb{R}\},$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b,\ x\in\mathbb{R}\},$$

这里符号“$+\infty$”和“$-\infty$”分别读作“正无穷大”和“负无穷大”.

对于非特定的区间，通常用字母 I 表示.

在以后的讨论中，经常考虑的是以某点为中心的小区间，设 $x_0\in\mathbb{R}$，$\delta\in\mathbb{R}_+$（$\mathbb{R}_+$ 为正实数集），则称 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，x_0 和 δ 分别称为邻域的中心和半径，而称 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为 x_0 的**去心 δ 邻域**，记为 $\dot{U}(x_0,\delta)$. 在不必强调邻域半径时，则将邻域和去心邻域简记为 $U(x_0)$ 和 $\dot{U}(x_0)$.

有时需要考察点 x_0 一侧的小区间，将 $(x_0-\delta,x_0]$、$[x_0,x_0+\delta)$ 分别称为 x_0 的**左、右 δ 邻域**，相应地也可以有 x_0 的**左、右去心 δ 邻域**的概念.

1.1.5 不等式

与实数有关的一些不等式是重要的，首先我们回忆与绝对值有关的不等式：

(1) 若 $\delta\in\mathbb{R}_+$，$x\in\mathbb{R}$，则

$$|x|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x<\delta;$$

(2) 若 $x,y\in\mathbb{R}$,则

$$|x\pm y|\leqslant|x|+|y|,$$

$$|x\pm y|\geqslant||x|-|y||.$$

下面介绍两个重要的不等式.

命题 1.2 (A-G 不等式)若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}_+$,则

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

证 用数学归纳法. 将命题中不等式两边的式子分别记为 A_n 和 G_n,则当 $n=1$ 时

$$A_1=x_1=G_1,$$

结论以等式形式成立;假设当 $n=k$ 时结论成立,即

$$A_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k}=G_k,$$

对 $n=k+1$,不妨假定 x_{k+1} 是这 $k+1$ 个正数中最大的,则有

$$A_{k+1}^{k+1}=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{kA_k+x_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}$$

$$=\left(A_k+\frac{x_{k+1}-A_k}{k+1}\right)^{k+1},$$

利用二项式展开可得

$$A_{k+1}^{k+1}\geqslant A_k^{k+1}+(k+1)A_k^k\left(\frac{x_{k+1}-A_k}{k+1}\right)=A_k^{k+1}+A_k^kx_{k+1}-A_k^{k+1}$$

$$=A_k^kx_{k+1}\geqslant G_k^kx_{k+1}=x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}=G_{k+1}^{k+1},$$

即得

$$A_{k+1}\geqslant G_{k+1}.$$

命题得证.

命题 1.3 (Bernoulli(贝努利)不等式)若 $x\geqslant0,n\in\mathbb{N}$,则

$$(1+x)^n\geqslant1+nx.$$

这个命题的证明比较简单,留给读者作为练习.

1.1.6 数集的界

对数集,我们引进有界的概念.