张棣 编著

# 常微分方程定性理论及应用

西北大学出版社

# 常微分方程定性理论与应用

张　棣　编著

（中国科学院科学基金资助的课题）

西 北 大 学 出 版 社

**常微分方程定性理论与应用**

张　棣　编著

西北大学出版社出版

（西安市小南门外）

陕西省新华书店发行

学院印刷厂印刷

787×1092毫米1／32　印张7.5　字数155千字

1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷

印数1－3,000

统一书号：13320·6　定价：1.60元

## 内 容 简 介

本书是作者多年来教学、科研成果的系统性编著。常微分方程定性理论的特点是不须求解方程即可讨论它的解的性质。前四章分别论述了一般理论、奇点理论、极限环理论和李亚普诺夫运动稳定性的理论，第五章结合作者的研究成果典型地介绍了上述理论在三分子反应模型方面的应用。本书可作为大学数学系本科教材，也可供学过数学分析、线性代数、常微分方程的理工科学生、研究生以及教学人员、科研人员、工程技术人员自学或参考。

# 序　　言

本书是以作者1962年在西北大学数学系讲授专门组课的讲义《微分方程定性理论》为蓝本，经过修改而写成的。其目的是希望能够提供一本微分方程定性理论初步及其应用的教材。

作者主观上希望在加强基础理论知识和取材现代化的同时，努力贯彻理论联系实际的原则，力图作到深入浅出，使掌握数学分析、线性代数、常微分方程的读者都能阅读。第五章专门编写了在三分子反应模型方面的应用。常微分方程定性理论的应用是极其广泛的，三分子模型方面的应用只不过是其中的一个方面。编写这一章的目的，是希望通过作者及其合作者的研究成果，引导读者应用常微分方程定性理论探讨科学研究和四化建设中的实际问题，进一步引起读者对联系实际的兴趣，培养其解决实际问题的能力。

本书初稿曾作为数学系、物理系本科生和研究生选修课教材在西北大学、汉中师范学院等院校试用过。本书在编写过程中，承蒙秦元勋教授热情指导；谢大来、党新益等同志先后作为教材试用并提出了许多宝贵建议；陈燕、樊引水等同志参加了部分章节的修改工作，在此谨致以衷心的谢意。此外，对西北大学出版社的同志所给予的协助，表示感谢。

张　棣

一九八四年七月

# 目　　录

# 绪　　论

运动是物质的固有属性，运动着的物质相互制约，以无限错综的关系联系着。数学是从量的侧面研究物质运动变化客观规律的科学。在数学的研究中经常遇到一些量对另一些量的依存规律是未知的，然而却能够作出它的方程式，这就是泛函方程，泛函方程中很重要的一种是微分方程。很多力学问题、物理学问题和工程技术问题的研究，往往化为对微分方程的解的研究。例如，借助于微分方程，牛顿的力学规律可以用来研究力学系统的运动。举一个简单的例子，设具有质量$m$的质点$M$，在外力$F$的作用下作直线运动，而外力$F$是时间($t$)、质点的位置($x$)和速度$\left(\frac{dx}{dt}\right)$的函数。则描写质点运动规律的函数$x(t)$是微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)$$

的解。这个微分方程是上述力学规律的数学描述。这样，就把研究质点运动的力学问题化为讨论微分方程的解的数学问题。

十九世纪初期，哥西(Cauchy)在相当广泛的条件下严格地证明了常微分方程初值问题解的存在性。然而，实际上人们能够用初等函数的积分表达解的微分方程却是很少的。特别是1941年柳维勒(Liouville)证明了吕卡提(Ricatti)

方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$$

只在特殊情况下，才能用初等函数的积分表达其解。然而，科学研究和实际问题又急需求解微分方程、研究解的性质。这就迫使人们开创并发展了微分方程定性理论。微分方程定性理论不是从事于微分方程的求解或解的近似计算，而是由微分方程本身直接研究解的性质。

继牛顿解决了“二体问题”之后，“三体问题”的求解，在当时具有重大的现实意义和理论意义。太阳、地球和月球在万有引力场下的相对运动是一个具体的“三体问题”。这个问题所归结的微分方程及天体力学的其它问题所归结的微分方程的求解问题，长期得不到解决。为此，H. Poincaré 就开始了微分方程的定性研究，由1881年到1886年先后发表了四篇论文，后编为“微分方程定义的积分曲线”一书。与此同时，A. M. Ляпунов 于1882年到1892年完成了博士论文“运动稳定性通论”。他们两人是微分方程定性理论的创始人。

H. Poincaré 不积分微分方程，而由微分方程本身直接决定它定义的积分曲线的性质，从而得到解的性质。因为一个常微分方程从分析角度研究解的性质，就等于从几何角度研究它所定义的积分曲线的性质。由微分方程直接研究积分曲线的性质，由所得结果再导出关于解的性质的结论，这就是微分方程定性理论的主要方法。但不是唯一的方法。在某些问题上也利用解的有关结论，导出积分曲线的有关结论，有时，两者也互相交错使用。

继H. Poincaré的工作之后，G. D. Birkhoff等继承了他在天体力学上的探讨及与之联系的动力系统的发展。他们的工作，以“动力系统”一书作为总结。到十九世纪初期，天体力学已不如上世纪那么吸引众多学者了。一些学者，对微分方程定性理论产生了一种不正确的看法，他们认为H. Poincaré, A.M.Ляпунов和G. D. Birkhoff等人的工作，已使微分方程定性理论完备了，再也不能向前发展了。与此看法相反，一些数学家、物理学家紧密结合实践，使微分方程定性理论的发展进入了一个新的阶段。

1926年物理学家van der Pol在无线电理论中，讨论了非线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt}+x=0$$

但没有给出严格的数学理论。在无线电技术中需要产生稳定的自激等幅振荡，这种振荡不能由线性系统产生。因此，就迫使人们研究非线性振荡及由此产生的非线性常微分方程。1929年A·A·Андронов在论《Poincaré极限环线和自振理论》一文中指出“自振的问题，就是求极限环线的问题”。这便开启了定性理论的一个重要应用领域—非线性振荡。常微分方程定性理论，从这个领域中取得了丰富的研究对象。奇点、极限环、指数及积分曲线的全局分布等也得到了具体而广泛的应用。这方面的结果集中地汇集在“振动理论”一书。人们在解决实际问题的同时，也将原来的理论大大提高了一步。定性理论与实际相结合，使定性理论得到了全面的发展。1943年以后，微分方程定性理论又引

起了众多学者的重视，相继作出了优异的成绩。三十多年以来，我国数学家在微分方程定性理论方面，无论是理论研究，还是应用研究都作出了重要贡献。

微分方程定性理论是由天体力学“三体问题”求解的要求而发展起来的。以后的发展又是紧密地和力学、物理学或其它工程技术、科学研究结合在一起。生产实践是微分方程定性理论的丰富源泉。目前在我国四化建设中各种新技术如电子技术、自动控制、火箭和人造卫星等各方面工作的开展以及有关学科的科学研究，都要求迅速发展微分方程定性理论。

# 第一章　一般理论

微分方程定性理论通常是不求解而直接研究方程组

$$\frac{dx}{dt}=f_i(x_1,\ x_2\cdots,\ x_n)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1·1}$$

或

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ t)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1·2}$$

的解的性质。本章讲述微分方程的几个一般性定理，这些定理无论对于求解或是对于研究解的性质都是基本的。

## §1　解的存在性定理

**定理1**　对于方程组（1·1）若果

（1）函数$f_i$在$n$维空间（$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$）某有界闭域$\overline{G}$上是连续的；

（2）$f_i$在$\overline{G}$的任一内点处不全等于0（即在开域$G$内不同时等于零）。则对任意指定的$t_0$和$\overline{G}$的内点$A_0(x_{10},\ x_{20},\cdots,\ x_{n0})$，方程组（1·1）至少有一个解

$$x_i=x_i(t)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1·3}$$

存在且满足关系式

（$\alpha$）　　$x_{i0}=x_i(t_0)$

（$\beta$）函数$x_i(t)$的定义区间，至少为

$$t_0-\frac{D}{M\sqrt{n}}\leqslant t\leqslant t_0+\frac{D}{M\sqrt{n}}, \qquad (1\cdot4)$$

其中$D$是从点$A_0$到$\overline{G}$边界的距离，$M$是$f_i$在$\overline{G}$上绝对值的上界，指定的时间$t_0$和点$A_0$叫做原始条件。对于给定的原始条件求方程组（1·1）的解，就是求当$t=t_0$时经过$A_0$点的曲线$x_i=x_i(t)$，使其在所经过的每点处恰好与该点处由方程组（1·1）定义的矢量相切。这种曲线叫做方程组（1·1）的轨线，它的代表函数$x_i(t)$就是（1·1）的解。

为了清楚起见，把定理的证明分为以下三个步骤：

首先，作$t=t_0$时经过点$A_0$的Euler折线，并证明折线的定义区间如（1）所述；

其次，证明该折线是近似轨线，也就是证明该折线的代表函数是近似解；

最后，从一串近似解，求出精确解。

（1）由于$f_i$是$\overline{G}$上的均匀连续函数，故对任意给定的$\varepsilon>0$，有$\delta>0$存在，使$\overline{G}$上任意两点$x_i'$和$x_i''$，只要

$$|x_i'-x_i''|<\delta \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则必

$$|f_i(x_1',x_2',\cdots,x_n')-f_i(x_1'',x_2'',\cdots,x_n'')|<\varepsilon.$$

选定$\delta<D$，作通过$A_0$点的Euler右折线如下：已知$A_0$的的坐标为$(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$，在通过$A_0$的半直线

$$l_0: \ x_i=x_{i0}+f_i(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})(t-t_0) \quad (t\geqslant t_0)$$

上取线段$A_0A_1$，其长不超过$\delta$．设$A_1$的坐标为：

$$x_{i1}=x_{i0}+f_i(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})(t_1-t_0).$$

在通过$A_1$的直线

$$l_1:\ x_i=x_{i1}+f_i(x_{11},x_{21},\cdots,x_{n1})(t-t_1)$$

$$(t\geqslant t_1)$$

上取线段$A_1A_2$，其长不超过$\delta$。如此继续下去，可能发生两种情形：

*a*） 作了$m$步后，在所得的折线$A_0A_1\cdots A_{m-1}B$，其前$(m-1)$段$A_0A_1$，$A_1A_2,\cdots,A_{m-2}A_{m-1}$都完全含于$\overline{G}$之内，但折线$A_{m-1}B$却与$\overline{G}$的边界相交。设$A_m$是这些交点中离$A_{m-1}$最近的那一点（$A_m$可能就是$B$），则折线$A_0A_1\cdots A_m$就是所谓通过$A_0$的Euler右折线，将其方程式简写为：

$$x_i=\overline{x}_i(t),\tag{1·5}$$

其长显然不小于$D$。

*b*） 无论作多少步，所得的折线$A_0A_1\cdots A_{n-1}A_n\cdots$永远在$\overline{G}$内不与其边界相交（例如$A_k$与$A_0$重合，因为$A_0A_1\cdots A_{n-1}A_n$沿着多边形$A_0A_1\cdots A_k$环绕无穷多次）。这种折线的长没有限制，我们任取一段$A_0A_1\cdots A_m$其长不小于$D$，并将其方程式仍简写为(1·5)。

在任一情况中，若假设$A_kA_{k+1}$之长为$\delta_k(\leqslant\delta)$，则必有关系式

$$\delta_k=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x_{1k},x_{2k}\cdots,x_{nk})}\cdot(t_{k+1}-t_k)$$

$$\leqslant M\sqrt{n}\,(t_{k+1}-t_k),$$

因而，有关系式

$$D \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k \leqslant M\sqrt{n}\,(t_m - t_0),$$

即

$$t_m \geqslant t_0 + \frac{D}{M\sqrt{n}}.$$

于是，Euler右折线(1·5)的定义区间至少是

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{D}{M\sqrt{n}}.$$

以上是当$t=t_0$时由$A_0$起，沿$t$的正方向（即$t>t_0$）作右折线。同样，当$t=t_0$时由$A_0$点起，沿$t$的负向（即$t<t_0$）作左折线$A_{-e}A_{-e+1}\cdots A_{-1}A_0$。左折线方程式的定义区间至少是

$$t_0 - \frac{D}{M\sqrt{n}} \leqslant t \leqslant t_0.$$

若设(1·5)是折线$A_{-e}\cdots A_0\ A_m$的方程式，则其定义区间至少是

$$t_0 - \frac{D}{M\sqrt{n}} \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{D}{M\sqrt{n}}.$$

（2）(1·5)式右端的函数$\bar{x}_i(t)$，是(1·1)的$\varepsilon$解。

**定义** 设有$n$个函数$\bar{x}_i(t)$在区间$a \leqslant t \leqslant b$上是连续的分段光滑的，并且满足积分方程组

$$\bar{x}_i(t) = x_{i0} + \int_{t_0}^{t} [\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \cdots \bar{x}_n(t)]dt + \int_{t_0}^{t} \theta_i(t)dt, \tag{1·6}$$

其中$\theta_i(t)$是区间$a \leqslant t \leqslant b$上的分段连续函数，其绝对值小于$\varepsilon$。则$\bar{x}_i$叫做方程组(1·1)的$\varepsilon$解（准确到$\varepsilon$程度的解）。

由于积分方程组(1·6)与附有初始条件$t=t_0, x_i(t_0)=x_{i0}$

的微分方程组

$$\bar{x}_i'(t)=f_i[\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\cdots,\bar{x}_n(t)]+\theta_i(t) \qquad (1\cdot7)$$

等价。因此，研究(1·5)式中的函数 $\bar{x}_i(t)$是否满足方程式(1·6)就归结为考察它们是否满足方程(1·7)。

在(1·5)所表示的折线 $A_{-e}\cdots A_0\cdots A_m$ 上任取一点$B$，为确定起见，假定$B$点在线段$A_kA_{k+1}$上，因为 $A_kA_{k+1}$ 的方程是

$$\bar{x}_i(t)=x_{ik}+f_i(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk})(t-t_k)$$

$$t\geqslant t_k.$$

所以，在$B$点关系式

$$\bar{x}_i'(t)=f_i(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk})$$

成立。

如果令

$$\theta_i(t)\equiv f_i(x_{1k},x_{2k},\cdots,x_{nk})-f_i[\bar{x}_1(t),\cdots,\bar{x}_n(t)],$$

则关系式

$$\bar{x}_i'(t)=f_i[\bar{x}_1(t),\cdots,\bar{x}_n(t)]+\theta_i(t)$$

成立。

因为$B$与$A_k$两点间的距离不超过$\delta$，所以$|\theta_i(t)|<\varepsilon$. 又因

$$f_i[\bar{x}_1(t),\cdots,\bar{x}_n(t)]$$

是连续的且与

$$f_i(x_{1k},\cdots,x_{nk})$$

只有有限个不同的值（Euler 折线只有有限个顶点），所以$\theta_i(t)$是分段连续的。由此，(1·7)式成立。因之，(1·6)式也成立。亦即，$\bar{x}_i(t)$是方程组(1·1)的$\varepsilon$解。

（3）取一串正数$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_k\to0$，对应地作一串$\varepsilon$解$\{x_i^k(t)\}$（$k=1,2,\cdots$），这些$\varepsilon$解的定义区间，显然都

至少是

$$a=t_0-\frac{D}{M\sqrt{n}}\leqslant t\leqslant t_0+\frac{D}{M\sqrt{n}}=b,$$

且在这个区间上$x_i^k(t)$是具有公界而又等度连续的函数族。

实际上，由等式

$$x_i^k(t)=x_{i0}+\int_a^t f_i[x_1^k(t),\cdots,x_n^k(t)]dt+$$

$$+\int_a^t \theta_i^k(t)dt \tag{1·8}$$

得到不等式

$$\left|x_i^k(t)\right|\leqslant A+M\ \frac{2D}{M\sqrt{n}}+\varepsilon_k\frac{2D}{M\sqrt{n}},$$

其中

$$A=\max[|x_{10}|,|x_{20}|,\cdots,|x_{n0}|]。$$

因而，函数族$\left\{x_i^k(t)\right\}$在$a\leqslant t\leqslant b$上具有公共上界。

由等式(1·8)给$t$一个增量$h$，则得到

$$x_i^k(t+h)=x_{i0}+\int_a^{t+h} f_i[x_1^k(t),\cdots,x_i^k(t)]dt$$

$$+\int_a^{t+h}\theta_i^k(t)dt. \tag{1·8'}$$

由方程式式(1·8′)减去方程式(1·8)，得到关系式

$$x_i^k(t+h)-x_i^k(t)=\int_t^{t+h} f_i[x_1^k(t),\cdots,x_n^k(t)]dt$$

$$+\int_t^{t+h}\theta_i^k(t)dt.$$