中南西南税务中专协作教材

经济数学

顾映高 主编

广西教育出版社

经 济 数 学

顾映高　主编

☆

广西教育出版社出版、发行

（南宁市民族大道68号）

广西大学印刷厂印刷

※

开本787×1092　1/32　14.25印张　315千字

1992年7月第1版　1992年7月第1次印刷

印数：1—6000册

ISBN 7-5435-1581-4/G·1229　定价：5.00元

（桂）新登字05号

前　言

教材建设是学校教育基本建设之一。过去税务学校由于未独立设置，因而缺乏一套完整的适合税务专业需要的教材。

面对蓬勃发展的税务专业教育，编写一套适应形势发展需要的教材已是刻不容缓。有鉴于此，我们中南、西南地区10所税务中专学校，经过协商，决定挖掘潜力，充分发挥各校教学力量的优势，调动各方面积极因素，协作编写适应税务专业需要的教材，首批编写的有：经济数学、税务应用文、财政与金融基础知识、会计原理、工业会计、商业会计、工商企业财务管理与分析、税收概论、中国税制、税务管理、纳税检查等11门课程的教材。

编写这套教材的指导思想是：从当前税务专业培养目标出发，根据国家有关指示精神，兼顾成人培训任务的需要，力求突出教材的适应性、科学性，突出税务专业的特点及税务实践的需要，为培养合格的税务中专人才提供必要的条件。

经济数学是税务中专一门重要的基础课及工具课。根据国家教委颁发的《中专数学教学大纲（财经专业通用）》精神，总结税务教育的实践经验，我们在编写中，围绕本专业培养目标，注意基础知识、基本理论的阐述，但更注意在经济领域中的应用，力求使学生在解决问题的能力方面得到更好的培养和训练。本书除了着重讲述一元函数微积分和线性代数基础知识外，为了适应成人教育的需要，还编写了初等数学复习的内容，使本书可广泛适应税务中专、各类成人中

专教育的需要。

参加本书编写工作的有：广东税校强定南（第一章）、顾戊庚（第七章），海南财税学校林承鸿（第二章§2－1、§2—2），湖南税校曹翯筹、王志平（第二章§2—3、§2—4），河南税校李笑芳、吕印蕊、陈洁（第三章），湖北税校伍曙、肖文涓、何玲（第四章），贵州税校周岩（第五章），四川税校张开明（第六章§6—1、§6—2），重庆税校谢建华（第六章§6—3、§6—4、§6—5），广西税校顾映高、陈学安（第八章）。由顾映高担任主编，强定南担任副主编。陈学安为全书的整理加工做了大量的工作。

广西数学学会副理事长、广西师院李忠侯教授非常关心本书的定稿、出版工作，负责主审本书，提出了许多宝贵的意见；广西教育出版社大力支持本书的出版。在此我们谨表示深切的谢意。

我们这次编写的教材是按主编负贵，分工编写的原则。由于成书时间匆促，我们的经验又不足，错误在所难免，恳请读者批评指正。

中南西南税务中专学校
教材编写协作组
1992年2月

目　录

第一章　极限与连续

极限是微积分学中重要的基本概念，极限方法是微积分学的基本方法。本章着重介绍极限概念、性质及运算性质，进而介绍函数的连续性概念。

§1—1　函　数

微积分学研究的对象是函数，过去已学过函数概念，本节将进一步介绍有关的知识。

一、函数概念有关知识

我们已学过函数的定义是：在某一变化过程中有变量x和y，如果对于变量x在其允许值集合D中的每一个值，依照某一对应规律，变量y都有唯一确定的值与之对应，则称变量y是x的函数，记为：

$$y=f(x)。$$

其中变量x叫做自变量，变量y叫做因变量，自变量x的允许值集合D叫做函数的定义域，对应的y值的集合叫做值域。

按照定义所给出的函数是单值函数。如果对于自变量x的一个值，因变量y有多个确定的对应值，那么这种函数叫做多值函数。本书只研究单值函数。

从定义可知，构成函数有两个要素：一是对应规律；二是函数的定义域。两个函数只当它们的这两个要素都相同时

才是同一函数，否则是不同的函数．例如函数$y=\log_a x^2$与$y=2\log_a x$的对应规律相同，但它们的定义域不同，因而不是相同的函数；函数$y=\sin^2 x+\cos^2 x$与$y=1$的定义域和对应规律都相同，因此它们是相同的函数．

表示函数的方法是多种多样的，常用的有列表法、图象法、解析法．应用时常是几种方法同时采用．

变量间的对应关系可用一个式子表示，有些问题需要用几个式子来表示．

例1　某地对年收入不超过20000元的商店按累进制征税，规定年收入8000元以下免税；年收入超过8000元到15000元的部分按15％税率征税；年收入超过15000元到20000元的部分按18％的税率征税，试求应纳税金y与年收入x(元)的函数关系．

解　依题意

当$0<x\leqslant 8000$时，$y=0$；

当$8000<x\leqslant 15000$时，$y=(x-8000)\cdot 15\%$；

当$15000<x\leqslant 20000$时，

$$y=(x-15000)\cdot 18\%+(15000-8000)\cdot 15\%.$$

综上所述，可得年收入x(元)与应纳税金y(元)之间的函数关系式：

$$y=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 8000;\\ 0.15x-1200, & 8000<x\leqslant 15000;\\ 0.18x-1650, & 15000<x\leqslant 20000.\end{cases}$$

例1说明，自变量x和函数y的函数关系可以用两个或两个以上的式子给出，这种函数叫做分段函数．求分段函数的

函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算。

二、求函数的定义域

求函数定义域时，如果所考虑的函数是用解析式给出，那么，它的定义域是能使函数表达式有意义的所有实数的集合。对于实际问题，还应结合问题的实际意义来确定。

例2 求下列函数的定义域：

(1) $y=5x^2+1$；

(2) $y=\dfrac{x^2-3}{x^2-x-6}$；

(3) $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x+9}}$，

(4) $y=\lg(3x-2)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

解 (1)对于函数 $y=5x^2+1$，x 取任何实数时都有意义，所以函数$y=5x^2+1$的定义域为R，即$(-\infty, +\infty)$；

(2)对于函数$y=\dfrac{x^2-3}{x^2-x-6}$，要求分母不能为零，即$x^2-x-6\neq0$，故$x\neq-2$，$x\neq3$。函数的定义域为$x\neq-2$，$x\neq3$ 的所有实数，或表示为$(-\infty, -2)\cup(-2, 3)\cup(3, +\infty)$；

(3)对于函数$y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x+9}}$，要求被开方数$\dfrac{x-4}{x+9}\geqslant0$，解此不等式，得$x<-9$或$x\geqslant4$。所以函数$y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x+9}}$的定义域是：$(-\infty, -9)\cup[4, +\infty)$；

(4)要使函数有意义，x的取值必须同时使$\lg(3x-2)$和$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$有意义，即

$$\begin{cases} 3x-2>0, \\ 4-x^2>0. \end{cases}$$

解此不等式组得$\frac{2}{3}<x<2$.

所以函数$y=\lg(3x-2)+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$的定义域为$\left(\frac{2}{3},\ 2\right)$.

例3　某工厂每日最多可出产品100吨，固定成本为130元，每多生产一吨，成本增加6元，则每日产品的总成本C是日产量x的函数：

$$C=C(x)=130+6x,$$

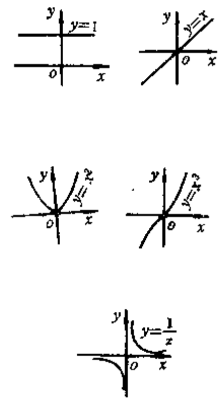
此函数的定义域是：$0\leqslant x\leqslant 100$或$[0,\ 100]$. 它是由问题的实际意义确定的。

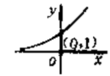
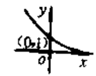
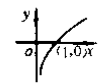
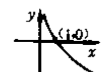
三、初等函数

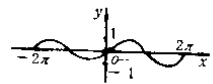
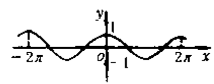
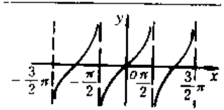
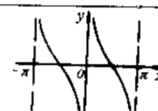
1. 基本初等函数

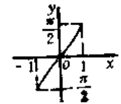
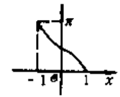
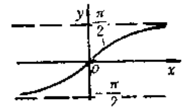
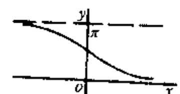
幂函数$y=x^{\alpha}$（α为实数），指数函数$y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$），对数函数$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$），三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

现把基本初等函数的解析式、定义域、值域、图象和主要特性列表如下：

类别	解析式		定义域	值域	图象	特性
幂函数	$y=x^{\alpha}$ α为任何实数	$\alpha=0$ 时 $y=1$	$(-\infty,+\infty)$	$\{1\}$		偶函数 有界函数
		$\alpha=1$ 时 $y=x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加函数
		$\alpha=2$ 时 $y=x^2$	$-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
		$\alpha=3$ 时 $y=x^3$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
		$\alpha=-1$ 时 $y=\frac{1}{x}$	$(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少

类别	解析式	定义域	值域		图象	特性
指数函数	$y=a^x$ $\left(\begin{matrix}a>0\\a\neq 1\end{matrix}\right)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$a>1$		单调增加
				$0<a<1$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $\left(\begin{matrix}a>0\\a\neq 1\end{matrix}\right)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$a>1$		单调增加
				$0<a<1$		单调减少

类别	解析式	定义域	值域	图象	特性 $(k\in Z)$
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		奇函数，周期2π，有界 在$(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$内单调增加 在$(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi)$内单调减少
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		偶函数，周期2π，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少 在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加
	$y=\mathrm{tg}\,x$	$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $k\in Z$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期π 在$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$内单调增加
	$y=\mathrm{ctg}\,x$	$(k\pi,(k+1)\pi)$ $k\in Z$	$(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期π 在$(k\pi,(k+1)\pi)$内单调减少

类别	解析式	定义域	值域	图象	特性
反	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数 单调增加 有界
三	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$		单调减少 有界
角 函	$y=\mathrm{arctg}\,x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		奇函数 单调增加 有界
数	$y=\mathrm{arcctg}\,x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

在实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的，而是通过另一变量联系起来的。

例如，某工厂生产的一种产品，总成本S是产量u的函数：

$$S=f(u)=au^2+bu+c,$$

其中产量u随时间t而变化，其规律为

$$u=\varphi(t)=kt+m.$$

显然总成本S是随时间t而变化的，为此只要将$u=\varphi(t)$代入$S=f(u)$中，得

$$S=f(u)=f[\varphi(t)]=a(kt+m)^2+b(kt+m)+c.$$

（其中a、b、c、k、m均为常数）

这样就把总成本S表示成了时间t的函数，我们称S是t的复合函数。

定义 如果y是u的函数$y=f(u)$，u是x的函数$u=\varphi(x)$，对于在确定范围内的每一个x值，通过u都有唯一确定的y值与它对应，这样便确定了y是x的函数，这个函数叫做由函数$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中u叫做中间变量。

例如，由函数$y=\sqrt{u}$与$u=x^2+1$可复合而成复合函数

$$y=\sqrt{x^2+1}.$$

复合函数的中间变量可以不只一个，例如由函数$y=\sin u, u=3^v, v=\ln x$可复合成复合函数$y=\sin 3^{\ln x}$，这里u、v都是中间变量。

我们不仅要学会把几个函数复合成复合函数，还要善于把复合函数分解成若干个构成它的简单函数。

例4　试把下列各复合函数分解成简单的函数：

(1)$y=\sin^2 x$；　　(2)$y=\arccos\frac{1}{x}$；

(3)$y=\sqrt[3]{\cos x^2}$；　　(4)$y=\mathrm{tg}(\ln\sqrt[3]{x+1})$。

解　(1)函数$y=\sin^2 x$是由函数$y=u^2$和$u=\sin x$复合而成；

(2)函数$y=\arccos\frac{1}{x}$是由函数$y=\arccos u$和$u=\frac{1}{x}$复合而成；

(3)函数$y=\sqrt[3]{\cos x^2}$是由函数$y=\sqrt[3]{u}$，$u=\cos v$，$v=x^2$复合而成；

(4)函数$y=\mathrm{tg}(\ln\sqrt[3]{x+1})$是由函数$y=\mathrm{tg}u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt[3]{t}$，$t=x+1$复合而成。

从本例可以看出，把复合函数分解为简单函数，通常是分解为若干个基本初等函数.

由函数$y=f(u)$与$u=\varphi(x)$复合而成的函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域与函数$u=\varphi(x)$的定义域不一定相同，有时复合函数的定义域只是函数$u=\varphi(x)$的定义域的一部分.

例5　设$y=f(u)=\ln u$，$u=\varphi(x)=\sin x$，那么复合函数$y=f[\varphi(x)]=\ln\sin x$的定义域是

$$D=\{x\,|\,2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in Z\},$$

而函数$u=\varphi(x)=\sin x$的定义域是R.

必须注意：并不是任意两个函数形式地复合起来都可以成为一个复合函数. 例如，函数$y=\ln u$与$u=-(x^2+2)$，如果把它们形式地复合起来成为$y=\ln[-(x^2+1)]$，就不是一个复合函数，因为它没有意义.

3. 初等函数

定义　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有

限次函数复合所构成，且能用一个式子表示的函数叫做初等函数.

例如，函数

$y=2x^3-5x^2+7$，$y=x^3e^x$，$y=\sqrt{x^2-\arccos x}$，

$y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\sin x}$，　$y=\lg\dfrac{x+2}{x-1}$

都是初等函数.

而函数 $y=x^2+x^3+\cdots$不是初等函数，因为它不是由有限次运算而得的.

例6 把下列复合函数分解并求其定义域：

(1)$y=\ln(\cos^2 x)$；　　(2)$y=\arcsin(e^x-1)$.

解 (1)函数 $y=\ln(\cos^2 x)$ 是由函数 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\cos x$复合而成.

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$，因此对函数 $y=\ln(\cos^2 x)$，要求有

$$\cos^2 x>0,$$

使上不等式成立的 x 值应为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，所以，函数 $y=\ln(\cos^2 x)$的定义域是：

$$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in Z.$$

(2)函数 $y=\arcsin(e^x-1)$是由函数 $y=\arcsin u$与 $u=e^x-1$复合而成.

因为函数$y=\arcsin x$的定义域为$[-1,1]$，由此应有

$$-1\leqslant e^x-1\leqslant 1,$$
$$0<e^x\leqslant e^{\ln 2},$$

即
$$x\leqslant \ln 2.$$