

MBA联考300分奇迹

数学分册

第3版

北京大学 尤承业 庄大蔚
北京101中学 郑家俊

编著

北大、清华、复旦三校联手
中国MBA网站鼎力支持
教授领衔，状元加盟，编写阵容强大
全新推出2003年MBA联考整体解决方案

复旦大学出版社

MBA 联考 300 分奇迹

(第三版)

数学分册

尤承业 庄大蔚 郑家俊 编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

MBA 联考300分奇迹. 数学分册/尤承业编著. —3版.
上海: 复旦大学出版社, 2002. 8
ISBN 7-309-03341-8

I. M… II. 尤… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 066747 号

出版发行 复旦大学出版社

上海市国权路 579 号 邮编: 200433

86-21-65118853(发行部) 86-21-65642892(编辑部)

fupnet@fudanpress.com

http://www.fudanpress.com

经销 新华书店上海发行所

印刷 上海第二教育学院印刷厂

开本 787×1092 1/16

印张 25.25

字数 630 千

版次 2002 年 8 月第三版 2002 年 8 月第一次印刷

印数 1-16 000

定价 39.00 元

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社发行部调换。

版权所有 侵权必究

丛书序言

2003 年的 MBA 联考将是 1997 年全国实行 MBA 联考进行改革的一年,但就我国的实情来看,这种改革只能是渐进式的。尽管从 MBA 培养模式的特点来讲,入学录取应当采取更加主观和灵活的方式,更多地考察考生的管理背景、业绩和资质,但在中国现阶段情况下,为了保证公平、公正、公开的原则得以贯彻,GRK 笔试成绩仍然会在相当长的一段时间内对考生的录取起到关键作用,而这正是编者编辑出版这样一套复习丛书的一个大的背景。

自从 1991 年中国首次设立 MBA 学位,1990 年首批批准清华大学等 9 所大学试办 MBA 以来,1994 年批准 8 所,1997 年 56 所,2000 年达到 62 所高校具有培养 MBA 的资格。为了有效地提高 MBA 的招生质量,真正体现务实型学位的生源特点,在全国各试点院校的积极倡议下,并获得了国家教育部和国务院学位办的支持和批准后,从 1997 年起,刚刚起步不久的 MBA 研究生入学开始实行全国联考。这近六年来,一、二月间举行的全国工商管理硕士(MBA)研究生入学联考和十、十一月间举行的全国在职攻读工商管理硕士学位入学考试,强烈地吸引了国内有志投身于管理事业的青年人的注意,也成了国内热度最高的几类考试之一,参加全国联考的人数逐年递增,到 2002 年 1 月份有 5.2 万人参加考试,招生人数近 8 000 人,录取率超过了 6:1,竞争激烈程度一年胜过一年,目前已比统招研究生激烈。

目前这两种 MBA 入学考试方式,都是采用 1996 年设计的 GRK(工商管理硕士入学考试的汉语拼音缩写)的框架,也就是以英语、数学、管理、语文与逻辑考试五科为基础,全国统一命题、统一考试、统一阅卷,目前在录取中也主要以 GRK 成绩作为招生录取的主要依据。将近六年的联考做下来,部分科目的大纲进行过若干调整,但是框架基本是稳定的。由于联考的课程偏多,不利于一些具有丰富实践经验的大龄考生复习备考,为了进一步向国际通行的招收 MBA 的考试方式靠拢,2003 年全国 MBA 指导委员会决定将用综合考试代替数学、语文和逻辑的单科考试,为实践经验丰富的优秀管理人才创造更多的机会。但是,从目前考试的命题情况看,复习备考所起到的作用仍然是非常重要的,对于很多学习基础并不理想的考生来说,甚至是非常关键的。

从近六年的统计数据上看,参加 MBA 入学考试的考生平均年龄有日趋下降的趋势。但由于考生毕竟均已工作多年,日常的工作也非常繁忙,很难抽出足够时间来专门进行复习备考。因此,复旦大学出版社精心组织了一批有经验的教师编写了这样一套针对性强、自学性好的复习丛书。参加本丛书编写的作者队伍包括知名教授、博士以及早期全国联考的状元,他们都是清华大学、北京大学 MBA 考前辅导的主讲教师,具有相当丰富的教学经验,这批教师在这几年的备考辅导工作中也积累了许多有益的经验,编写这套丛书也是希望将这些经验能够与更多的考生分享,使他们受益。

丛书的特点可以概括为“服务考生,精讲精练;全真模拟,适度偏难”,这样的一个指导思想是编者从近六年来 GRK 命题趋势和复习经验中总结出来的。既然强调为考生服务,丛书就不是仅限于作为各院校考前辅导班的辅导参考资料,同时也适合作为应考人员的自学教材。编者也特别反对不切实际的“题海战术”,而是精心编排了针对性强、符合命题趋势的模拟题,作为考生检验自己复习成果并熟悉考试过程的有效工具。突出“适度偏难”,不只是为了让考生准备更充分,也是为了弥补目前各类复习指导教材与考试题目难度差距较大的不足。

为全方位帮助考生应对 MBA 入学考试,丛书编者特别推荐了信息量丰富的 MBA 网站,并将与网站合作为考生提供进一步的增值服务。

最后,衷心祝愿各位考生在努力准备的基础上,有良好的发挥,顺利地考取名校 MBA。

《MBA 联考 300 分奇迹》丛书编写组
2002 年 8 月于复旦大学

目 录

对 策 篇

一、2003 年 MBA 联考数学命题思路全新剖析	1
二、2003 年数学新题型——充分性判断题的解题对策与技巧	3
三、赢在最后——2003 年综合能力测试 180 分钟考场对策	7

精 讲 篇

第一章 初等数学	9
§1 绝对值、比例与平均值	9
§2 代数式运算	34
§3 方程与不等式	54
§4 数列	77
§5 常见的几何图形	94
第二章 微积分	106
* §1 函 数	106
* §2 极限与连续	113
§3 导数与微分	130
§4 微分学的应用	145
* §5 不定积分	159
§6 定积分	173
§7 无穷积分	191
§8 多元函数微分学	196
第三章 线性代数	220
§1 线性代数中最基本的概念	220
§2 行列式	224
§3 矩阵	237
§4 向量组的线性关系	255
§5 线性方程组	268

§ 6 n 阶矩阵的特征向量和特征值	284
§ 7 小结	291
第四章 概率论	294
§ 1 随机试验、随机事件及其概率	294
§ 2 古典概型	295
§ 3 事件的关系与运算	298
§ 4 加法公式	302
§ 5 条件概率与乘法公式,全概公式与贝叶斯公式	307
§ 6 事件的独立关系,独立试验序列	316
§ 7 初等概率论小结	322
§ 8 随机变量及其分布函数	326
§ 9 离散型随机变量的分布律	326
§ 10 连续型随机变量的分布密度	331
§ 11 随机变量的数字特征	340
§ 12 随机变量小结	347

精 练 篇

全真模拟试题(一)	348
全真模拟试题(二)	352
全真模拟试题(三)	356
全真模拟试题(一)解答	360
全真模拟试题(二)解答	368
全真模拟试题(三)解答	376
2002 年全国攻读工商管理硕士学位研究生入学 考试数学试题	383
2002 年全国攻读工商管理硕士学位研究生入学 考试数学试题答案与解析	387

一、2003 年 MBA 联考数学命题思路全新剖析

2003 年把原来的数学、语文与逻辑合并到一起,命名为综合能力科目.综合能力主要测试考生学习 MBA 课程所需要的数学基本知识和运用数学方法分析问题和解决问题的能力、汉语运用能力以及逻辑推理能力.综合能力考试包括问题求解、条件充分性判断、逻辑推理和写作等 4 种题型,满分为 200 分,其中数学部分(即问题求解和条件充分性判断)分值为仍为 100 分.涉及初等数学、微积分、线性代数和概率论等数学基础知识.与 2002 年相比,2003 年的数学命题和考试都呈现出很大的变化:

1. 不同于以往数学考试,新大纲不要求考生对数学知识做系统全面掌握,而是选择考生将来学习 MBA 课程所必需的数学知识点加以考察,根本目的是确保考生入学后在学习与数学相关的经济和管理方面课程时,有足够的数学基础和预备知识.这是新大纲最核心的变化,2002 年大纲虽然也提到了这一点,但在考核知识点的范围上仍然比较宽,有不少数学的知识点,作为未来职业经理人的 MBA 无论上课还是将来做管理都没有可能用到.新大纲删去了不少这样的知识点:

初等数学中的“排列组合”部分与实际的管理问题和 MBA 课程不太搭界,更多的是一种思维和技巧训练,而且题目的技巧性很强,难度比较大,又没什么实际意义,新大纲取消了.

新大纲对微积分部分的斧头是比较锋利的,去掉了“函数、极限、连续”这 3 个大概念,这几个概念是微积分的基石,因而这次删改也引起了部分专家的批评,因为删改之后数学体系就不完整,给人觉得基础没有了.此外,以往的考题中有不少考察极限的计算,也属于技巧性强、但没什么思想,这次下决心去掉了,同时删掉著名的“罗必达法则”也相当于彻底宣布 2003 年的考题决不会出现直接或间接的极限计算题.

微积分部分还删去了“不定积分的概念、性质和计算”,只保留了定积分部分,因为积分学中主要的应用价值在于定积分,而不定积分基本在于概念,那么从新大纲的意图看,“一元积分学”主要考察应用性题目,其中计算性的题目(如求面积等)出的可能性较大,理论性的题目估计会涉及比较少.

代数部分改动很小,几乎没什么变化,只删去了“克莱姆法则”,这类题型比较单一化,主要是判断具体的线性方程组解的性质和结构,2003年不会再出了.实际上在将来学习MBA核心课程——运筹学要用到大量的线性代数的知识.概率论前两年的变化就比较大,之前已经考虑到概率统计在未来的管理学习和管理实践中经常要用到,所以从2001年到2002年已经增加了不少内容,基本到位了,2003年新大纲主要去掉了“伽马分布和对数正态分布”(不常用),还删去了2002年的“离散性二维随机向量”(相对难一点).

相对于减少部分,新增的内容相对较少:初等数学的“常见几何图形”弥补了以往不考察几何、不考察平面和空间的想象能力.线性代数增加了“矩阵的特征值和特征向量的概念和计算”,这绝对是命题必考的知识点,而且代数部分计算多,理论概念少,而特征值和特征向量是非常好的概念,估计在条件充分性判断题目中很可能用到.

2. 考题题量更大、时间更紧,对考生临场发挥提出更高要求.2003年联考新改革之后,虽然数学的题目数未增加,仍为34道,与过去差不多,以前是数学一门3个小时,现在是数学34题、逻辑25题、作文2篇,合起来3个小时,时间太紧张了.从某种程度上来说,谁能在综合能力考试的考场上合理安排时间,谁能够在180分钟内始终保持高速运转的大脑思维、沉着冷静的心理素质、良好的竞技状态,谁就能在竞争中取胜.笔者在后面专门撰文与大家共同探讨在综合能力考场的180分钟内,如何应对考试策略.

3. 2003年的综合能力的数学命题从难度上估计会低于去年,实际上与2001年相比,2002年考题难度高且怪,特别是初等数学较难,这样呈现出难易相间的趋势,笔者去年在《300分奇迹》的第二版曾指出2002年数学考题会偏难,事实证明的确如此.另外本身明年把数学、逻辑、作文2篇搞在一科里,对考生已经是一种很大的挑战.这样操作又是MBA指导委员会首次决定尝试,这样可以确定的是:命题肯定不会难,否则数学部分的平均分不知要掉到什么水平上了(过去一般是40~60分),指导委员会是会考虑风险的.因此2003年命题绝对会以基本概念和基础知识为主,一般不会涉及过于繁杂的计算.因此考生的复习一定不要要求难、求偏、求怪,要注重“双基”训练.

4. 2003年的题目类型有非常大的变化,从形式上来讲,条件充分性判断和问题求解都属于五选一的单项选择题;但实际上,问题求解倒是差不多属于选择题,解选择题的各种招数都可以用.而充分性判断题大家以前都很少见过,是一类崭新的题型,数学能考得怎么样,很大程度上在于考生对充分性判断这种新题型的研究和熟练,笔者在下面的部分专门针对这种题型进行了深入研究和认真分析,给考生提出了针对新题型的应对策略.

二、2003 年数学新题型 —— 充分性判断题的解题对策与技巧

1. 新题型介绍与分析

充分条件:如果命题 A 成立,可以推出命题 B 成立,则称 A 是 B 的充分条件,或者说 A 具备了使 B 成立的充分性.若 A 成立推不出 B 成立,则称 A 不是 B 的充分条件,或者说 A 不具备使 B 成立的充分性.

条件充分性判断题

(解题说明:本类题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论.阅读每小题中的条件(1)和(2)后选择)

A:条件(1)充分,但条件(2)不充分

B:条件(2)充分,但条件(1)不充分

C:条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和(2)联合起来充分

D:条件(1)充分,条件(2)也充分

E:条件(1)和(2)单独都不充分,而且条件(1)和(2)联合起来也不充分

例 1 (条件充分性判断) 等式 $x = 3 - 2x$ 成立

(1) $x = 1$

(2) $x = 0$

注意:本书中所有充分性判断题中的 A、B、C、D、E 5 个选项所规定的含义,均以上述为准,但考生在参加考试时,一定要认真看清楚考题中各选择项的含义,不可想当然的认为考题中各项的顺序与样题肯定一致,以免铸成大错!

设题干为结论 G ,需讨论的条件分别为条件(1),条件(2),条件(1) $\cap$ (2)(即把条件(1)和(2)联合起来),实际上本题型的核心是相对于题干的结论而言,判断所给条件的**强弱程度**,根据所给出的 5 个选择项,按条件强弱的顺序排列依次为:

最强:(1) $\Rightarrow G$ 且 (2) $\Rightarrow G$.即(1)和(2)都能单独推出 G D

次强:(1)和(2)中有一个可推出 G ,另一个推不出 G 来 A 或 B

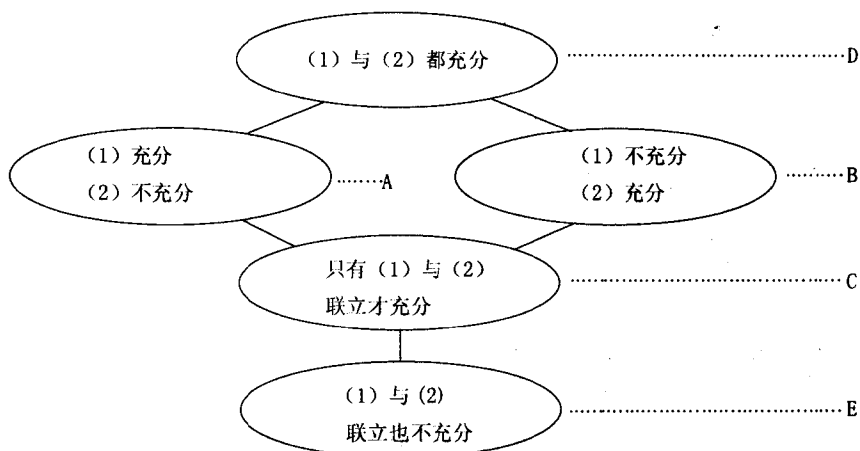
较弱:(1) $\nRightarrow G$ (2) $\nRightarrow G$ 且 (1) $\cap$ (2) $\Rightarrow G$,即只有联合才能推出 C

最弱:(1) $\cap$ (2) $\nRightarrow G$,即使联合也无法推出 G E

根据题目的文字或公式表述的复杂程度可分为 3 类:结论 G 复杂,条件(1)和(2)简单;结论 G 简单,条件(1)和(2)复杂; G , (1), (2) 均为描述性判断,复杂程度相当,实际上类似于简单的逻辑题,稍微有点绕而已.

2. 解题步骤及套路:

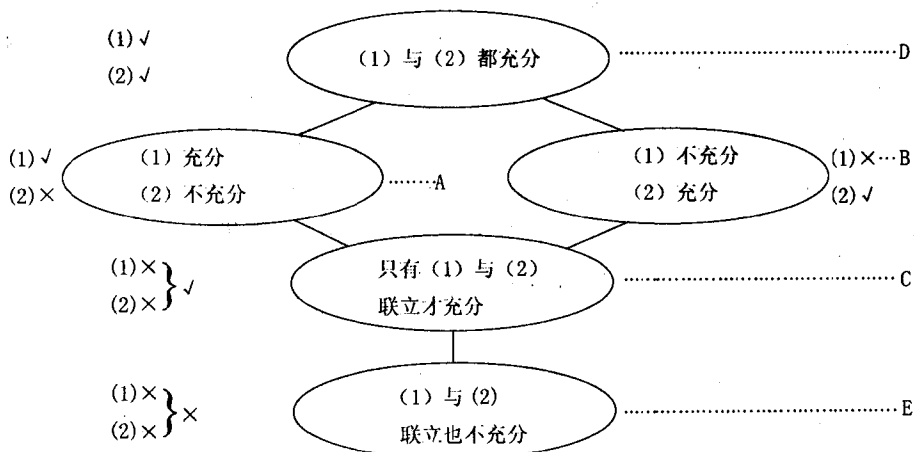
步骤之一:首先认真阅读解题说明的每个字,特别是A、B、C、D、E 5个选择项的含义,与自己平时练习时样题中的A、B、C、D、E 5个选择项的含义与顺序是否一致,然后画出金字塔判断图:



根据上面的金字塔由上到下,对应于题目中给出的条件(即1和2)由强及弱,依次排列.这样可使得考生不至于对于本来会做的题目因为看错A、B、C、D、E而搞错.

步骤之二:具体在解题时,考虑使用如下记号标记:

如(1)G,则在该题的(1)前打“√”,如(1) $\Rightarrow$ G,则在该题的(1)前标“×”;对条件(2)同样处理.而对(1) $\cap$ (2)的标记标在(1)与(2)的两个标号前面用大括号括起来,再打“√”或“×”即可.将上面的金字塔图补充完整为:



步骤之三:有时候可能只标了(1),而怎么也确定不了(2)前面应该是“√”还是“×”,此时应该先放过去,等其他简单题做完之后再回来补,若实在没有时间,还可以有限度地猜一下,比如:若已确定(1)充分,(2)无法确定,可以推出结果只有可能为D或A,选择范围大大缩小,成功率也高达50%.

步骤之四:在第一遍做题时不要匆忙将每道题的选择答案A或B直接填上,这样最容易填错.应该在第一遍时只标“√”或“×”,其他等这18道小题全部看完后再把“√”或“×”翻译成标准答案中的A或B并涂到答题纸上.这样效率高,而且不容易错.

步骤之五:考生如认为这一套解条件充分性判断题的步骤适合自己的话,不妨从现在开始,解这类题型时都严格按这套流程来训练,把这个套路练熟,达到烂熟于心、熟能生巧,这样有了充分的准备,考场上面对充分性判断这类新题型,考生就不会怵头了.

3. 条件充分性判断题的解题技巧

解题技巧之一:直接检验法

将满足条件(1)和(2)分别代入结论G中检验,根据检验结果来判别.也可以抽几个样本试算.

对于前面的例1,就可分别把两个条件代入题干中的等式, $x=1$ 代入得 $1=3-2$ 成立,即(1)充分; $x=0$ 代入得 $0=3-0$ 不成立,即(2)不充分,综合认为应选A.这就是所谓的代入检验法,是直接检验法中最简单的一种,还有样本检验法无法直接从条件出发代入,而是从满足条件的集合中抽取有代表性的样本,再代入题干检验.应该说明的是,样本检验属于不完全检验,不能严格证明,考生应作为辅助办法使用,或实在没办法可以试一试.

解题技巧之二:直接逻辑推理法

有时条件(1),(2)及结论G都是描述性的判断,实际上该类题属于纯逻辑题,可能会有点绕,但比起MBA联考正宗的逻辑题目来说,也是“小巫见大巫”了.因此考生在复习逻辑时要认真准备,因为数学部分的充分性判断题本身就非常需要考生加强在逻辑方面的知识和素养.笔者建议大家看一下《MBA联考300分奇迹》的逻辑分册,很有特色,对解这一类的数学题会有意想不到的帮助.

例2 小李比小张年龄大.

(1) 小张的哥哥今年刚满18岁,可以参加选举了

(2) 小李昨天刚度过了自己的30岁生日

题干中涉及到小李和小张的年龄比较问题,而条件(1)完全不涉及小李,条件(2)完全不涉及小张,因此单独使用(1)或(2)都不能独立推出结论.根据条件(1)的表述,我们可以由小张年龄 $\leq$ 小张哥哥年龄 $=18$ 岁推出小张年龄 ≤ 18 岁,根据条件(2)的表述,

得到小李年龄 = 30 岁;这两个判断联在一起,由小张年龄 ≤ 18 岁 < 30 岁 = 小李年龄可以得到小李年龄比小张年龄大. 即此题应选 C.

解题技巧之三:化繁就简法

有时或者是条件(1)、(2),或者是结论 G,可能表述或形式上比较复杂,不容易看清楚,这时候应该考虑用一些办法化繁就简,更易于比较和推理.事实上,化简以后,题目答案甚至一目了然了.

例 3 $\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = 2$ 成立.

(1) $x^2 + x = 20$ (2) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{3}{2}$

由题目看出,这几个式子都比较繁杂,难以看出彼此关系,通过化简将

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} &= \frac{x^2(x-3) - 4(x-3)}{x^3 - 6x^2 + 5x + 6x - 6} \\ &= \frac{(x^2 - 4)(x-3)}{x(x^2 - 6x + 5) + 6(x-1)} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-5) + 6(x-1)} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x^2 - 5x + 6)} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x+2}{x-1} = 2 \text{ (其中 } x \neq 2 \text{ 且 } x \neq 1),\end{aligned}$$

进一步得 $x = 4$.

对条件(1)化简为 $x^2 + x - 20 = 0$, $(x-4)(x+5) = 0$,得 $x = 4$ 或 $x = -5$.

对条件(2)化简为 $2x^2 + 2x - 4 = 3x^2 - 3x$ (其中 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$),进一步得 $(x-1)(x-4) = 0$,由于 $x \neq 1$,所以 $x = 4$,则(1)不充分,(2)充分.

解题技巧之四:直观画图法

有些题目涉及到集合的相互关系,涉及到空间关系,还有彼此之间循环的逻辑关系等,这类题习惯上比较绕,光在脑子里想着想着就乱了,又得重来,实际上这类题的难度并不大,要养成在纸上画图的习惯,把逻辑关系、空间关系等各种纷繁复杂的关系画出来,就清楚了,找出规律来了.

例 4 设 A、B 为随机事件, $A = B$ 成立.

(1) $P(\overline{AB}) = 0$

(2) $P(\overline{AB}) = 0$

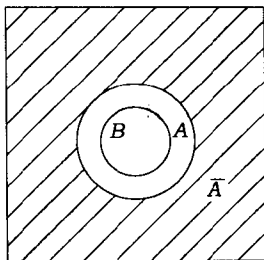
本题如果用计算或推理都很难下手,我们考虑作图.先考虑条件(1),阴影部分为 $\overline{A}$,而 $P(\overline{AB} = 0)$ 即指 $\overline{A}$ 与 B 不相交,则 B 只能躲藏于 A 的内部,这样可以得到 $B \subset A$.同

理根据条件(2)可以得到 $A \subset B$.

显然由 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 可以得到 $A = B$, 即可选 C. 这就是画图的妙用. 脑子里很难想明白的关系, 纸上一画图, 有豁然开朗的感觉, 考生们不妨一试.

解题技巧之五: 证伪排除法

数学上的证伪就是举反例. 比如证明条件(1)充分需要数学上严格的证明, 但如果我们能找出某个例子满足条件(1), 但不满足结论 G, 就可以说条件(1)充分是错误的, 可以立刻把 A 和 D 排除掉. 这样考生的选择范围大大缩小, 进一步可以用其他方法从剩下的 3 个答案中选出正确答案, 实在不行的话, 从 3 个答案中猜一个, 猜中的概率也大大增加了.



例 5 不等式 $x^2 - 4x + 3 < 0$ 成立

$$(1) x - |y - 2| = 5 \quad (2) x = 2$$

对于条件 $x = 2$, 直接代入 $x^2 - 4 \times 2 + 3 = -1 < 0$ 成立, (2) 充分.

对于条件(1), 不好直接解答, 可考虑举反例, 令 $x = 5, y = 0$, 代入原不等式, $5^2 - 4 \times 5 + 3 < 0$ 不成立, 则(1)不充分, 最后结果应选 B.

三、赢在最后——2003 年综合能力测试 180 分钟考场对策

笔者认为, 综合能力考试虽然涉及的内容比以前有所减少, 但实际上减少得并不多, 由于新增了条件充分性判断以及部分新的考试内容, 考生还有一个熟悉适应的过程. 虽然改革的目的是减少考生的备考工作量, 以利于工作负担较重的在职考生备考, 但实际上, 由于 3 个小时的考试强度增加了, 实际上对考生的要求更高了, 考生切不可等闲视之.

从新大纲变化看出, 考生在 2003 年联考中能否取得成功, 关键在于综合科目能否得高分, 因为同样是 180 分钟时间, 综合科目就占了 200 分, 占了整个联考总分的一半, 临场考试的顺利或闪失, 就会使考分的差距拉得非常大, 可以说 2003 年的联考形势必将是“得综合科目者得天下”.

2003 年 MBA 联考的综合科目肯定是考试最紧张的一门, 考试中是先做数学、语文还是先做逻辑?

按样卷的结构来看, 试题顺序先是数学的两类题型——条件充分性判断和问题求解; 然后是逻辑推理; 最后是写作文.

对于做题顺序, 我们认为一般来说还是按卷面结构顺序来做题为好, 即先做数学, 再做逻辑, 最后做作文. 当然考生根据自己的实际情况来灵活调整, 比如也可以乘头脑清醒先做逻辑, 再做数学, 先做数学或先做逻辑都是可以的, 但我们还是建议写作放到最后为

好,因为写作的调控余地较大,时间多可以写得认真些,时间少可以相对快点写.

建议各个部分按分值比例所占用的时间分别是:数学 90 分钟、逻辑 45 分钟、写作 45 分钟.但建议考生按照数学 85 分钟、逻辑 40 分钟、写作 45 分钟分配,留出最后 10 分钟检查整理.一般来说,平时训练时应该严格按照这个时间分配,当然具体应试策略还可以考虑更仔细一点,就是每位考生要根据自己的实际情况,以及实际的卷子难度分布加以灵活调整,总的来说,必须很好地衡量数学、逻辑与写作三者得分上的边际收益,必要时也不妨牺牲某一部分的时间来争取总体上的更多得分.

(注:本书题目的答案均为参考答案。)

第一章 初等数学

§1 绝对值、比例与平均值

1.1 充分条件

【基本概念与知识点】

1. 定义 对两个命题 A 和 B 而言,若由命题 A 成立,肯定可以推出命题 B 也成立(即 $A \Rightarrow B$ 为真命题),则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件.

2. 条件与结论 两个数学命题中,通常会有“条件”与“结论”之分,若由“条件命题”的成立,肯定可以推出“结论命题”也成立,则称“条件”充分.若由“条件命题”不一定能推出.(或不能推出)“结论命题”成立,则称“条件”不充分.

例如:不等式 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立.

(1) $1 < x < 3$

(2) $x > 7$

(3) $x = 5$

(4) $x < 6$

(5) $-1 < x < 6$

此例中,题干“ $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立”,这个命题是“结论”,下面分别给出了 5 个命题都是不同的“条件”.现在我们可以把它们按充分与否分为两类:条件(1)、(3)、(5)充分.条件(2)、(4)不充分.

【知识点评述】

1. 充分条件的判断:从给定的条件出发去分析,在此条件下,结论是否一定成立,若是,则条件充分,若否,则条件不充分.我们在做充分性判断的试题时,不可从“结论”入手去求解!那样只能得出“条件”对“结论”的“必要性”而与充分性判断相背离.如:在上例中,由结论命题: $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立,可解得 $-1 < x < 6$,这只证明条件(5)是必要的,事实上,条件(5)是结论 $x^2 - 5x - 6 < 0$ 能成立的充分必要条件,才“歪打正着”被你找到了一个充分条件.

2. 充分性判断的标准化试题:本讲义中,所有充分性判断题的 A、B、C、D、E 五个选项所规定的含义,均以下列呈述为准,即:

(A) 条件(1)充分,但条件(2)不充分;

- (B) 条件(2) 充分,但条件(1) 不充分;
 (C) 条件(1) 和(2) 单独都不充分,但条件(1) 和(2) 联合起来充分;
 (D) 条件(1) 充分,条件(2) 也充分;
 (E) 条件(1) 和(2) 单独都不充分,条件(1) 和(2) 联合起来也不充分.

上述5个选项,把条件(1) 和(2) 以及两条件联立起来(同时都满足即 $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$)的充分性的所有情况都包括了,但其中“联合”不是数学名词,没有准确的定义,改为“联立”与原题意比较贴切.比如:不等式 $x(6x+5) < 4$ 成立.

$$(1) x > -1 \qquad (2) x < \frac{1}{3}$$

从条件(1) 不难看出 x 的取值无上限, $x(6x+5)$ 的值当 $x \rightarrow +\infty$ 时必有 $x(6x+5) \rightarrow +\infty$,原不等式不可能恒成立.

从条件(2),可取 $x = -2$,代入不等式:

左边 $= -2(-12+5) = 14 >$ 右边,原式不能成立.

从 $x(6x+5)$ 也可看当 x 取足够小的负值时.

$x(6x+5)$ 为正值且无上限

所以条件(1) 和(2) 都不充分,但条件(1) 和(2) 联合起来即 $\begin{cases} x > -1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}$ 时,原不等式成立.

即联合起来充分.

因为 $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 这个区间,是原不等式解集 $X = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 的一个真子集,肯定可以使不等式成立.因此,此题的答案是C.

常用的求解方法有以下几种:

解法一 直接法(即由A推导B.)

若由A可推导出B,则A是B的充分条件;若由A推导出与B矛盾的结论,则A不是B的充分条件.解法一是解“条件充分性判断”型题的最基本的解法,应熟练掌握.

例1 要保持某种货币的币值不变.

(1) 贬值10%后又升值10%;

(2) 贬值20%后又升值25%.

分析 设该种货币原币值为 a 元($a \neq 0$).

由条件(1) 经过一次贬值又一次升值后的币值为:

$$a(1-10\%) \cdot (1+10\%) = a \cdot 0.9 \cdot 1.1 = 0.99a.$$

显然与题干结论矛盾.

所以条件(1) 不充分.

由条件(2) 经过一次贬值又一次升值后的币值为: