

高等数学双基训练

• 典型计算 •

勒·阿·库兹涅佐夫著

王 犁 苗 桦 译

宋 荣 董 欣 校

丁丁

中南工业大学出版社

高等数学双基训练

• 典型计算 •

勒·阿·库兹涅佐夫著

王 犁 苗 桦 译

宋 荣 董 欣 校

中南工业大学出版社

高等数学双基训练

• 典型计算 •

勒·阿·库兹涅佐夫 著

王犁 苗桦 译 宋荣 董欣 校

责任编辑 田荣璋

*

中南工业大学出版社出版发行

长沙市郊大华印刷厂印刷

湖南省新华书店经销

*

开本 850×1168 1/32 印张: 9.625 字数: 277千字

1987年3月第一版 1987年3月第一次印刷

印数: 00001—10000

*

ISBN 7-81020-026-7/O·004

统一书号: 13442·018

定价: 2.60

内 容 简 介

本书译自勒·阿·库兹涅佐夫所著《高等数学习题集（典型计算）》（1988年）一书。

全书共十章，包括极限、微分法、积分法、重积分、级数、微分方程、线性代数等。书中各章按理论问题、理论练习和计算作业这样三个栏目编写的，与国内现有的同类习题集相比，其特点是取材紧扣基础知识，突出能力培养，选题典型配套，便于集中训练。它既适用于各类高等院校师生参考，也是广大自学青年的良师益友。

前 言

学生的独立数学作业，是使他们理解原理，掌握方法的一项重要措施。目前苏联实行的高等数学典型计算系统，正象在国内许多高等技术学校试验时所表明的那样，它有助于活跃学生的独立作业，促进学生深入地钻研高等数学教材。1979年，苏联高等教育部教学法委员会颁布的工科用高等数学大纲，已建议使用典型计算系统。

各类典型计算系统都包括三个栏目：理论问题，理论练习和计算习题。理论问题和理论练习对所有学生通用，而计算习题（每道题有31种方案），则是针对不同专业的学生编写的。

学生所完成的典型计算，应由教师进行检查。预先查看理论问题和练习的解答正确与否，待在结束阶段才进行典型计算的答辩考核。考核时，学生应能正确地回答理论问题，解算理论练习和习题，求解同类型的一些题目。

本书反映了莫斯科动力学院的许多教学经验。该校提出的高等数学典型计算系统方法，已从1971~1972学年开始被成功地加以利用。目前，除布置传统的数学作业外，莫斯科动力学院的大学生在每个学期内都要完成数学分析方面的两个典型计算系统，第一个学期就要完成解析几何和线性代数这样两个典型计算系统。学生所作的习题，将随着课程的进度按单元检查。初次考核，是以书面形式按作业时数进行（通常为一个学时）。再次考核，是在课时之外采用书面形式或座谈方式，这要由教师酌情处

11A6560

理。

本书作者 Л. А. 库兹涅佐夫副教授指导了典型计算的编写工作。А. Ф. 列费罗娃, В. П. 皮库林, А. С. 加里宁给此项工作很大帮助。莫斯科动力学院数学教研室的许多教员都参加了本书的编写工作。В. В. 扎里诺夫, В. А. 伊留什金, Н. К. 科兹洛娃, Р. Ф. 萨利赫贾诺夫和 Г. А. 索科洛夫等人都极其热情而又卓有成效地工作过。典型计算系统的应用, 在诸多方面得力于莫斯科动力学院高等数学教研室主任 С. И. 波霍扎耶夫教授关心。

在准备出版中, 一级教员 В. П. 皮库林在提供解析几何和线性代数资料方面, 给作者以巨大帮助。作者非常感谢 П. А. 什梅廖夫副教授对许多理论练习所提的建设性意见, А. И. 普科斯副教授在编写附录方面所作的工作。同时感谢 А. И. 普利列普科教授, С. М. 波诺马廖夫副教授和 Б. Ю. 斯捷尔宁副教授在审稿时所提的有益意见。

目 录

1. 极限.....	(1)
2. 微分法.....	(31)
3. 图形.....	(63)
4. 积分法.....	(75)
5. 微分方程.....	(110)
6. 级数.....	(131)
7. 重积分.....	(158)
8. 矢量分析.....	(197)
9. 解析几何.....	(226)
10. 线性代数.....	(250)
附录	(276)

1 极 限

理 论 问 题

1. 数列及其极限的概念, 关于收敛序列有限性的定理.
2. 函数在一点处的极限概念, 局限在点之邻域内的函数概念, 关于函数极限存在的有界性定理.
3. 关于对不等式取极限的定理.
4. 关于区间函数极限的定理.
5. 函数连续的概念, 证明函数 $\cos x$ 的连续性.
6. 第一个著名极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
7. 无穷小函数的概念, 关于函数, 它的极限和无穷小之间关系的定理.
8. 关于无穷小函数之和的定理.
9. 关于无穷小函数和有界函数之积的定理.
10. 关于无穷小函数与存在非零极限的函数之比的定理.
11. 关于和的极限定理.
12. 关于积的极限定理.
13. 关于商的极限定理.
14. 关于对连续函数取极限的定理.
15. 和、积和商的连续性.

16. 复杂函数的连续性。
17. 无穷大函数的概念。关于无穷大函数和无穷小函数关系的定理。
18. 无穷小函数的比较。
19. 等价无穷小函数。关于用等价函数代替无穷小函数的定理。
20. 无穷小函数的等价条件。

理 论 练 习

1. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ 。由存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$, 能推出存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 吗?

提示 证明并利用不等式

$$||b| - |a|| \leq |b - a|$$

2. 证明序列 $\{n^2\}$ 发散。
3. 试用《 ε — δ 》语言陈述命题: 数 A 不是函数 $f(x)$ 在点 x_0 , 而是在点 x_0 邻域内定义的极限。
4. 证明: 若 $f(x)$ 是连续函数, 则 $F(x) = |f(x)|$ 也是连续函数, 逆命题真否?
5. 试用《 ε — δ 》语言陈述命题: 在点 x_0 邻域内有定义的函数 $f(x)$, 在此点连续。
6. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ 不存在。证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \varphi(x)$ 不存在。

提示 容许反证, 利用商的极限定理。

7. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在极限, 函数 $\varphi(x)$ 不存在极限。
极限

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + \varphi(x)]; \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \varphi(x)$$

是否存在?

研究例子: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

8. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$, 函数 $\varphi(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时无穷大. 证明 $f(x) \varphi(x)$ 之积在 $x \rightarrow x_0$ 时是无穷大函数.

9. 函数 $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是否无穷大?

10. 设 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha'(x) \sim \alpha(x)$ 和 $\beta'(x) \sim \beta(x)$. 证明: 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 同样不存在.

计 算 作 业

【习题1】证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (规定 $N(\varepsilon)$).

1.1. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}$.

1.2. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, a = 2$.

1.3. $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, a = \frac{7}{2}$.

1.4. $a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, a = \frac{2}{3}$.

1.5. $a_n = \frac{7n-1}{n+1}, a = 7$.

1.6. $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, a = \frac{4}{3}$.

1.7. $a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, a = -\frac{1}{2}$.

1.8. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, a = 2$.

1.9. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2}$.

1.10. $a_n = -\frac{5n}{n+1}, a = -5$.

1.11. $a_n = \frac{n+1}{1-2n}, a = -\frac{1}{2}$.

1.12. $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}, a = \frac{2}{3}$.

1.13. $a_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}, a = -2$.

1.14. $a_n = \frac{3n^2}{2-n^2}, a = -3$.

1.15. $a_n = \frac{n}{3n-5}, a = \frac{1}{3}$.

1.16. $a_n = \frac{3n^3}{n^3-1}, a = 3$.

$$\begin{aligned}
1.17. a_n &= \frac{4+2n}{1-3n}, a = -\frac{2}{3}. & 1.18. a_n &= \frac{5n+15}{6-n}, a = -5. \\
1.19. a_n &= \frac{3-n^2}{1+2n^2}, a = -\frac{1}{2}. & 1.20. a_n &= \frac{2n-1}{2-3n}, a = -\frac{2}{3}. \\
1.21. a_n &= \frac{3n-1}{5n+1}, a = \frac{3}{5}. & 1.22. a_n &= \frac{4n-3}{2n+1}, a = 2. \\
1.23. a_n &= \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2}. & 1.24. a_n &= \frac{5n+1}{10n-3}, a = \frac{1}{2}. \\
1.25. a_n &= \frac{2-2n}{3+4n}, a = -\frac{1}{2}. & 1.26. a_n &= \frac{23-4n}{2-n}, a = 4. \\
1.27. a_n &= \frac{1+3n}{6-n}, a = -3. & 1.28. a_n &= \frac{2n+3}{n+5}, a = 2. \\
1.29. a_n &= \frac{3n^2+2}{4n^2-1}, a = \frac{3}{4}. & 1.30. a_n &= \frac{2-3n^2}{4+5n^2}, a = -\frac{3}{5}. \\
1.31. a_n &= \frac{2n^3}{n^3-2}, a = 2.
\end{aligned}$$

【习题2】计算数列的极限:

$$\begin{aligned}
2.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}. & \quad 2.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}. \\
2.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}. & \quad 2.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}. \\
2.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}. & \quad 2.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^3}{(n-1)^3 - (n+1)^3}. \\
2.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}. & \quad 2.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}. \\
2.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}. & \\
2.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3} & \\
2.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}. & \quad 2.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}. \\
2.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}. & \quad 2.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.15. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}. & 2.16. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}. \\
2.17. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}. \\
2.18. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^4}{(n+6)^3 - (n+1)^3}. \\
2.19. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}. \\
2.20. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}. \\
2.21. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}. & 2.22. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}. \\
2.23. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}. & 2.24. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}. \\
2.25. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}. & 2.26. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}. \\
2.27. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}. & 2.28. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^3 - 3n}. \\
2.29. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}. & 2.30. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}. \\
2.31. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}.
\end{aligned}$$

【习题3】计算数列的极限。

$$\begin{aligned}
3.1. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{5}}/5n^2 + \sqrt[4]{9n^3+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}. \\
3.2. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}. & 3.3. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n-1}}. \\
3.4. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}} + n + 1 - n}. & 3.5. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[5]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n} - n}. \\
3.6. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}/n - \sqrt[3]{27n^8+n^2}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt{9+n^2}}. & 3.7. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}.
\end{aligned}$$

- 3.8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt{n-2}}$ 3.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^6+1}}{\sqrt[3]{4n^6+3} - n}$
- 3.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}$
- 3.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n + \sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$
- 3.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^6-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}$ 3.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[3]{n^6+3} + \sqrt{n-3}}$
- 3.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}$ 3.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^6+n}}$
- 3.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$ 3.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^6+5} + \sqrt{n}}$
- 3.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[3]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}$ 3.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^8}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1} - 5n}$
- 3.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^6+5}}$
- 3.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[4]{11n} + \sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$
- 3.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}}$ 3.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^7+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[3]{n^7+5} + \sqrt{n-5}}$
- 3.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4} - n + 1}$ 3.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[5]{n^6+2}}$
- 3.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6+9}}{(n - \sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}$ 3.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} - \sqrt[4]{n^3+1}}$
- 3.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8+6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[3]{n^8+3} + \sqrt[4]{n-6}}$ 3.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2} - n}$
- 3.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^6+1}}$ 3.31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{n} + \sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}$

【习题4】计算数列的极限。

$$4.1. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}).$$

$$4.2. \lim_{n \rightarrow \infty} n[\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}].$$

$$4.3. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}.$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)} - \sqrt{n^4-9}].$$

$$4.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6-8} - n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}.$$

$$4.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - n).$$

$$4.7. \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{4-n^3}).$$

$$4.8. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n^2-2n+3}]?$$

$$4.9. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n+2)(n+1)} - \sqrt{(n-1)(n+3)}].$$

$$4.10. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2[\sqrt{n(n^4-1)} - \sqrt{n^6-8}].$$

$$4.11. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{5+8n^2} - 2n).$$

$$4.12. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{3+n^3}).$$

$$4.13. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-5)^2}].$$

$$4.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$$

$$4.15. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-3}).$$

$$4.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}).$$

$$4.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n^5+9)} - \sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}.$$

$$4.18. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n).$$

$$4.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}).$$

$$4.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}.$$

$$4.21. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}].$$

$$4.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}.$$

$$4.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)}-\sqrt{n^6-1}}{n}.$$

$$4.24. \lim_{n \rightarrow \infty} [n-\sqrt{n(n-1)}].$$

$$4.25. \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 [\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{(n^6-1)}].$$

$$4.26. \lim_{n \rightarrow \infty} [n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}].$$

$$4.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} [\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}].$$

$$4.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}).$$

$$4.29. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}).$$

$$4.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}).$$

$$4.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}.$$

【习题5】计算数列的极限。

$$5.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$5.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}.$$

$$5.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right].$$

$$5.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}. \quad 5.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$$

$$5.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}.$$

$$5.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3} - n \right].$$

$$5.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}.$$

$$5.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}.$$

$$5.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)!(n-1)!}. \quad 5.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}.$$

$$5.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}}.$$

$$5.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3+5-7+9-11+\cdots+(4n-3)-(4n-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+n+1}}.$$

$$5.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n}{n}.$$

$$5.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+5} - \sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}. \quad 5.16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}.$$

$$5.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+2}{1+2+3+\cdots+n} - \frac{2}{3} \right].$$

$$5.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \cdots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} \right).$$

$$5.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5+4-7+\cdots+2n-(2n+3)}{n+3}.$$

$$5.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}. \quad 5.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n-n^2+3}.$$

$$5.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2+7+12+\cdots+(5n-3)}.$$

$$5.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{16} + \frac{9}{64} + \cdots + \frac{1+2^n}{4^n} \right).$$

$$\begin{aligned}
5.24. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+4+6+\cdots+2n}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}. \\
5.25. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+5+9+13+\cdots+(4n-3)}{n+1} - \frac{4n+1}{2} \right]. \\
5.26. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}. \quad 5.27. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}. \\
5.28. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}. \\
5.29. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\cdots+3n}{n^2+4}. \\
5.30. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \cdots + \frac{2^n+5^n}{10^n} \right). \\
5.31. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4+\cdots+2n}{n+3} - n \right).
\end{aligned}$$

【习题6】计算数列的极限。

$$\begin{aligned}
6.1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n. \quad 6.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}. \\
6.3. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}. \quad 6.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}. \\
6.5. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1} \right)^{n^2}. \quad 6.6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1} \right)^{-n+1}. \\
6.7. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1} \right)^{n/2}. \quad 6.8. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-10}{n+1} \right)^{8n+1}. \\
6.9. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n-7}{6n+4} \right)^{3n+2}. \quad 6.10. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7} \right)^{2n+5}. \\
6.11. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n+1}{n^2+n-1} \right)^{-n^2}. \quad 6.12. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3} \right)^n. \\
6.13. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}. \quad 6.14. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3} \right)^{n^3}. \\
6.15. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1} \right)^{2n+3}. \quad 6.16. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1} \right)^{-n^2}. \\
6.17. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n+4}. \quad 6.18. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3-1} \right)^{2n-n^2}.
\end{aligned}$$