多学科学术讲座丛书

4

光纤理论

叶 培 大 著

多学科学术讲座丛书

光纤理论

叶培大著

知识出版社

1985·6·上海

责任编辑：陈荣乐

封面设计：张苏予

多学科学术讲座丛书

4

光纤理论

叶培大著

知识出版社出版

（上海古北路650号）

新华书店上海发行所发行　上海海峰印刷厂印刷

开本850×1168毫米 1/32　印张8.25　插页2　字数220,000

1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

印数：1—5,500

书号：13214·1023　　定价：1.90元

内 容 提 要

光纤通信最近几年飞速发展，成为当今新技术革命的主要领域之一。要研究和开阔光纤通信的前景，就必须掌握和运用光纤理论。

本书作者是我国光纤通信方面的权威。作者结合国外最新文献和本人的研究成果，编著了这本易于阅读的光纤传输理论的专著。其内容包括多模光纤的模式理论、耦合模理论、微弯理论、噪声理论与单模光纤的基本分析、极化光学、色散理论、微弯及极化噪声理论等。

本书适用于光纤通信、激光、电磁场理论及微波技术等专业科技人员、大专院校师生、研究生和这些领域的爱好者。可供教学和科研工作的参考，也可作为大学生、研究生及有关讲习班的教材。

作者职务

北京邮电学院院长、教授
中国科学院技术科学部学部委员
国务院学位委员会[电子学与通信]学科组召集人
国家科委光纤通信专业组顾问
邮电部光纤通信开发中心顾问
中国通信学会常务理事、微波通信专业委员会主任委员

序　言

1982年冬，参加中国人民政治协商会议全国委员会五届五次会议的民盟小组委员，讨论如何开发盟内智力资源的问题，研究了由民盟中央发动盟内力量，筹备组织全国性的多学科学术讲座的倡议，深得与会委员的积极响应。随后中国民主同盟中央常务委员会决定从1983年暑期开始举办多学科学术讲座，并责成民盟中央文教委员会和科技委员会主持具体工作。经过半年的努力和筹备，讲座于1983年6月12日开学，开学典礼由民盟中央副主席楚图南同志主持，中共中央统战部杨静仁部长、李定副部长亲临指导。李定同志在讲话中肯定了民盟中央举办多学科学术讲座的重要意义，他指出，这不仅符合民盟盟员拥有大量学有专长的专家学者的智力集团的特点，而且也是民主党派工作中的一个创举，深得全国学术界的重视，是党的知识分子政策的胜利。知识分子通过讲座的形式，积极主动地把自己的智慧贡献给祖国的社会主义建设事业，反映了知识分子在党的教育下的又一次觉醒。

民盟中央1983年举办的讲座，分10个专题，每题十讲，每一专题，一般由主讲教授一人负责，也有少数专题由两位或三位主讲教授共同负责。听讲者一千余人。他们来自全国各地，有不少

人本身就是专家教授，有的已年逾花甲仍孜孜不倦为四化远涉千里来到北京，和中青年共同学习和学术交流，这也是前所少见的现象，具体地反映了党中央自三中全会以来的正确领导，动员了千百万知识分子，初步实现了团结奋斗的新局面。

1983年的讲座内容，涉及人文科学、社会科学和自然科学的一些方面。人文科学方面有朱光潜、黄药眠、常任侠三位教授的《美学和中国美术史》，吴组缃和张毕来教授的《谈红楼梦和红学四论》，商承祚、陆宗达教授的《中国文字学和训诂学》。在社会科学方面，有关梦觉教授的《陈云同志的经济思想》，千家驹教授的《中国经济问题》及徐铸成教授的《新闻艺术》。在自然科学方面，有马大猷教授的《语言通信》，叶培大教授的《光纤理论》，钱伟长教授的《广义变分原理》等。准备在1984年参加讲座的主讲教授有唐敖庆、余瑞璜、张文佑、费孝通、陶大镛等20余位。

1983年主讲教授14人，平均年龄76岁，最高年龄86岁。他们以年逾古稀的高龄，冒着酷暑，一丝不苟地为学员认真讲解，亲切座谈，深受广大学员的欢迎和爱戴。

这次讲座努力贯彻了百家争鸣的学术方针，提倡严肃的学术民主。主讲教授都能在尊重不同意见的同时，深入透彻地讲解自己的学术观点，有些主讲教授对那些学术上的不正之风，进行了认真、严肃而又满腔热忱的批评和教育。这反映了老一辈学者对当前学术界不正之风的否定而又负责的态度。殷切期望我们的中青年学术接班人，发扬良好学风。有的主讲教授就在同一讲座上，以友好的态度各自讲解分析了双方不同学术观点的矛盾，而不以自己的观点强加给对方，更不以自己的观点来打倒别人的不同观点。这样就能以人之长补己之短，就能达到不同观点的相互融化，逐步走上更高水平的学术境地，从而更有利于为我国社会主义建设服务。

讲座的讲解，都是各主讲教授长期或毕生从事的学术工作，还

有的是当前在四化建设第一线战斗岗位上总结提出的主要贡献。主讲人对讲稿都做了充分的准备，在讲座中又通过听讲学者的学习讨论，再次进行增删修改，才最后定稿。现蒙知识出版社编为丛书，按讲题分别出版。希望本丛书对于我国学术工作，产生有益的影响。

钱 伟 长

1983年7月26日于北京

前 言

本书系综合国外近期文献和本人与林金桐同志等的研究工作而成，也吸收了研究生王开斌、肖子英、潘秀雯等同学的研究成果。

本书水平系在拙作《光波导技术基本理论》上，提高一步。

本书内容包括多模光纤的模式理论，耦合模理论、微弯理论、噪声理论与单模光纤的基本分析、极化光学、色散理论、微弯及极化噪声理论。最后简述了多模和单模光纤的衰减问题。

本书经过两届研究生参考和修改。

民盟中央举办的多学科学术讲座中的“光导纤维”讲座，以本书作为教材，事后再一次作了修改。但是由于作者水平有限，错误与不妥之处必然不少，敬请读者批评指正。

本书许多公式由林金桐同志推导和校对。

本书可供大学有关专业(电磁场、微波、光通信、应用数学、应用物理等)的教师、研究生、高年级学生以及科研机关的科研人员等参考。

叶 培 大

北京邮电学院

1983 年 8 月

目　录

第一章　多模光纤的基本理论

§1 引　　言

到目前为止，多模光纤仍然是被广泛采用的光纤。单模光纤的研究、发展工作和实验系统，在加速进行。但是由于各自的特点不同，应用的领域和各方面的要求不同，一种光纤不可能代替另一种光纤，因此，学习、研究和改进多模光纤仍然有重要的意义。

严格说来，光纤传输多模还是单模，是按照工作波长和光纤尺寸而定，与光纤的折射率剖面没有必然的关系。但是习惯上，提到多模光纤，不但联想到它的尺寸大(例如芯子直径为 50 微米，敷层直径为 125 微米等)，而且因为要减小模式之间的色散，折射率剖面需要缓慢变化，需要良好的聚焦性能。所以，我们这里所要讨论的多模光纤是折射率渐变的光纤。

对于多模光纤有很多问题应该研究。最基本的是模式分析。对此，拙作里[1]已有一定的论述，包括射线法、WKB 法，在附录里也阐述了一种标量近似方法。此外，在拙作里，也介绍了多模光纤的色散问题。但是还有很多不足之处，本章将集中讨论模式分析问题，作为补充。

本章将阐述另一种标量近似解法、变分法、幂级数法以及精确数值计算法。

多模光纤的经典模式耦合理论、微弯理论和模式噪声问题，将分别在本书第二、第三和第四章里阐述。

§2　无穷似透镜媒质里的标量近似解[2]

2-1　标量 Helmholtz 方程和它的解法

我们假设光纤芯子无穷，或者光纤折射率分布用一种规律延

伸到无穷，这时，各种用不同角度发射的射线，由媒质折射率的变化给以连续的折射，如果分布确当，可以使代表各模式的射线得到聚焦。这样的媒质称之为无穷似透镜媒质。无穷似透镜的假设，在归一化频率远离波型的截止频率时是较好的，是可行的。因为在这种条件下，波型的能量较好的集中在芯子里。

第二个假设是光纤芯子剖面是轴对称的，并作平方律分布，即

$$n^2(r)=n_1^2\left[1-2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \tag{1-1}$$

这里的 $n_1=n(0)$，是光纤轴心处的折射率，Δ 是相对折射率差，a 是光纤芯子半径。

第三个假设是折射率 $n(r)$ 或介电常数 $\epsilon(r)$ 变化缓慢，于是波动方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon}\right)=-\omega^2\mu_0\epsilon\boldsymbol{E} \tag{1-2}$$

里的 $\nabla\epsilon\simeq0$。

此外，由于这个假设，还可以近似地认为在这样的媒质里可以存在平面波，于是我们可采用标量近似解。标量 Helmholtz 方程现为：

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$$

或

$$\nabla^2\psi+n^2(r)k_0^2\psi=0 \tag{1-3}$$

既然是平面波，亦即可以不考虑极化，到处的极化是空间均匀的，于是，我们可以假设横向电场为 E_x（或 E_y），亦即，可以令(1-3)式的一个特解为：

$$E_x=\psi(r,\ \varphi,\ z)=\psi(r)\frac{\cos}{\sin}m\varphi\exp[-j\beta z] \tag{1-4}$$

把(1-4)式代入(1-3)式，得

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d\psi(r)}{dr}\right]+[k^2(r)-\beta^2-k_\varphi^2]\psi(r)=0 \tag{1-5}$$

这里的

$$k^2(r)=n^2(r)k_0^2$$

$$k_\varphi^2=\frac{m^2}{r^2}$$

k_φ 是沿圆周的波数量。

此后的问题是如何求解折射率分布如公式(1-1)所示的方程(1-5)。采用的方法仍如非均匀薄膜波导的解法一样是变量变换，使(1-5)式成为已经解过的微分方程。具体的解题步骤是:

(1) 第一步，令:

$$U = r^{1/2}\psi(r) \tag{1-6}$$

代入公式(1-5)，得:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{U}{r^{1/2}}\right)\right]+\left[k^2(r)-\beta^2-\left(\frac{m^2}{r^2}\right)\right]\frac{U}{r^{1/2}}=0$$

即:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}r^{-1/2}U'+r^{1/2}U''-\frac{1}{2}r^{-1/2}U'+\frac{1}{4}r^{-3/2}U\right]$$
$$+\left[k^2(r)-\beta^2-\frac{m^2}{r^2}\right]\frac{U}{r^{1/2}}=0$$

于是，得:

$$U''+\left[k^2(r)-\beta^2-\frac{m^2-1/4}{r^2}\right]U=0 \tag{1-7}$$

这里的撇号"$'$"代表对 r 的微分。

(2) 第二步，再令:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\sqrt{2\Delta}}{\chi^{1/2}}\frac{r}{a}=Kr\\ b&=\frac{k_1a\chi}{\sqrt{2\Delta}}\\ \chi&=1-\beta^2/k_1^2\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

这里的
$$K=\frac{\sqrt{2\Delta}}{\chi^{1/2}a}$$
$$k_1=n_1k_0$$

如此，式(1-7)成为:

$$K^2\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left[k^2(r)-\beta^2-\frac{(m^2-1/4)K^2}{\xi^2}\right]U=0$$

即

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left[\frac{k^2(r)-\beta^2}{K^2}-\frac{(m^2-1/4)}{\xi^2}\right]U=0 \tag{1-9a}$$

式中

$$\frac{k^2(r)-\beta^2}{K^2}=\frac{k_1^2-2\Delta k_1^2\left(\frac{r}{a}\right)^2-\beta^2}{K^2}$$

$$=\frac{k_1^2-\beta^2}{K^2}-\frac{2\Delta k_1^2\left(\frac{r}{a}\right)^2}{K^2}=b^2(1-\xi^2)$$

于是,(1-9a)式成为:

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}+\left[b^2(1-\xi^2)-\frac{m^2-1/4}{\xi^2}\right]U=0 \qquad (1\text{-}9b)$$

(3) 第三步,又令:

$$X=b\xi^2$$

$$V=X^{1/4}U$$

于是

$$\left.\begin{aligned}dX&=2b\xi\,d\xi=2\sqrt{bX}\,d\xi\\U&=VX^{-1/4}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}10)$$

把(1-10)式代入(1-9b)式,得:

$$2\sqrt{bX}\,\frac{d}{dX}\left[2\sqrt{bX}\,\frac{d}{dX}\,(VX^{-1/4})\right]$$

$$+\left[b^2\left(1-\frac{X}{b}\right)-\frac{m^2-1/4}{X}\,b\right]VX^{-1/4}=0$$

即

$$\frac{d^2V}{dX^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\frac{b}{4}}{X}-\frac{\frac{m^2-1}{4}}{X^2}\right]V=0 \qquad (1\text{-}11a)$$

或

$$\frac{d^2V}{dX^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{X}+\frac{\frac{1}{4}-N^2}{X^2}\right]V=0 \qquad (1\text{-}11b)$$

这是已知的所谓 Whittaker 方程*。

2-2 Whittaker 方程的解和标量模的传输系数

Whittaker 方程 (1-11a) 在 $X=0$ 处有界, X 为任何有界

* 见 1. E. D. Rainville, *Special function*, eq. 11, Macmillan Company, New York, 127 (1960).

2. E. T. Whittaker, *Modern Analysis*, 337 (1952).

值时正确的解有两个，它们是级数，其中之一为：

$$V=e^{-\frac{1}{2}X}X^{\frac{m+1}{2}}F\left\{\frac{1+m}{2}-\frac{b}{4},\ (1+m),\ X\right\} \tag{1-12}$$

符号 $F\{\quad\}$ 是 Kümmer 提出的，它为：

$$\begin{aligned}&F\left\{\frac{1+m}{2}-\frac{b}{4},\ (1+m),\ X\right\}\\&=\left\{1+\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{2}-\frac{b}{4}\right)X}{1!(m+1)}\right.\\&\quad\left.+\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{2}-\frac{b}{4}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{m}{2}-\frac{b}{4}\right)X^2}{2!(m+1)(m+2)}+\cdots\right\}\end{aligned} \tag{1-13}$$

为了使(1-12)在 $X\to\infty$ 时有界，以满足我们所需的边界条件(即 $X=0,\ X\to\infty,\ V$ 有界)，必须令：

$$\frac{1}{2}+\frac{m}{2}-\frac{b}{4}=-n$$

而

$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots \tag{1-14a}$$

以使 $F\{\quad\}$ 成为 n 次的多项式。

于是，从上式有：

$$b=4n+2m+2 \tag{1-14b}$$

再从(1-8)式里第二第三式，得：

$$\chi=\frac{\sqrt{2\Delta}\,b}{k_1a}=\frac{\sqrt{2\Delta}}{k_1a}(4n+2m+2) \tag{1-15}$$

和

$$\chi=1-\beta^2/k_1^2$$

相等一下，即得标量模 m、n 的传输系数 β_{mn} 为：

$$\beta_{mn}=n_1k_0\left[1-\frac{2\sqrt{2\Delta}}{n_1k_0a}(m+2n+1)\right]^{1/2} \tag{1-16}$$

这里的m代表沿圆周的节点数的一半，n 代表沿着半径(包括原点在内)有 $n+1$ 个节点(即零点)。从公式(1-12)、(1-13)来看，n 代表 X 的次数，n 越大，多项式的根越多。

公式(1-16)是一个重要公式，但它仅仅是 $\alpha=2$ 下标量模的传

输系数。如令 $p=m+2n$，就有很多个 m、n 的组合，得出相等的 p 值和相等的 β_{mn} 值，亦即有很多个标量模彼此简并，组成一个标量模式群。

2-3 标量 Helmholtz 方程的一个特解

这里是要解出标量 Helmholtz 方程 (1-5) 的一个特解 $\psi_{mn}(r)$。

在第 2-1 节里，曾令：

$$U=VX^{-1/4}$$

$$X=b\xi^2$$

$$\xi^2=\frac{2\Delta}{\chi}\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$b=\frac{k_1a\chi}{\sqrt{2\Delta}}$$

$$\therefore\quad X=\frac{k_1a\chi}{\sqrt{2\Delta}}\frac{2\Delta}{\chi}\left(\frac{r}{a}\right)^2=\frac{k_1\sqrt{2\Delta}}{a}r^2$$

令

$$X=\frac{r^2}{S_0^2}$$

则

$$S_0=\left(\frac{a}{k_1\sqrt{2\Delta}}\right)^{1/2} \tag{1-17}$$

从以后的讨论可知，S_0 是光斑尺寸，它代表光能集中在芯子里的程度。

又从公式(1-6)、(1-10)、(1-16)和(1-17)有：

$$\begin{aligned}\psi&=Ur^{-1/2}=V\left(\frac{r^2}{S_0^2}\right)^{-1/4}r^{-1/2}=\left(\frac{S_0^{1/2}}{r}\right)V\\&=\left(\frac{S_0^{1/2}}{r}\right)e^{-\frac{X}{2}}X^{\frac{m+1}{2}}F\left\{\frac{1}{2}+\frac{m}{2}-\frac{b}{4},\ 1+m,\ X\right\}\\&=\left(\frac{S_0^{1/2}}{r}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{S_0}\right)^2\right]\left[\left(\frac{r}{S_0}\right)^2\right]^{\frac{m+1}{2}}\\&\quad\times F\left\{-n,\ 1+m,\ \frac{r^2}{S_0^2}\right\}\end{aligned} \tag{1-18}$$

根据 Laguerre 多项式 $L_n^m(X)$ 的定义

$$L_n^m(X)=\frac{\Gamma(m+n+1)}{n!\Gamma(m+1)}F(-n,\ m+1,\ X) \tag{1-19}$$

这里的 Γ 是 Gamma 函数。我们有:

$$F\{-n,\ m+1,\ X\}=\frac{n!\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+1)}L_n^m(X)$$

所以

$$F\left\{-n,\ m+1,\ \frac{r^2}{S_0^2}\right\}=\frac{n!m!}{(n+m)!}L_n^m\left(\frac{r^2}{S_0^2}\right) \tag{1-20}$$

把(1-20)式代入(1-18)式,得特解:

$$\begin{aligned}\psi_{mn}(r)&=\left(\frac{S_0^{1/2}}{r}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{S_0}\right)^2\right]\left(\frac{r}{S_0}\right)^{m+1}\\&\quad\times\frac{m!n!}{(m+n)!}L_n^m\left(\frac{r^2}{S_0^2}\right)\\&=\frac{1}{S_0^{1/2}}\left[\frac{m!n!}{(m+n)!}\right]\left(\frac{r}{S_0}\right)^m L_n^m\left(\frac{r^2}{S_0^2}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{S_0}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{1-21}$$

这里的 S_0 已知为

$$S_0=\left[\frac{a}{\sqrt{2\Delta}\,k_0n_1}\right]^{1/2}$$

Laguerre 多项式 $L_n^m(X)$ 为:

$$L_n^m(X)=\left(e^X\frac{X^{-m}}{n!}\right)\frac{d^n}{dX^n}(e^{-X}X^{m+n}) \tag{1-22}$$

(1-21)式里的 $L_n^m\left(\frac{r^2}{S_0^2}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{S_0}\right)^2\right]$ 称为 Gaussian-Laguerre 函数。

(1-21)式是标量 Helmholtz 方程(1-5)的一个特解。

于是,标量模电场的一个特解为:

$$E_{mn}=\psi_{mn}(r)\frac{\cos}{\sin}m\varphi\exp[j(\omega t-\beta_{mn}z)] \tag{1-23}$$

2-4 归一化标量模电场

为了求解激励问题、耦合问题等等,即需要求取各模式的系数或模式分布时,应该用归一化标量模电场。为此,可以先写出标量