纯粹数学与应用数学专著　第13号

线性算子谱理论

II

不定度规空间上的算子理论

夏道行　严绍宗　著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第13号

线性算子谱理论

II

不定度规空间上的算子理论

夏道行　严绍宗　著

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书着重介绍近十年来在国内外发展起来的线性算子谱理论及作者在这方面的研究成果，共分 I,II 两册. 第 I 册已于1983年出版. 第 II 册的主要内容是不定度规空间的子空间的结构理论，不定度规上稠定闭算子理论，自共轭、酉算子的谱理论，压缩算子的酉扩张理论，不定度规空间算子理论在场论方面的应用等.

读者对象为数学、物理专业的大学高年级学生、研究生、教师和研究人员.

纯粹数学与应用数学专著 第13号

线性算子谱理论

II

不定度规空间上的算子理论

夏道行 严绍宗 著

责任编辑 张晓凌 夏墨英

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年10月第一版 开本：850×1168 1/32

1987年10月第一次印刷 印张：14 1/2

印数：精 1—800 平 1—2,100 插页：精 3 平 2

字数：386,000

统一书号：13031·3664

本社书号：5470·13—1

定价：布面精装 5.70 元 平装 4.20 元

科技新书目：平 015 精 016

序

正如本书第一册的序中所介绍的那样，本书将以我们（包括著者的合作者们）在线性算子谱理论方面的研究成果为主，系统地探讨其中的几个方向．如果说本书第一册主要是探讨 Hilbert 空间（定度规空间）上亚和半亚正常算子的谱分析，那末本册主要是探讨不定度规上算子的谱理论，特别是不定度规空间上自共轭、酉算子的谱分析．

不定度规空间上算子理论并不是 Hilbert 空间上算子理论逻辑上的推广，而是有着深厚的基础的．相对论中的"时-空"空间就是一个不定度规空间．反映观察者变更的数学形式——（齐次）Lorentz 群就是这个不定度规空间上酉算子全体．"不定度规空间"最初就是出现在 P. A. M. Dirac 的有关量子场论方面的文章[1]中．Л. С. Понтрягин 后来是从力学问题研究的需要中开始从数学上探讨不定度规空间上算子理论的．近来又有些理论物理学家试图用不定度规空间来建立散射理论，以解决发散困难．

从数学上来说，自从 Понтрягин 开展研究后，在五十—六十年代有一批数学家（如 M. Г. Крейн, И. С. Иохвидов, H. Langer, M. A. Наймарк, R. S. Phillips, J. Bognár 等）从事这方面的研究，取得了不少成果．但如果与 Hilbert 空间上算子论的成就相比，则相差甚远．许多在 Hilbert 空间中显然的事实，在不定度规空间中却变得不显然，甚至颇费周折才能搞清楚是否成立，正因为度规是不定的，就形成了它特有的困难．包括整个七十年代在内的十多年中，不定度规空间上算子理论文章几乎很少见到．

本书主要是作者近几年来在这方面工作的总结，部分是六十年代的工作．基本内容是不定度规空间的子空间的结构理论，不定度规空间上稠定闭算子理论，自共轭、酉算子的谱理论，压缩算

子的西扩张理论，不定度规空间算子理论在场论方面的应用等。

由于著者水平所限，本书定有不成熟及不妥之处，热诚欢迎同行们多提意见。

和第一册一样，吉林大学数学系江泽坚教授对著者指教、支持和鼓励并且带病审阅本册手稿，提了很多好的意见。本册内容也曾与北京大学张恭庆、南京大学王声望、马吉溥等诸位教授交流讨论，并得到他们许多有益的帮助。此外，还从数学所、华东师大、陕西师大、西南师院等有关同行那里得到许多帮助。著者谨此一并致谢。

著　者

1985年1月

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

目　　录

第一章　不定度规空间上几何学 ······ 1
§1　不定度规空间的基本概念 ······ 1
§2　完备的不定度规空间及其拓扑 ······ 4
§3　子空间的结构 ······ 12
§4　标准分解 ······ 35
§5　Π_K 空间结构 ······ 56
第二章　完备的不定度规空间上算子的一般理论 ······ 62
§1　稠定、闭和对称算子 ······ 62
§2　保距算子和酉算子 ······ 75
§3　Cayley 变换，对称算子的自共轭扩张 ······ 83
§4　投影算子和约化 ······ 101
第三章　Π_K 空间上酉算子和自共轭算子 ······ 111
§1　K维半负不变子空间 ······ 111
§2　酉、自共轭算子的模型 ······ 127
§3　自共轭算子的开根 ······ 152
§4　谱系 ······ 172
§5　临界点的结构和谱映射 ······ 205
§6　对称算子代数 ······ 237
第四章　Π 空间上酉、自共轭和压缩算子 ······ 251
§1　谱半径和具有分裂谱的酉、自共轭算子 ······ 251
§2　具有标准分解的酉、自共轭算子 ······ 269
§3　压缩算子 ······ 302
§4　亚正常算子 ······ 324
第五章　不定度规空间理论的某些应用 ······ 332
§1　与不定度规有关的散射理论 ······ 332

§2 条件正定广义函数的表示…………………………… 375
§3 极·积算子…………………………………………… 415
附录A(某些围道积分的计算)…………………………… 437
附录B (Putnam-Fuglede 型定理)……………………… 444
文献索引和注………………………………………………… 451
参考文献……………………………………………………… 455

第一章　不定度规空间上几何学

这一章将介绍不定度规空间上最基本的几何概念．这些内容基本上是内积空间，特别是 Hilbert 空间上相应概念的推广．它们不仅是不平凡的推广，而且也是今后所必需的．

§1　不定度规空间的基本概念

1. 不定度规空间

定义1.1　设 Π_0 是复数域 C 上线性空间，$(\cdot,\cdot)$ 是 Π_0 上双线性 Hermite 泛函，即满足

(i) 对任何 $x, y\in\Pi_0$，$(x, y)=\overline{(y, x)}$.

(ii) 对任何 $\alpha, \beta\in C$，$x, y, z\in\Pi_0$，

$$(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y, z).$$

称 $(\cdot,\cdot)$ 是 Π_0 上的准度规，而称 $(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间．

定义 1.2　设 $(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间，$x, y\in\Pi_0$．如果 $(x,y)=0$，那末称 x（按 $(\cdot,\cdot)$）直交于 y，记为 $x\perp y$．如果存在 Π_0 中的非零向量 x，满足

$$(x, y)=0,\ y\in\Pi_0, \tag{1.1}$$

那末称准度规是退化的．否则，称为非退化的．如果准度规 $(\cdot,\cdot)$ 是非退化的，则称准度规为度规，相应地，称 $(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$ 是不定度规空间．

显然，当 x 直交于 y 时，y 也直交于 x，即直交是相互的．又如果 $(\Pi_0, (\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间，令 Π_0 的子集

$$L_0=\{x\mid x\perp y,\ y\in\Pi_0\},$$

那末 L_0 必是 Π_0 的线性子空间．在商空间 $\Pi=\Pi_0/L_0$ 上，由 $(\cdot,\cdot)$ 可以诱导出一个双线性 Hermite 泛函 $(\cdot,\cdot)_{\Pi_0/L_0}$，显然 $(\Pi, (\cdot,$

$\cdot)_{\Pi_0/L_0})$ 便是不定度规空间.

如无特殊申明，今后本书中总是假定 Π 是复数域 $\mathbf{C}$ 上线性空间，$(\cdot,\cdot)$ 是 Π 上的度规，即 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$是不定度规空间，并且常简写 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$为 Π.

2. 正、负、零性子空间

定义 1.3 设 Π 是不定度规空间，$x\in\Pi$，如果满足$(x,x)\geqslant 0$ (或 $(x,x)\leqslant 0$)，那末称 x 是 Π 上的半正（或半负）向量；如果满足 $(x,x)>0$ (或$(x,x)<0$)，那末称 x 是正(或负)向量；如果 $(x,x)=0$，那末称 x 是零性向量．零性向量又称为迷向向量.

设 L 是 Π 的线性子空间，如果 L 中一切非零向量都是正（或负，或零性）的，那末称 L 是 Π 的正性（或负性，或零性）子空间．零性子空间又称作迷向子空间．如果 L 中一切向量都是半正（或半负)的，那末称 L 是半正（或半负）子空间.

设 L 是 Π 的正（负、半正、半负、零性）子空间，如果不存在 Π 的正（负、半正、半负、零性)子空间 L'，使得 L 是L'的真子空间，那么称 L 是 Π 的极大正(极大负、极大半正、极大半负、极大零性）子空间.

利用 Zorn 引理，容易证明如下命题：不定度规空间 Π 的任何一个正（负、半正、半负、零性）子空间 L 必可扩张成 Π 上一个极大正（极大负、极大半正、极大半负、极大零性）子空间，即必存在 Π 的某个极大正（极大负、极大半正、极大半负、极大零性）子空间 L'，使得 $L\subset L'$.

3. $A^{\perp}$，退化子空间

定义 1.4 设 A 是不定度规空间 Π 的子集．称 Π 中集.

$$\{x\,|\,(x,y)=0,\ y\in A\}$$

为与 A 直交的集，记为 $A^{\perp}$．设 L 是Π的线性子空间，如果 $L\cap L^{\perp}\neq\{0\}$，即 L 中存在非零向量与 L 中所有向量直交，那末称 L 是 Π 的退化子空间，否则称 L 是 Π 的非退化子空间.

显然，当 L 是 Π 的线性子空间时，如果把 $(\cdot,\cdot)$ 限制在 L 上，那末 $(L,(\cdot,\cdot))$ 是准不定度规空间．而 $(L,(\cdot,\cdot))$ 为不定度

规空间的充要条件是 L 为 Π 的非退化子空间. 当 L 是正或负的子空间时, L 将相应地按 $(\cdot, \cdot)$ 或 $-(\cdot, \cdot)$ 成为内积空间. 当 L 是半正或半负子空间时, L 将相应地按 $(\cdot, \cdot)$ 或 $-(\cdot, \cdot)$ 成为准内积空间.

下列命题是显然的.

引理 1.1 设 Π 是不定度规空间, A 是 Π 的子集, L, M 都是 Π 的线性子空间, 那末

(i) $A^{\perp}$ 是 Π 的线性子空间.

(ii) $L\subset L^{\perp\perp}$ (这里 $L^{\perp\perp}$ 表示 $(L^{\perp})^{\perp}$).

(iii) 当 L 是正 (或负) 子空间时, L 必是非退化的.

(iv) 当 $M\subset L$ 时, $M^{\perp}\supset L^{\perp}$.

定义 1.5 设 L_1, L_2 是不定度规空间 Π 的两个线性子空间. 如果对一切 $x_j\in L_j, j=1,2$, 都有 $(x_1, x_2)=0$, 那么称 L_1, L_2 相互直交, 记为 $L_1\perp L_2$. 称线性子空间 $L=\{x_1+x_2 | x_j\in L_j, j=1, 2\}$ 是 L_1, L_2 的线性和, 记为 $L=L_1+L_2$. 如果 $L_1\cap L_2=\{0\}$, 称 $L=L_1+L_2$ 是 L_1, L_2 的直接和, 直接和常表示为 $L=L_1\dotplus L_2$, 如果 $L_1\perp L_2$, 并且 $L_1\cap L_2=\{0\}$, 称 $L=L_1+L_2$ 是 L_1, L_2 的直交直接和. 直交直接和常表示为 $L=L_1\oplus L_2$.

引理 1.2 设 L_1, L_2 是不定度规空间 Π 上两个线性子空间. 如果 $\Pi=L_1+L_2$, 并且 $L_1\perp L_2$, 那末 $\Pi=L_1\oplus L_2$, 并且 $L_1^{\perp}=L_2$, $L_2^{\perp}=L_1$ (即 $L_j^{\perp\perp}=L_j$, $j=1, 2$).

证 证明 $L_1\cap L_2=\{0\}$. 任取 $x\in L_1\cap L_2$, 根据 $L_1\perp L_2$ 的假设, 所以

$$x\perp L_1,\ x\perp L_2 \tag{1.2}$$

从而 $x\perp\Pi$. 在不定度规空间中, 与全空间直交的只有零向量, 所以 $x=0$.

既然 $L_1\cap L_2=\{0\}$, 所以 $\Pi=L_1\oplus L_2$. 又显然, $L_1^{\perp}\supset L_2$.

现在证明 $L_2\supset L_1^{\perp}$. 任取 $x\in L_1^{\perp}$, 根据分解 $\Pi=L_1\oplus L_2$, 必存在唯一一对 $x_j\in L_j$, $j=1, 2$, 使得 $x=x_1+x_2$. 由于 $x\perp L_1$, $x_2\perp L_1$, 所以 $x_1=x-x_2\perp L_1$. 又因为 $x_1\in L_1$, 所以 $x_1\perp L_2$, 从而

$x_1 \perp \Pi$，因此，只有 $x_1 = 0$，即 $x = x_2 \in L_2$. 这就是说，$L_1^{\perp} \subset L_2$. 但上面已证明 $L_1^{\perp} \supset L_2$，从而 $L_1^{\perp} = L_2$.

同样可证明 $L_2^{\perp} = L_1$. 证毕.

对于准不定度规空间 $(\Pi_0, (\cdot, \cdot)_0)$，引理 1.2 的结论一般不成立. 下面是一个例子.

例 1.1 设 H_+, H_-, H_0 是三个 Hilbert 空间，内积分别为 $[\cdot, \cdot]_+$，$[\cdot, \cdot]_-$，$[\cdot, \cdot]_0$，并且 $\dim H_0 \geqslant 2$. 用 Π_0 表示 H_+, H_-, H_0 的形式线性和全体所成的线性空间，在 Π_0 上作双线性 Hermite 泛函如下：对任何 $x_\pm$, $y_\pm \in H_\pm$, x_0, $y_0 \in H_0$,

$$
\begin{aligned}
(x_+ + x_- + x_0, y_+ + y_- + y_0)_0 = &-[x_-, y_-]_- \\
&+ [x_+, y_+]_+,
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

显然 $(\Pi_0, (\cdot, \cdot)_0)$ 成为准不定度规空间. 对 Hilbert 空间 H_0，任作分解：$H_0 = H_0^1 \oplus H_0^2$，这里 $\oplus$ 是 Hilbert 空间 H_0 的直交和（即按 $[\cdot, \cdot]_0$ 的直交），并且 $\dim H_0^i \neq 0$，$i = 1, 2$. 在 Π_0 上分别作 $L_1 = H_+ + H_0^1$，$L_2 = H_- + H_0^2$，由此可知 L_1, L_2 关于 $(\cdot, \cdot)$ 是直交的，即 $L_1 \perp L_2$，又由于 $L_1 \cap L_2 = \{0\}$，所以 $\Pi = L_1 \oplus L_2$ 是 $(\Pi_0, (\cdot, \cdot)_0)$ 上直交直接和. 但是容易证明 $L_1^{\perp} = H_- + H_0 \neq L_2$，$L_2^{\perp} = H_2 + H_0 \neq L_1$.

在本书中，不定度规空间中的度规常用圆括号 $(\cdot, \cdot)$，而出现辅助的 Hilbert 空间中的内积常用方括号 $[\cdot, \cdot]$，而记号 $\perp$，$\oplus$ 常表示按不定度规的直交，直交直接和；如果出现 Hilbert 空间的直交，直交和时，为了避免记号上复杂化，我们仍用 $\perp$，$\oplus$. 这样用是可以的，因为都表示“直交”，“直交直接和”. 在具体场合究竟是按不定度规空间，还是按 Hilbert 空间，常在行文中加以交待. 读者务必留心.

§2 完备的不定度规空间及其拓扑

在本节中将要介绍特别重要的一类不定度规空间——完备的不定度规空间. 本书的算子理论就是建立在这种空间上的.

1. 完备的不定度规空间的定义

定义 2.1 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是不定度规空间. 如果存在 Π 的正子空间 H_+,负子空间 H_-,使得

$$\Pi = H_- \oplus H_+, \tag{2.1}$$

并且 $(\cdot, \cdot)$ 限制在 H_+ 上时, $(H_+, (\cdot, \cdot))$成为 Hilbert 空间; 而 $-(\cdot, \cdot)$ 限制在 H_- 上时, $(H_-, -(\cdot, \cdot))$ 也成为 Hilbert 空间,那末称 Π 为完备的不定度规空间[1]. 而称分解 (2.1) 是 Π 的正则分解.

显然,当 $H_- = \{0\}$ 时,完备的不定度规空间就是通常的Hilbert 空间. 同样,当 $H_+ = \{0\}$ 时, $(\Pi, -(\cdot, \cdot))$ 也是 Hilbert 空间. 所以,今后所讨论的不定度规空间, 总是假定 $H_\pm \neq \{0\}$. 并且假定 $\dim H_-$, $\dim H_+$ 中至少有一个是无限大(两者都有限的空间属于线性代数范畴).

关于完备的不定度规空间的定义, 在某些文献中经常采用下面两种等价的定义方式 A, B 之一.

A. 设 H_+, H_- 是两个 Hilbert 空间, $[\cdot, \cdot]_+$, $[\cdot, \cdot]_-$分别是 H_+, H_-的内积, $\Pi = H_- + H_+$ 是形式线性和. 在 Π 上定义度规 $(\cdot, \cdot)$ 为

$$(x_- + x_+, y_- + y_+) = -[x_-, y_-]_- + [x_+, y_+]_+, \tag{2.2}$$

其中 $x_\pm, y_\pm \in H_\pm$. 称 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间.

B. 设 Π 是 Hilbert 空间,$[\cdot, \cdot]$ 是 Π 上内积. 又设 P_+ 为 Π 上任一个非零, 但也不是单位算子 I 的投影算子, 在 Π 上定义度规 $(\cdot, \cdot)$ 如下

$$(x, y) = [Jx, y], \quad x, y \in \Pi, \tag{2.3}$$

其中 $J = P_+ - P_-$, $P_- = I - P_+$. 称 J为度规算子, $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 为完备的不定度规空间.

本书中只在个别场合采用 A 或 B 式定义.

显然,(2.3) 中 J是 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$上自共轭的酉算

1) 为什么称做"完备的", 这可参看下面完备不定度规空间上拓扑这一小节(本节第三小节).

子，即 $J = J^{*1)}$，$J^2 = I$. 又显然，如果将 (2.3) 式中 J 换成 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 上有界自共轭算子 A，并且 0 是 A 的正则点 (即 A^{-1} 也是 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 上有界算子) 时，由 (2.3) 产生的 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 也是完备的不定度规空间.

对于一般的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$，未必有正则分解 (2.1). 这种空间的结构(特别是与拓扑相联系的几何结构)比完备的不定度规空间的结构更为复杂，因而它上面的算子理论更是难于展开，有意义的结果几乎一个也没有. 关于一般不定空间的结构的讨论以及在什么条件下才具有上述正则分解 (即成为完备的不定度规空间) 可见 J. Bognár 的著作 (文献[1]). 本书中主要讨论完备的不定度规空间上算子，所以有关一般不定度规空间的结构不准备涉及.

2. 诱导内积

定义 2.2 设 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间，$\Pi = H_- \oplus H_+$ 是一个正则分解. 对 $x, y \in \Pi$，有唯一分解 $x = x_- + x_+$，$y = y_- + y_+$，$x_\pm, y_\pm \in H_\pm$，在 Π 上引入新内积 (容易验证它是内积)

$$[x, y] = -(x_-, y_-) + (x_+, y_+), \tag{2.4}$$

称 $[\cdot, \cdot]$ 是由正则分解 $\Pi = H_- \oplus H_+$ 诱导 (或产生) 的内积. 记 $[\cdot, \cdot]$ 导出的 Π 上范数为

$$\|x\| = [x, x]^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \Pi. \tag{2.5}$$

显然，如果 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 是完备的不定度规空间，$\Pi = H_- \oplus H_+$ 是一个正则分解，由诱导内积 $[\cdot, \cdot]$ 得到的 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 不仅是内积空间，而且是 Hilbert 空间. $H_\pm$ 还是 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 的闭子空间. 如果用 $P_\pm$ 分别表示 Hilbert 空间 $(\Pi, [\cdot, \cdot])$ 在 $H_\pm$ 上投影算子，$J = P_+ - P_-$，那末 (2.4) 还可以写成

$$[x, y] = (Jx, y) = (x, Jy). \tag{2.6}$$

按照定义，对于完备的不定度规空间至少有一个正则分解

---

1) A^* 表示 Hilbert 空间上线性算子 A 的共轭算子.

(2.1). 根据这个正则分解的诱导内积 $[\cdot,\cdot]$, $(\Pi,[\cdot,\cdot])$(或 $(\Pi,\|\cdot\|)$) 成为 Hilbert 空间，从而 Π 上有了拓扑. 这个拓扑记为 $\mathscr{T}$，从形式上讲，它依赖于 Π 的正则分解，但在下一小节我们将证明拓扑 $\mathscr{T}$ 不依赖于 Π 的正则分解的选取. 换句话说，$\mathscr{T}$ 是完备不定度规空间自身决定的. 这样，在完备不定度规空间上可以引入集的"有界"、"极限"、"连续"、"闭"等等概念，这和通常 Hilbert 空间一样，不再一一加以具体定义.

注意到 $J^{-1}=J$, (2.6) 等价于

$$(x,y)=[x,Jy]=[Jx,y]. \tag{2.7}$$

因为 J 是 $(\Pi,[\cdot,\cdot])$ 上有界线性算子，所以 $(\cdot,\cdot)$ 是按 $[\cdot,\cdot]$ 的连续双线性泛函. 因为 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上拓扑总是取为 $[\cdot,\cdot]$ 所生成的拓扑，所以又可以说度规 $(\cdot,\cdot)$ 必定是完备不定度规空间 $(\Pi,(\cdot,\cdot))$ 上二元连续函数.

引理 2.1 设 A 是完备不定度规空间 Π 上的子集，那末 $A^{\perp}$ 必是 Π 的闭线性子空间.

证 按定义

$$A^{\perp}=\{x\mid(x,y)=0,\ y\in A\}. \tag{2.8}$$

由于 (x,y) 是二元连续函数，从 (2.8) 可知 $A^{\perp}$ 是闭集. 证毕.

推论 2.2 设 L_1, L_2 是完备不定度规空间 Π 上两个线性子空间，$L_1\perp L_2$，并且 $\Pi=L_1+L_2$，那末 L_1, L_2 都是闭子空间.

证 根据引理 1.2, $L_1^{\perp}=L_2$, $L_2^{\perp}=L_1$. 由引理 2.1 立即得到 L_1, L_2 都是闭的. 证毕.

设 A 是完备不定度规空间 Π 的子集，用 $\bar{A}$ 表示 A 的闭包，$\mathrm{span}\{A\}$ 表示由 A 生成的线性子空间，$\overline{\mathrm{span}}\{A\}$ 表示由 A 生成的闭线性子空间，显然 $\bar{A}\subset\overline{\mathrm{span}}\{A\}$.

推论 2.3 设 A 是完备的不定度规空间 Π 的子集，那么

$$\bar{A}\subset\overline{\mathrm{span}}\{A\}\subset A^{\perp\perp}. \tag{2.9}$$

证 因为 $A\subset A^{\perp\perp}$，所以 $\mathrm{span}\{A\}\subset A^{\perp\perp}$. 又因为 $A^{\perp\perp}=(A^{\perp})^{\perp}$ 是闭的，所以 $\overline{\mathrm{span}}\{A\}\subset A^{\perp\perp}$，即 (2.9) 成立. 证毕.

显然，完备的不定度规空间 Π 中的正子空间的闭包必定是半

正子空间;负子空间的闭包是半负子空间;退化子空间的闭包仍是退化的.

下面的例子说明正子空间的闭包确实可以不是正的，而只能是半正的.

例 2.1 设 $\Pi = l_- \oplus l_+$, $l_\pm = l^2$, $[\cdot, \cdot]_\pm$ 分别表示 $l_\pm$ 的内积.$\{e_i^+\}$, $\{e_i^-\}$ 分别是 l_+, l_- 中完备就范直交系.Π 上度规 $(\cdot, \cdot)$ 取为

$$(x_- + x_+, y_- + y_+) = -[x_-, y_-]_- + [x_+, y_+]_+,$$
$$x_\pm, y_\pm \in l_\pm.$$

令 $x_i = e_1^- + e_1^+ + \frac{1}{i} e_{i+1}^+ \ (i=1, 2, \cdots)$, $L = \operatorname{span}\{x_i \mid i \geqslant 1\}$.显然 L 是完备的不定度规空间 $(\Pi, (\cdot, \cdot))$ 的正子空间.记 $e_1^+ + e_1^-$ 为 z，令 $[\cdot, \cdot]$, $\|\cdot\|$ 为正则分解 $\Pi = l_- \oplus l_+$ 所诱导的内积和范数;由于

$$\|x_i - z\|^2 = [x_i - z, x_i - z] = \frac{1}{i^2}, \tag{2.10}$$

所以 $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = z$,即 $z \in \bar{L}$. 但 z 是零性向量. 所以，$\bar{L}$ 是半正的，而非正的.

3. 拓扑 $\mathscr{T}$ 一般说来，在一般不定度规空间上引入拓扑是困难的，对于完备的不定度规空间 Π，根据正则分解就可在 Π 上引入拓扑. 显然，完备的不定度规空间可以有很多的不同的正则分解,下面就是一例.

例 2.2 类似于例 2.1,取 $\Pi = l_- \oplus l_+$. 今再作 Π 的另一个正则分解如下：令

$$l'_+ = \left\{ a_1 (2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i e_i^+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty \right\},$$

$$l'_- = \left\{ b_1 (e_1^+ + 2e_1^-)/\sqrt{3} + \sum_{i=2}^{\infty} b_i e_i^- \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 < \infty \right\}.$$

下面分四步来验证 $\Pi = l'_- \oplus l'_+$ 成立,并且是 Π 的正则分解.

(i) 显然，l'_+ 是线性子空间，并且对任何非零 $x = a_1(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i e_i^+ \in l'_+$，

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 > 0,$$

即 l'_+ 是正子空间．令 $V: x \longmapsto (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$，易知 V 是内积空间 $(l'_+, (\cdot, \cdot))$ 到 Hilbert 空间 l^2 的保距同构，从而 l'_+ 按 $(\cdot, \cdot)$ 是 Hilbert 空间．

(ii) 类似可证 l'_- 按 $-(\cdot, \cdot)$ 也成为 Hilbert 空间．

(iii) 由于

$$(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} \perp e_i^-, \ i = 2, 3, \cdots,$$

$$(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} \perp (e_1^+ + 2e_1^-)/\sqrt{3},$$

由此得到 $(2e_1^+ + e_1^-)/\sqrt{3} \perp l'_-$．再注意到 $e_i^+ \perp l'_-$ $(i=2,3,\cdots)$，因此 $l'_- \perp l'_+$．

(iv) 又显然有 $\Pi = l'_- + l'_+$，并且 $l'_- \cap l'_+ = \{0\}$．

由上述 (i)—(iv) 和引理 1.2，立即可知 $\Pi = l'_- \oplus l'_+$ 也是正则分解．

设 $\Pi = H^i_- \oplus H^i_+ (i=1, 2)$ 是两个正则分解，由它们导出的内积、范数分别记为 $[\cdot, \cdot]_i$，$\|\cdot\|_i$．一般说来，不可能成立 $\|x\|_1 = \|x\|_2$，$x \in \Pi$．例如，在例 2.1 和例 2.2 中的两个正则分解所导出的范数分别记为 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 显然，

$$\|e_1^+\|_1 = 1. \tag{2.11}$$

由于

$$e_1^+ = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2e_1^+ + e_1^-}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{e_1^+ + 2e_1^-}{\sqrt{3}}, \tag{2.12}$$

立即得到

$$\|e_1^+\|_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}. \tag{2.13}$$