企业领导干部岗位职务培训教材

管理数学

河南人民出版社

管 理 数 学

主编：柴保桂、王子学、范开义

责任编辑：王卫国

河南人民出版社出版发行

孟 津 县 印 刷 厂 印 刷

850×1168毫米 32 开本 13 印张 321 千字

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

印数1—10,000册

ISBN 7—215—00245—4/F·55

定 价：2.90元

前　言

为适应工业企业厂长、经理、书记、总工程师、总经济师和总会计师岗位培训的需要，在河南省计经委的领导下，由中国企业教育研究会河南省分会组织有关大专院校、企业的教师和干部，编写了“企业领导干部岗位职务培训教材”丛书，一套共10本，作为河南省中、小型企业厂长、经理、书记进行岗位培训的统一教材。

《管理数学》一书以国家经委培训大型厂矿企业厂长、经理的经济管理数学教学大纲为依据，从我省中小型工业企业的实际情况出发，本着理论联系实际的原则，简明扼要地阐述了在经济管理方面常用数学的基本知识和方法。各章节的例题尽量结合企业经营管理方面的内容，以说明数学工具的应用。各章选有习题，供练习用。全书约33万字，适用于70学时的教学计划。在讲授时可依不同情况对教材内容进行适当调整。

全书共分四篇，第一篇由柴保桂编写，第二篇由王子学编写，第三、四篇由范开义编写。在编写过程当中始终得到洛阳工学院工管系主任王俊山副教授的支持、指导与关怀。在此表示真挚的谢意！

由于时间仓促，加之编者水平有限，错误之处在所难免，敬请同行和读者批评指正。

编　者　　1987年8月于洛阳

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率与数理统计

第四篇 线性规划

第一篇　高等数学

第一章　平面解析几何

几何学研究的对象是几何图形。解析几何学也是研究几何图形的，但解析几何学是用代数的方法来研究几何图形的，这是解析几何学的特点。那么它是怎样用代数的方法来研究几何图形的呢？关键在于解析几何学的两个基本思想——用数来表示点的位置和用方程来刻画曲线。在本章的内容中，读者将会充分体会到这两点。

§1.1　两点间的距离

由几何学可知，点是构成一切几何图形的基础。如能用数来表示点的位置，就有办法用数把几何图形的位置、形状、大小表示出来。

一、用数表示点的位置

在一水平直线上任取一点O作为原点，并取向右的方向为正方向（如图1.1x的方向），再任取一条线段的长度作为长度单位（如图1.1）。这样的直线，我们称它为数轴。

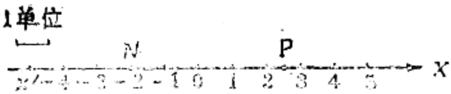

图　1.1

在数轴上原点的右边任取一点P，用单位线段可测得它与原点的距离而得一数字，并用此数字来表示该点在数轴上的位置。我们称此数为该点的坐标，同时称该点为此数的象点。例如点P在原点的右方，它距原点O $2\frac{1}{2}$个单位，我们就用$2\frac{1}{2}$来表示点P的位置。点P是数值$2\frac{1}{2}$在数轴上的象点。对于在原点左方的点，可用相同的办法来测量，只是此时表示点与原点间的数值为负数。如点N在原点的左方，并离原点2个长度单位，我们就用-2来表示，这里的负号"$-$"表示点N在原点的左方（即与正方向相反的方向x'）。原点本身可用数值零来表示。

这样作的结果使直线上的全部点与全部实数之间建立了"一一对应"的关系。也就是说，对于直线上任一个点，都有一个实数与其对应；而对于任一个实数也都有直线上的点和它对应。而且，这种对应关系还保持了数和点的顺序。也就是说，象点位置较右的坐标较大，位置较左的坐标较小。反之，坐标较大的象点，其位置较右，坐标较小的象点，其位置较左。

过数轴$x'Ox$的原点O作它的垂线$y'Oy$，以交点O为原点，取同样的长度单位(有时长度单位也可不同)，并取向上的方向作为正方向建立数轴$y'Oy$。称水平的数轴为x轴（或横轴），称竖直的数轴为y轴（或纵轴）。两个轴将平面分为四个部分，这四个部分分别被称作第一、第二、第三、第四象限（图1.2）。

对平面上的一点P，过P作x轴和y轴的垂线，分别交x轴于P_1，交y轴于P_2。若垂足P_1和P_2在两轴上的坐标分别为3和2，我们用符号(3，2)——即用括号括着的一对数来表示点P在平面上的位置，称其为点P的坐标。其中第一个数3叫点P的横坐标，第二个数2叫点P的纵坐标。如果已知数对（3，2），则可在x轴上取与括号内第一个数3所对应的点P_1，在y轴上取与括号内第二

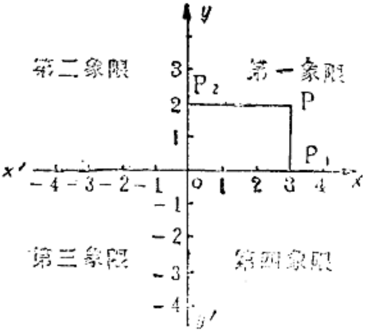

图 1.2

个数相对应的点P_2。过P_1和P_2分别作x轴和y轴的垂线，这两条垂线相交于P点，则点P即为数对(3，2)的象点。

根据直线上点和实数之间一一对应的关系可以推出，平面上全部的点与全部的有序实数对(x, y)之间也存在着一一对应的关系。平面上的这种坐标系叫做直角坐标系。

若已知平面上有两个点A和B，我们应当用什么方法来描述它们的相对位置呢？或者说应当怎样来确定A和B两点间的距离和B在A的什么方向或A在B的什么方向呢？为此，下面分别来研究解决这两个问题的办法。

二、两点间的距离

已知点A的坐标为(x_1, y_1)，点B的坐标为(x_2, y_2)，如何求A与B的距离？

在解析几何中，如果说给定了一个点，就等于说这个点的坐标已知。现已知点A和点B，就是说已知点A的坐标(x_1, y_1)和点B的坐标(x_2, y_2)。解析几何的方法也是由已知去求未知，

也就是说，由已知的四个数x_1、y_1、x_2、y_2，求点A到点B的距离，即求线段AB的长度。

这里x_1、y_1、x_2、y_2代表着四个线段的长度。在图1.3中，过点A作$AA_1\perp x$轴，$AA_2\perp y$轴。过点B作$BB_1\perp x$轴，$BB_2\perp y$轴，则有

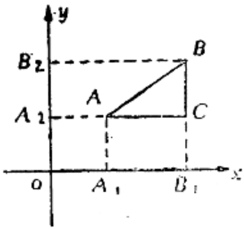

图 1.3

$OA_1=x_1$

$OA_2=y_1$

$OB_1=x_2$

$OB_2=y_2$

从而可求得线段

$A_1B_1=x_2-x_1$，$A_2B_2=y_2-y_1$

再延长A_2A交BB_1于C，由平面几何学知识可知：

$AC=A_1B_1=x_2-x_1$，$CB=A_2B_2=y_2-y_1$

又三角形ABC为直角三角形，由勾股定理可得到

$AB^2=AC^2+CB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1.1)$$

公式(1.1)便是计算两点间的距离公式，或计算线段长度的公式。

例1 已知点$A(3,2)$和点$B(5,4)$，求其距离。

解 使用距离公式(1.1)，将A、B的坐标代入，得

$$|AB|=\sqrt{(5-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

即AB间的距离为$2\sqrt{2}$

例 2　求$A(2,-1)$与$B(-1,3)$间的距离。

解　仍使用公式(1.1)，代入坐标即得

$$AB=\sqrt{(-1-2)^2+[3-(-1)]^2}=\sqrt{9+16}=5$$

即AB间的距离为5

三、直线的斜率

已知一条直线上的两点$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，如何表示直线AB的方向？

这首先要取一个确定方向的基准。在解析几何当中，总是取x轴的正方向作为辨别方向的基准。现连结A和B使其构成一有向线段，过A点作$AA_1\perp x$轴，过B点作$BB_1\perp x$轴。同时过A点作x轴的平行线交BB_1于C，则AC与AB构成的角α等于x轴的正方向与AB向上的方向构成的最小的正角，这个角叫这条直线的倾斜角，简称倾角(图1.4)。该倾角的正切叫做这条直线的斜率，它可以用如下公式计算：

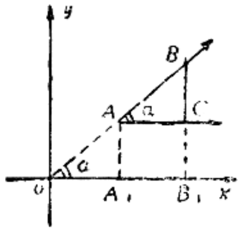

图 1.4

$\angle BAC=\alpha$，在$\triangle ABC$中，$AC=x_2-x_1$，$CB=y_2-y_1$

故
$$\text{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{1.2}$$

若已知直线的斜率，则倾角也就确定了。这样我们可用斜率来表示有向线段的方向。公式(1.2)叫做直线的斜率公式。但是应注意，当直线垂直于x轴时，它没有斜率。

例 3　计算图1.5中直线AB的斜率。

解　A点的坐标为(2，1)，B点的坐标为(4，3)，代入公式(1.2)可得斜率

$$\text{tg}\alpha=\frac{3-1}{4-2}=\frac{2}{2}=1$$

由$\text{tg}\alpha=1$可知

$$\alpha=45^\circ$$

这是直线AB的倾角。同时也可取$\angle\alpha=225^\circ$，而这是直线BA的倾角。

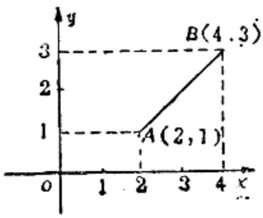

图 1.5

四、有向线段的定比分点

设点$A(x_1, y_1)$和$B(x_2, y_2)$是有向线段AB的端点，点P是有向线段AB的分点，且分$AP:PB=\lambda$。求分点P的坐标(x, y)。

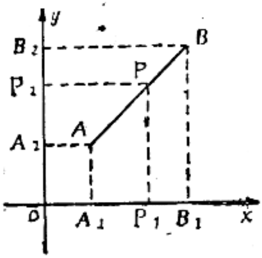

图 1.6

在此，我们作AA_1、PP_1、BB_1均垂直于x轴（图1.6），则

$$AA_1//PP_1//BB_1$$

利用三线平行的性质可推出

$$AP:PB=A_1P_1:P_1B_1$$

又 $A_1P_1=x-x_1$

$P_1B_1=x_2-x$

从而推出

$$(x-x_1):(x_2-x)=\lambda$$

则x的解析表达式为：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

按同样的方法可求得y的解析表达式为：

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

两式合起来可得定比分点P的坐标为：

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\[2ex] y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \qquad (1.3)$$

公式(1.3)就是分点坐标公式。

例4 已知点P分例3中的直线AB的比值为：

$$AP : PB = \lambda = 1.5$$

求分点的坐标。

解 使用公式(1.3)，将点A和点B的坐标及λ值代入公式可得

$$x = \frac{2 + 1.5 \times 4}{1 + 1.5} = \frac{8}{2.5} = 3.2$$

$$y = \frac{1 + 1.5 \times 3}{1 + 1.5} = \frac{5.5}{2.5} = 2.2$$

故点P的坐标为(3.2，2.2)。

§1.2 直线的方程

解析几何的第二个基本思想是用方程来描述曲线。在本节我们将介绍直线方程以及直线与二元一次方程的关系。

一、直线方程

1．直线的点斜式方程

如果已知直线通过点(2，3)，它的斜率为1.5，应当怎样用方程来描述这条直线呢？

由平面几何学可知，直线是由无数个点组成的，若把这无数个点的坐标全部列举出来，直线也就刻画出来了。但这是不可能

的，而我们只能用方程来概括直线上全部点的坐标。为此，我们命$P(x, y)$是直线上的任意一点。直线上每一点的位置各不相同，但它们有一个共同的特点，那就是这些点所形成的有向线段的斜率等于1.5，且此直线经过点(2，3)(图1.7)。据此，可列出如下式子（方程）

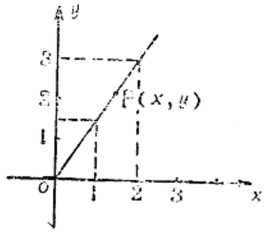

图 1.7

$$\frac{y-3}{x-2}=1.5 \qquad \text{即方程：} y-3=1.5(x-2)$$

而这个方程便刻画出了通过已知点并具有规定斜率的直线。这样的方程叫做直线的点斜式方程。

一般来说，若已知某直线通过点(x_0, y_0)且斜率为k，则其点斜式方程是

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{1.4}$$

2．直线的两点式方程

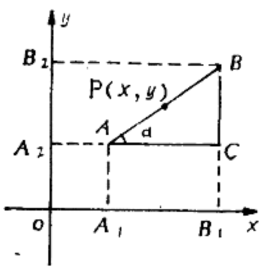

图 1.8

若已知直线经过点$A(x_1, y_1)$和点$B(x_2, y_2)$，求经过这两点的直线方程。

过A，B两点只能连一条直线，该直线的斜率可用公式：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$$

求得。又直线AB经过点

A，其斜率为k，P是AB上的动点(图1.8)，该直线的点斜式方程为

$$y-y_1=k(x-x_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

把它写成对称的形式

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (1.5)$$

(1.5)式即是直线的两点式方程。

例1　设直线l经过点(1，2)和(3，4)，求其方程。

解　将此两点的坐标代入两点式方程，得

$$\frac{y-2}{4-2}=\frac{x-1}{3-1}$$

即　　$y=x+1$

3．直线的斜截式方程

若直线l分别与x轴、y轴相交于点$(a,0)$、$(0,b)$，则分别称l在x轴、y轴上的截距为a、b。

设直线l的斜率为k，在y轴上的截距为b，求l的方程。

如图1.9，设P是直线l上的动点，其坐标为(x,y)，则l的斜率为

$$\frac{y-b}{x-0}=\frac{y-b}{x}$$

由已知条件知

$$\frac{y-b}{x}=k$$

化简得

$$y=kx+b \qquad (1.6)$$

在方程(1.6)中，k是直线的斜率，b是直线在y轴上的截距，该方程便叫做直线的斜截

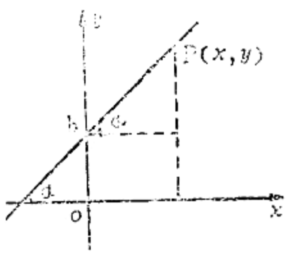

图　1.9

式方程。

例 2 已知直线 l 的斜率为 1，在 y 轴上的截距为 3，求 l 的方程。

解 代入斜截式方程（1.6）可得 l 的方程为

$$y = x + 3$$

二、直线与一次方程的关系

前面所述的直线的点斜式方程、两点式方程和斜截式方程，其共同特点是：方程中含有两个未知数 x 和 y，并且 x 和 y 的幂次均为 1，这样的方程叫做二元一次方程。

特殊情况下，当直线平行于 x 轴且在 y 轴截距为 b，或平行于 y 轴且在 x 轴上截距为 a 时，直线的方程为

$$y = b \quad 或 \quad x = a$$

这是一元一次方程。

综上所述，平面上任一直线的方程都是二元一次方程或一元一次方程，统称为一次方程。

但是，反过来是否对呢？即任何一次方程的图形是否均为直线呢？下面来说明这个问题。设有一次方程

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

如果 $B \neq 0$，我们对方程作如下变化

移项得 $$By = -Ax - C$$

用 B 除上式的两边得

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right) \tag{2}$$

则（2）为一斜截式方程，其斜率为 $-\frac{A}{B}$，在 y 轴上的截距为 $-\frac{C}{B}$。其图形是以 $-\frac{A}{B}$ 为斜率，且通过点 $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ 的一条直线。

如果 $B = 0$，即方程中不含有 y 的项，其形式变成

$$Ax + C = 0 \qquad 即 \qquad x = -\frac{C}{A}$$