电磁场
习题解答

电磁场习题解答

何　诚　曹焕勋　编演
岳　宜　　　　　主审

☆

广西人民出版社出版
（南宁河堤路14号）
广西新华书店发行　柳州市印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　10.5 印张　234 千字
1981年2月第1版　1981年2月第1次印刷
印　数 1—62,000
书号：15113·82　　定价 1.10 元

前　言

西安交通大学冯慈璋同志主编的《电磁场（电工原理Ⅱ）》（简称《电磁场》）一书，现在作为全国高等院校和中央广播电视大学电子类、电力类专业电工基础课的试用教材。

《电磁场》这门课程是在有一定普通物理知识的基础上开设的，它的理论性较强，部分习题的难度较大，为了使学习该课程的高等院校和中央广播电视大学的学生能更好地掌握该课程的基本内容，便于他们演算习题后核对计算结果和检查计算方法时参考，我们特编写了这本书。

本书内容是《电磁场》一书的全部习题解答，共有162题。为了便于查阅，本书章节次序和习题编号均与原书相同。但全书的附图已重新编号。插图中，矢量用带有箭头的粗线段表示，并用黑体符号示之。

为了使读者通过本课程的习题的演算，加深对课程的理解，我们在解题过程中，力求方法简单，物理概念清楚，一般有较详细的计算过程，避免直接套用公式。对一些难度较大的习题，引导学生从物理概念上进行分析，加深理解，一步步地解决问题，并且不少题目做到了一题多解。对于原书的个别题目和所附答案中有误之处已予以酌情订正，但由于时间关系未征得原作者的同意，不一定妥当。

本书的第一、二、三、六、七章由何诚同志编演；第

四、五、八、九章由曹焕勋同志编演。

全书由湖南大学岳宜同志进行了全面细致的审阅。谭云同志也参加了审阅，并提出了宝贵的意见。本书的部分附图由湖南大学周岳云同志绘制。

在编写过程中，得到了湖南大学电气工程系杨淑孔、陈大洪和湖南师范学院物理系贾兆平等同志的大力支持和帮助，在此，谨致以衷心的感谢。

限于我们的水平，书中还有很多缺点和错误，请读者批评指正。

编　　者

1980年10月于岳麓山

目　录

第一章　静电场

内 容 提 要

静电场主要讨论静止电荷所产生的电场的性质，即研究电场的分布与源的分布之间的关系。

1）库仑定理表示均匀介质中点电荷的电场，由库仑定理可导出体、面、线电荷的电场强度E和电位φ。

点电荷：
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\vec{R}^\circ$$

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

体电荷：
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v\frac{\rho\,dv}{R^2}\vec{R}^\circ$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v\frac{\rho\,dv}{R}$$

面电荷：
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s\frac{\sigma dS}{R^2}\vec{R}^\circ$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_s\frac{\sigma dS}{R}$$

线电荷：
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l\frac{\tau\,dl}{R^2}\vec{R}^\circ$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l\frac{\tau\,dl}{R}$$

2） 由库仑定理导出两个基本定理。

（1） 高斯定理：D沿任意闭合面的面积分（D的通量）等于闭合面内的自由电量。

积分形式 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=q$

微分形式 $div\cdot\vec{D}=\rho$

记　　为 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

$\left.\begin{array}{l} div\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho \end{array}\right\}$（$\vec{D}$的散度）

（2） 位场性质定理：E沿任意闭合回路的线积分（E的环流）等于零。

积分形式 $\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

微分形式 $rot\ \vec{E}=0$ 　　或

$curl\vec{E}=0$

记　　为 $\nabla\times\vec{E}=0$

静电场的基本方程为

积分形式 $\oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=q$

$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

微分形式 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

$\nabla\times\vec{E}=O$

$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$

静电场的基本方程反映了静电场中场与源的关系：

（a） 当有$\vec{D}$的通量从闭合面内发出时，面内有$\vec{D}$的

源，即电荷；

(*b*) 静电场没有环流，因而没有另一种源（漩涡源）。

3) 静电场是位场，可以将 $\vec{E}$ 用电位梯度代替，$\vec{E} = -grad\,\varphi$，记为 $\vec{E} = -\nabla\varphi$。$\vec{E}$沿任意方向 l 的投影等于电位沿该方向变化率的负值，$E_l = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$。$\vec{E} = -\nabla\varphi$和 $\nabla\times\vec{E} = 0$ 等效，都是位场性质的反映。

泊松方程 $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$和拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$（没有电荷的空间）是用电位表示的静电场的基本方程。

4) 有介质时，由于介质极化，介质中出现极化强度 $\vec{P}$。对大多数介质，$\vec{P}$与介质中的$\vec{E}$成正比，$\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$。

定义 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$

$= \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

用$\vec{D}$代替$\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$后，避免了直接求$\vec{P}$的困难。

5) 在两种介质的分界面上，由于出现束缚电荷（或者分界面上还有自由电荷σ），$\vec{D}$、$\vec{E}$要发生突变。由基本方程的积分形式导出边界条件为

$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$

或 $D_{1n} = D_{2n}$ $\left(\varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)$

及 $E_{1t} = E_{2t}$ $(\varphi_1 = \varphi_2)$

空间任一点的场都与分界面上的电荷有关，所以场必须满足边界条件。

静电场的计算主要是求解电位，它满足拉普拉斯方程和

泊松方程，所以静电场的解归结为求解拉普拉斯方程或泊松方程。

在给定边界条件下的电位，必须满足拉普拉斯方程，同时满足所给的边界条件。

满足所给的边界条件的拉普拉斯方程的解是唯一的。

6）在唯一性定理的基础上，电轴法和镜象法是求解静电场问题的间接方法。

镜象法适用于：

无限大导体（或介质）平面附近的点电荷、线电荷或线电流的场；

无限长导体圆柱附近有平行的线电荷、线电流或平行圆柱体的场；

导体球附近的点电荷的场等。

镜象法是将平面、圆柱或球上的感应电荷用少数镜象电荷（点电荷或线电荷）代替。镜象法的主要步骤是确定镜象电荷的位置和大小。

7）在静电场情形，导体中没有电场；导体是等位体，表面是等位面，电力线与导体表面垂直。

一个导体的电位与导体上的电量成正比，比值即为导体的电容。多导体系统中每个导体的电位与各导体上的电荷都存在线性关系，各导体之间存在部分电容。

8）电场能量存在场中，等于体积分

$$\overline{W}_e=\int_V \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dv=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dv$$
$$=\int_V \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}dv=\int_V \omega_e dv$$

其中，$\omega_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$ 可视为电场能量体密度。

电场力可用库仑定律或虚位移法计算。求广义力的方法称为虚位移法。

9）重要矢量公式

（1）广义坐标系

$$\nabla\Psi=\frac{\vec{a}_1}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial u_1}+\frac{\vec{a}_2}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial u_2}+\frac{\vec{a}_3}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_3} \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right] \qquad (2)$$

（A_1、A_2、A_3为$\vec{A}$在u_1、u_2、u_3上的投影）

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{a}_1}{h_2h_3} & \dfrac{\vec{a}_2}{h_1h_3} & \dfrac{\vec{a}_3}{h_1h_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3\end{vmatrix} \qquad (3)$$

$$\nabla^2=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right] \qquad (4)$$

（2）直角坐标系

$$\nabla\Psi=\vec{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \qquad (5)$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (6)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8}$$

（3）圆柱坐标系

$$\nabla \Psi = \vec{a}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\vec{a}_\phi}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \vec{a}_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{10}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{a}_r}{r} & \vec{a}_\phi & \frac{\vec{a}_Z}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{12}$$

（4）球坐标

$$\nabla \Psi = \vec{a}_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\vec{a}_\theta}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{\vec{a}_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta \, A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \tag{14}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{a}_r}{r^2 \sin\theta} & \dfrac{\vec{a}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{a}_\phi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin A_\phi \end{vmatrix} \tag{15}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{16}$$

（5）矢量恒等式

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{17}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \tag{18}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D})$$

$$- (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) \tag{19}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{D})\vec{C}$$

$$- (\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C})\vec{D} \tag{20}$$

$$\nabla(\phi + \Psi) = \nabla\phi + \nabla\Psi \tag{21}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B} \tag{22}$$

$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B} \tag{23}$$

$$\nabla(\phi\Psi) = \phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\phi \tag{24}$$

$$\nabla \cdot (\Psi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla\Psi + \Psi\nabla \cdot \vec{A} \tag{25}$$

$$\nabla \times (\Psi\vec{A}) = \nabla\Psi \times \vec{A} + \Psi\nabla \times \vec{A} \tag{26}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times(\nabla\times\vec{B})+\vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) \tag{27}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B} \tag{28}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\,\nabla\cdot\vec{B}-\vec{B}\,\nabla\cdot\vec{A}+(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}-(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \tag{29}$$

$$\nabla\cdot\nabla\Psi=\nabla^2\Psi \tag{30}$$

$$\nabla\times\nabla\Psi=0 \tag{31}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A}=0 \tag{32}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \tag{33}$$

$$\int_v\nabla\cdot\vec{A}dv=\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}\text{（高斯散度定理）} \tag{34}$$

$$\int_s\nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint_c\vec{A}\cdot d\vec{l}\text{（斯托克斯定理）} \tag{35}$$

题　　解

1—1　真空中三个点电荷的位置如图1所示，求P点上

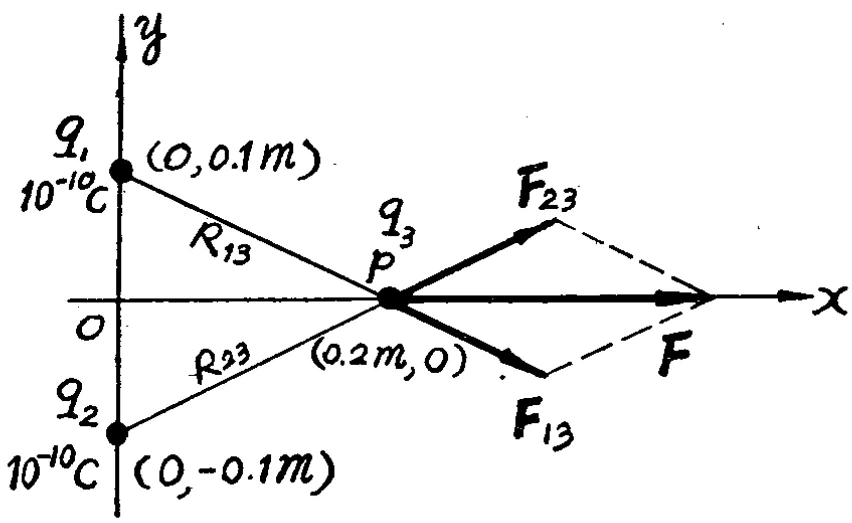

图　1

的电荷（$10^{-8}C$）所受之力。

解： 设$q_1=10^{-10}C$，$q_2=10^{-10}C$，$q_3=10^{-8}C$

由于q_1、q_2、q_3都为正电荷，则q_1与q_2对q_3的作用力都为斥力。由库仑定律可得：

$$\vec{F}_{13}=\frac{q_1 \quad q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}^2}\vec{R}_{13}^0$$

$$\vec{F}_{23}=\frac{q_2 \quad q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}^2}\vec{R}_{23}^0$$

而 $R_{13}^2=(0.2)^2+(0.1)^2=0.05$

同理 $R_{23}^2=0.05$

所以 $$\vec{F}_{13}=\frac{10^{-10}\times10^{-8}\ \vec{R}_{13}^0}{4\pi\varepsilon_0(0.05)}$$

$$=\frac{10^{-18}\times36\pi\times10^9}{4\pi(0.05)}\vec{R}_{13}^0$$

$$=\frac{9\times10^{-9}\ \vec{R}_{13}^0}{0.05}=1.8\times10^{-7}\quad\vec{R}_{13}^0$$

同理 $\vec{F}_{23}=1.8\times10^{-7}\quad\vec{R}_{23}^0$

于是 $\vec{F}=\vec{F}_{13}+\vec{F}_{23}=1.8\times10^{-7}\cos\theta\ \vec{i}+$

$$1.8\times10^{7}\cos\theta\ \vec{i}=3.6\times10^{-7}\cos\theta\ \vec{i}$$

$$\cos\theta=\frac{0.2}{\left[(0.2)^2+(0.1)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=0.894$$

将此代入上式可得：

$$\vec{F} = 3.6\times10^{-7}\times0.894\,\vec{i} \doteq 3.22\times10^{-7}\,\vec{i}\,N$$

1—2　如上题中，y轴上两点电荷为一正一负，重求P点上电荷所受之力。

解：　设y轴上的“1”、“2”点分别带负电荷$q_1=-10^{-10}C$和正电荷$q_2=10^{-10}C$，如图2所示。根据库仑定律可求出：

$$\vec{F}_{13}=1.8\times10^{-7}\,\vec{R}^0_{13}$$

$$\vec{F}_{23}=1.8\times10^{-7}\,\vec{R}^0_{13}$$

而　$$\sin\theta=\frac{0.1}{\sqrt{0.05}}=0.447$$

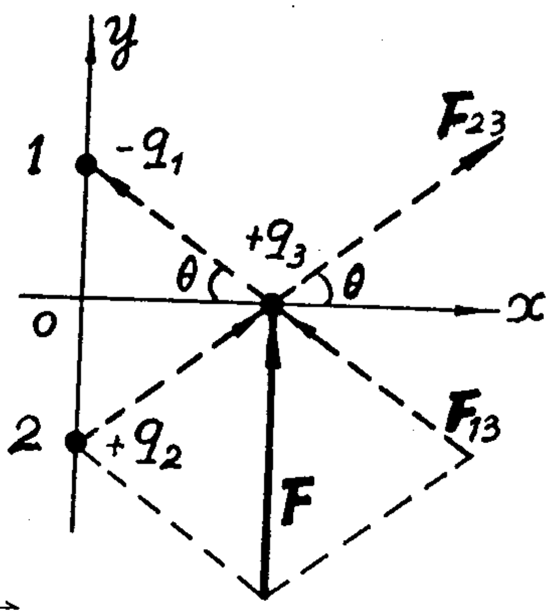

图　2

$$\vec{F}=\vec{F}_{13}-\vec{F}_{23}$$
$$=-1.8\times10^{-7}\sin\theta\,\vec{j}-1.8\times10^{-7}\sin\theta\,\vec{j}$$
$$=-3.6\times10^{-7}\sin\theta\,\vec{j}$$
$$=-3.6\times10^{-7}\cdot\sqrt{\frac{0.01}{0.05}}\,\vec{j}$$
$$=-3.6\times10^{-7}\times0.447\,\vec{j}$$
$$=-1.61\times10^{-7}\,\vec{j}$$

1—3　求图3中P点的电场强度$\vec{E}_P$及电位φ_P（设参考点在无穷远）。

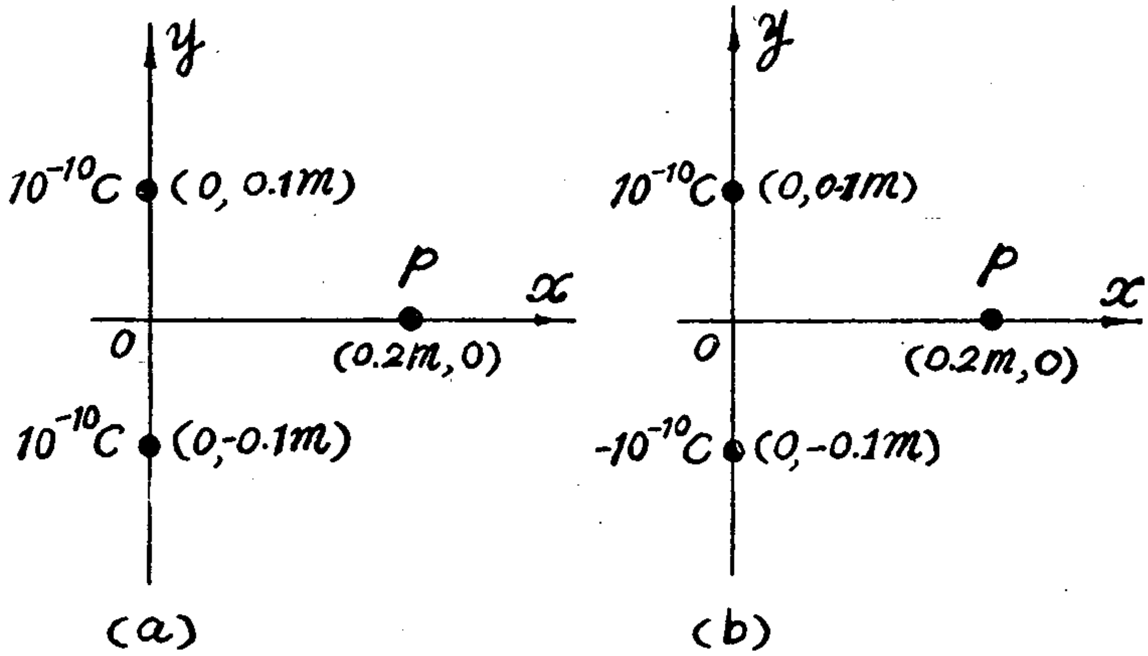

图 3

解： 1）对图 3（a），取$q_1=10^{-10}C$，$q_2=10^{-10}C$，如图 4 所示。则

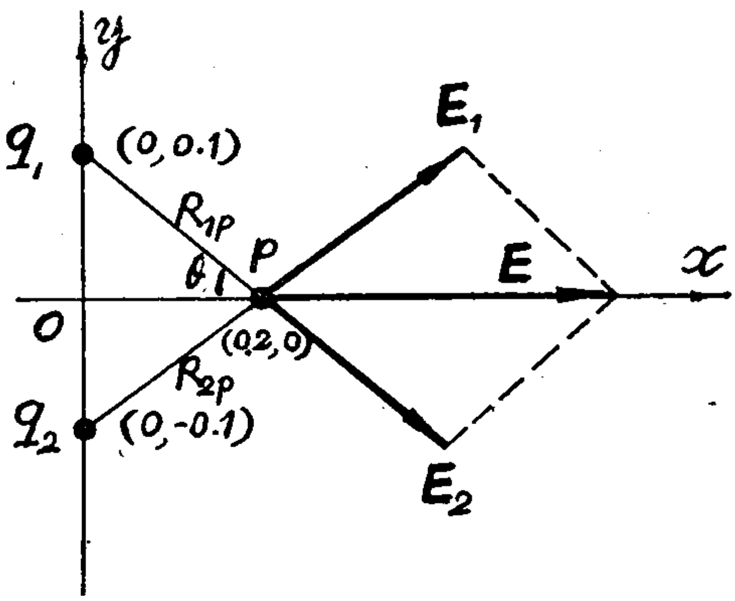

图 4

$$R_{1P}=\sqrt{(0.1)^2+(0.2)^2}=\sqrt{0.05}$$

$$R_{2P}=\sqrt{(0.1)^2+(0.2)^2}=\sqrt{0.05}$$

可见 $R_{1P}=R_{2P}=R=\sqrt{0.05}$

q_1、q_2 在P点产生的场强分别为$\vec{E}_1$和$\vec{E}_2$：

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{1P}^2}\vec{R}_{2P}^0$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{2P}^2}\vec{R}_{2P}^0$$

根据图 4 可知，P点的场强为：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\vec{R}^0}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(q_1 + q_2)$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{R}^0 \doteq \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta\,\vec{i}$$

$$= \frac{36\pi \times 10^9 \times 10^{-10}}{2\pi \times 0.05}\cos\theta\,\vec{i}$$

$$\cos\theta = \frac{OP}{R} = \frac{0.2}{\sqrt{0.05}} \doteq 0.894$$

将此代入上式可得：

$$\vec{E} = \frac{36\pi \times 10^9 \times 10^{-10}}{2\pi \times 0.05} \times 0.894\,\vec{i} = 36 \times 0.894\,\vec{i}$$

$$\doteq 32.2\,\vec{i} \quad V/m$$

设参考点为在无穷远处，则P点

$$\varphi_P = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

$$= \frac{36\pi \times 10^9 \times 10^{-10}}{2\pi\sqrt{0.05}} = 8V$$

2）对图3（b），取设 $q_1 = q = 10^{-10}C$，$q_2 = -q = -10^{-10}C$，如图 5 所示。根据 1）知，$R = \sqrt{0.05}$，于是q_1与q_2在P点产生的场强分别为：