

前 言

随着科学技术和生产的不断发展，现代控制工程及其理论已广泛地应用于各门学科控制系统的分析和研究。不仅在电气工程，而且在现代机器制造业和其他生产过程中，也愈来愈起着十分重要的作用。即使是从事社会科学、生物学、管理科学的各行业科学工作者，亦均对控制理论十分关注。

为了配合电气、机械、化工、动力、采矿等专业的控制工程（或自动调节原理）课程的教学工作，我们将〔日〕绪方胜彦著《现代控制工程》一书中的一百五十六道习题全部解出，对其中许多习题作了一题多解，以便分析对照，开拓思路，起抛砖引玉的作用。同时，为了便于读者复习，还编有各章节解题所需之理论纲要。

本书在编写过程中得到贵州工学院机械系领导的大力支持和张顺寿老师的帮助，许多兄弟院校老师也曾对本书提出不少宝贵意见，在此一并致谢。

限于编者学识水平，时间仓促，缺点错误在所难免，恳切希望广大读者不吝批评指正。

编 者

1981年3月于贵阳

目 录

第一章 控制系统绪言	(1)
1-1 术语、名词及其定义	(1)
1-2 开环与闭环控制系统	(2)
习题及解答	(2)
第二章 数学基础——拉普拉斯变换	(5)
2-1 定义	(5)
2-2 常用典型试验信号的拉普拉斯变换	(5)
2-3 常用拉氏变换基本定理	(9)
2-4 拉氏变换的部分分式展开式	(10)
习题及解答	(13)
第三章 数学基础——矩阵	(24)
3-1 定义	(24)
3-2 矩阵的运算与变换	(26)
习题及解答	(28)
第四章 物理系统的数学模型	(33)
4-1 基本概念	(33)
4-2 传递函数	(33)
4-3 非线性数学模型的线性化	(34)
4-4 方块图及系统传递函数的求法	(35)
4-5 信号流图	(37)
习题及解答	(37)
第五章 基本控制作用和工业自动控制	(56)
5-1 基本控制作用类型及其特点	(56)
5-2 基本控制作用对系统性能的影响	(57)
5-3 反馈控制对系统性能的影响	(59)
习题及解答	(61)
第六章 瞬态响应分析	(80)
6-1 定义	(80)
6-2 一阶系统瞬态响应	(80)
6-3 二阶系统瞬态响应	(81)
6-4 二阶系统单位阶跃响应的性能指标	(83)
6-5 劳斯稳定判据	(84)
习题及解答	(85)

第七章 误差分析和系统最佳化概述	(113)
7-1 静态误差系数	(113)
7-2 动态误差系数	(114)
7-3 误差准则	(115)
习题及解答	(115)
第八章 根轨迹法	(128)
8-1 根轨迹法实质	(128)
8-2 作根轨迹图的一般规则	(128)
习题及解答	(129)
第九章 频率响应法	(144)
9-1 定义	(144)
9-2 对数坐标图 (Bode图)	(145)
9-3 极坐标图 (Nquist图)	(147)
9-4 对数幅-相图 (Nichols图)	(150)
9-5 尼柯尔斯图线	(151)
9-6 频率响应与瞬态响应的关系	(152)
9-7 频率汇编	(157)
习题及解答	(158)
第十章 设计和校正方法	(184)
10-1 设计和校正方法概述	(184)
10-2 超前校正	(184)
10-3 滞后校正	(185)
10-4 滞后-超前校正	(186)
习题及解答	(187)
第十一章 非线性控制系统的描述函数分析	(201)
11-1 非线性系统概述	(201)
11-2 描述函数	(201)
习题及解答	(202)
第十二章 相平面分析	(213)
12-1 定义	(213)
12-2 相平面图的作法	(214)
12-3 相平面图的特性	(215)
12-4 相平面图的应用	(216)
习题及解答	(218)
第十三章 离散系统和Z变换法	(248)
13-1 离散系统引论	(248)
13-2 Z变换	(248)
13-3 常用函数的Z变换和Z变换的基本性质	(249)

13-4	Z反变换法	(251)
13-5	脉冲传递函数	(251)
	习题及解答	(252)
第十四章 控制系统的状态空间分析法		(261)
14-1	状态变量法引言	(261)
14-2	系统的状态	(261)
14-3	系统的状态空间表达式	(262)
14-4	定常系统状态方程的解法	(268)
14-5	矩阵指数 e^{At} 的计算方法	(269)
14-6	连续-时间状态方程的离散化	(273)
14-7	离散-时间系统状态空间表达式	(274)
14-8	离散-时间状态方程的解法	(275)
14-9	传递矩阵	(276)
	习题及解答	(276)
第十五章 李雅普诺夫稳定性分析		(303)
15-1	李雅普诺夫稳定性分析引言	(303)
15-2	术语和定义	(303)
15-3	李雅普诺夫稳定性定理	(304)
15-4	李雅普诺夫函数的几点性质	(305)
15-5	线性定常系统的稳定性分析	(305)
15-6	离散-时间线性系统的稳定性分析	(306)
15-7	非线性系统的稳定性分析	(306)
	习题及解答	(308)
第十六章 最佳和适应式控制系统		(319)
16-1	最佳控制系统引言	(319)
16-2	系统的状态完全可控性	(319)
16-3	系统的状态完全可观测性	(320)
16-4	时间-最佳控制系统	(322)
16-5	基于二次型性能指标的最佳控制系统	(322)
	习题及解答	(324)
参考文献		(344)

第一章 控制系统绪言

1-1 术语、名词及其定义

控制对象 指任何被控制的物体或设备，如驱动机床执行件运动的油缸或油马达。

控制过程 指任何被控制对象的运行状态，如驱动机床工作台油缸的启动、快进、工进，死挡块停留、快退、停止等运行状态。此外化学反应、物理变化、社会经济结构的演变等等均属控制过程。

控制系统 是指由一些控制装置和被控对象的组合，并通过这些被控对象的运行过程去完成预计的任务。如双面钻镗组合机床，每一滑台所带的动力头即为被控对象，两动力头相互配合去完成工件两面之孔的钻镗加工任务，这就构成一个液压与机械的控制系统。

输入量 是指作用于被控制对象或系统输入端的物理量、信息或信号。如在定量泵系统中，油泵与溢流阀对液压系统提供一定压力和流量的油液；此时进入液压系统油液的压力与流量就是输入量或输入信息。

输出量 是指表现于被控制对象或系统输出端的物理量、信息或信号。如动力滑台快进、工进的速度；动力滑台在加工时所能提供的最大推力；此时动力滑台所表现出的速度与推力就是输出量或输出信息。

干扰 是一种对系统的输出量产生相反作用的信号。如动力滑台由快进转变为工进，由工进转变为快退，这种工作状态的改变，必将引起液压系统瞬时压力与流量的巨大变化，压力与流量的这种瞬变会对滑台的正常速度和推力产生相反的作用，这就是干扰。加工过程中由于负载的变化对系统输出的影响，也是干扰。干扰又分为内扰与外扰。

反馈控制系统 是一种能对输出量与参考输入量进行比较，并力图保持两者之间既定关系的控制系统；它利用输出量与参考输入量的偏差来进行控制。如液压靠模铣床，靠模直接控制随动阀开口的大小，这为参考输入量；铣头的运动又反馈回来力图恢复随动阀开口的原来位置，从而始终保持铣床铣头与靠模的曲线轮廓相似的既定关系的运动。

随动控制系统 是一种反馈控制系统，其输出量是机械的位移、速度或加速度。上述液压靠模即属随动系统。

自动调节系统 是一种反馈控制系统，其特点是在有干扰的情况下，能自动地调节系统的有关参数，从而保证其输出量在希望的数值上。如定值减压阀，是利用出口压力反馈，当输入压力发生变化而波动时，主阀阀芯自动升降从而调节减压节流开口的大小以保证输出压力在预定调压锥阀所调整的数值上。

过程控制系统 系统的控制过程是按预定的程序进行，给定量也按既定规律变化。因此，又称为程序控制系统；如程序控制自动换刀数控机床。大多数程序控制系统都包含有随动系统，故其亦属反馈控制系统类型。

总结以上分析，控制系统可表示为：

反馈控制系统 { 随动系统——输出机械位移速度、加速度。
自动调节系统——排除干扰保持预定输出量。
过程控制系统——程序控制。

1-2 开环与闭环控制系统

开环控制系统特点

1. 系统输出信号对控制作用没有影响。
2. 无反馈环节，系统必须精确地校准。
3. 当出现干扰时，系统不能完成既定的工作。
4. 系统不存在稳定性问题。



图1-1 开环控制系统

闭环控制系统特点

1. 系统输出信号对控制作用有直接影响。
2. 有反馈环节，并应用反馈作用来减小系统误差，以使系统的输出量趋于预定值。
3. 当出现干扰时（内扰与外扰）可以减弱其影响。
4. 系统可能工作不稳定，因此存在稳定性校核问题（稳定判据）。

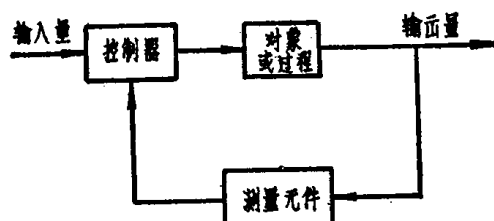


图1-2 闭环控制系统

习 题 及 解 答

习题1-1 日常生活中有许多闭环和开环控制系统，试举几个具体例子，并说明它们的工作原理。

解：开环控制系统如自动售米机，自动售邮票（或信封）机，北京火车站的报时钟，它们的工作原理相类似，兹举自动售米机一例说明。输入参考信息同时使控制粮食的阀门打开，粮食进入电秤过磅，当其数量和输入量参考信息相对应时，即已称足，粮仓阀门关闭。经过一定的延时迟后，使电秤阀门打开，输出预定数量的粮食。接着电秤中粮食数量减少至零发出信号使全机停止，自动售米的任务就此完成。由于该系统输出粮食的数量这一信息没

有反馈到输入端与参考信息进行比较，故系开环控制系统。

闭环控制系统如骑自行车，运动员表演平衡木，杂技演员走钢丝，健康肌体对待随机入侵的细菌，人体体温的自动调节等过程。现以骑自行车为例说明其工作原理。当自行车骑到十字路口需要右转弯时，人的大脑发出转弯指令（即参考输入信息）于肌体（手），操作自行车车把向右转，而眼睛随时在观察自行车是否是在按预定指令行动，并将这一信息反馈至大脑，与参考输入信息（即人大脑所发出的转弯指令）比较，力图使转弯的偏差减至最小；如此过程就是一个闭环控制系统。显然，系统输出信号对控制作用有直接影响。若遇有干扰，比如要碰着人时，可自动排除干扰，立即避让再右转。

习题1-2 画出室内空调系统的方块图。注意，恒温器是该系统中的控制器。试说明在该系统中可能存在哪些扰动量。

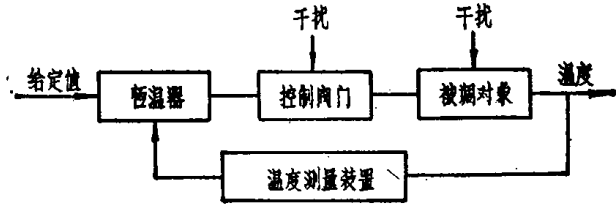


图1-3 室内空调系统方块图

解：空调系统是闭环控制系统，也是自动调节系统。该系统可能存在的干扰有外扰与内扰。

外扰一是外界自然环境温度的变化对被调对象即室内空间温度的影响。一是室内空间温度的变化，如室内人数增多温度上升，室内人数减少温度下降对室内既已调定温度的影响。

内扰表现为恒温器，控制阀门，温度检测装置等元件结构参数瞬时变化以引起室内空间温度的变化。

习题1-3 图1-4表示一个张力控制系统。当送料速度在短时间内突然变化时，试说明控制系统的作用情况。

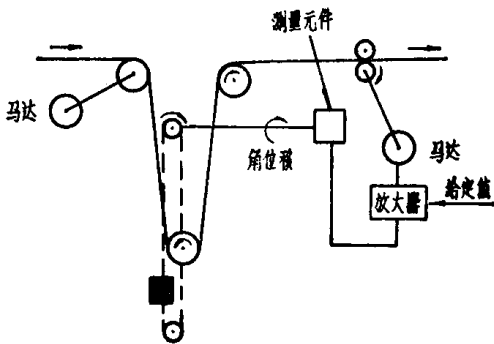


图1-4 张力控制系统

解：在给定值参考输入下，即要求送料速度为某一数值，此时测量头的重锤 G 与轮子 L 受力平衡，则测量头输入轴不动。当送料速度在短时间内突然发生变化时，如电源变化引起马达转速波动，所输送的带料不均匀等，从而使带料在输送过程中张力发生变化，以至破坏了重锤 G 与轮子 L 的受力平衡，测量头输入轴发生转动，通过测量元件就可直接测出送料速

度的变化。将此信息再转换成相同的物理量反馈输入放大器，通过放大器比较后，输出一校正信息，控制马达的转速，以达到控制张力的变化来保证恒定送料速度的目的。

该系统的方块图如下：

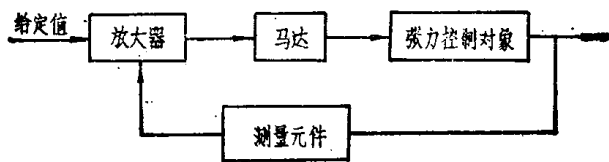


图1-5 张力控制系统方块图

习题1-4 图1-6表示一个自动控制系统。试说明其作用原理。

解：图1-6是一种液面自动控制系统，以保证液面高度不变。水通过连接在浮子杠杆臂上的锥形控制阀而进入水箱，当水位不断上升时，通过浮子反馈使锥形控制阀逐渐关小。当水位下降时，通过浮子反馈使锥形控制阀逐渐开大。这一闭环控制系统，是用浮子作控制器来比较实际液面高度与所希望的液面高度，并通过调整锥形控制阀的开度，对偏差进行修正，从而保持液面高度不变。

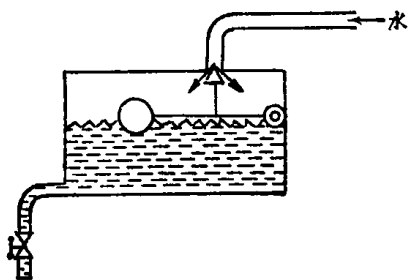


图1-6 自动系统控制

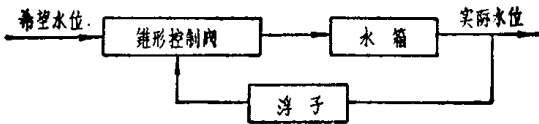


图1-7 液面控制方块图

第二章 数学基础——拉普拉斯变换

2-1 定 义

$f(t)$ ——原函数, 时间 t 的函数. $t < 0$ 时, $f(t) = 0$

$F(s)$ ——象函数, 复数 $s = \sigma + j\omega$ 的函数.

则拉普拉斯变换定义为:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad t \geq 0$$

即已知原函数 $f(t)$ 求象函数 $F(s)$.

拉普拉斯反变换的定义为:

$$L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

即已知象函数 $F(s)$ 求原函数 $f(t)$.

2-2 常用典型试验信号的拉普拉斯变换

单位脉冲函数

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & t < 0 \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} L[\delta(t)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\varepsilon s} \int_0^{\varepsilon} e^{-st} d(-st) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\varepsilon s} e^{-st} \Big|_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\varepsilon s} (e^{-\varepsilon s} - e^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} (1 - e^{-\varepsilon s}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\varepsilon} (1 - e^{-\varepsilon s})}{\frac{d}{d\varepsilon} \cdot \varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{0 + s e^{-\varepsilon s}}{s} = \frac{s}{s} = 1 \end{aligned}$$

即

$$L[\delta(t)] = 1$$

脉冲函数

$$f(t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \\ 0 & t < 0 \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} f(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{A}{\varepsilon} e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-A}{\varepsilon s} \int_0^{\varepsilon} e^{-st} d(-st) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-A}{\varepsilon s} e^{-st} \Big|_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-A}{\varepsilon s} (e^{-\varepsilon s} - e^0) = A \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} (1 - e^{-\varepsilon s}) \end{aligned}$$

在单位脉冲函数中已求得：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} (1 - e^{-\varepsilon s}) = 1$$

代入上式可得：

$$L[f(t)] = A \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} (1 - e^{-\varepsilon s}) = A$$

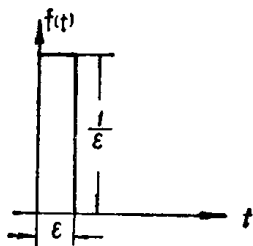


图2-1 单位脉冲函数

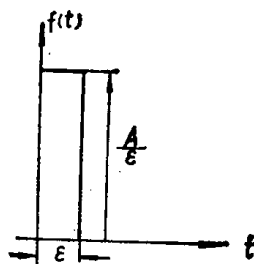


图2-2 脉冲函数

比较单位脉冲与脉冲函数可以看出，单位脉冲是指在很短的时间 ($\varepsilon \rightarrow 0$) 内作用的矩形脉冲；它的幅值很大，以至与其作用时间的乘积等于 1。而脉冲函数也是在很短时间内作用的矩形脉冲；只不过它的幅值与其作用时间的乘积等于常数 A 。单位脉冲函数的拉氏变换为 1；脉冲函数的拉氏变换为 A 。这就意味着脉冲函数的拉氏变换是单位脉冲函数拉氏变换的 A 倍；或者说以单位脉冲函数的拉氏变换为单位来衡量脉冲函数的拉氏变换而相当于有多少个单位脉冲函数的拉氏变换一样。反之，1 的拉氏反变换为单位脉冲 $\delta(t)$ ；常数 A 的拉氏反变换为单位脉冲 $\delta(t)$ 的 A 倍。

单位阶跃函数

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } L[1(t)] &= \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} d(-st) = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{s} (0 - 1) = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

阶跃函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } L[f(t)] &= \int_0^{\infty} A e^{-st} dt = -\frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} d(-st) = -\frac{A}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{A}{s} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{A}{s} (0 - 1) = \frac{A}{s} \end{aligned}$$

单位阶跃函数与阶跃函数两者之关系与上述单位脉冲函数和脉冲函数之关系非常相似。所不同的仅是前者在 $t > 0$ 时输出为一常值之连续函数。同理

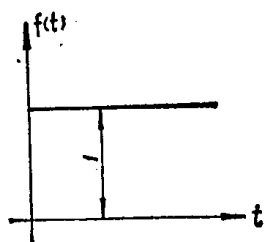


图2-3 单位阶跃函数

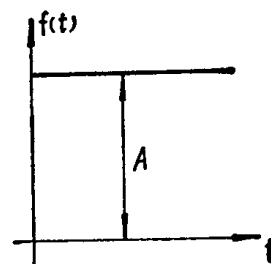


图2-4 阶跃函数

$$L^{-1} \frac{1}{s} = 1(t) = 1 \quad L^{-1} \frac{A}{s} = A1(t) = A$$

注意！单位脉冲 $\delta(t)$ 可以被认为是在间断点上单位阶跃函数对时间的导数。

即

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \quad 1(t) = \int \delta(t) dt$$

这个结果在具体应用和解题时是很重要的。

单位斜坡函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} t e^{-st} d(-st) = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} t d e^{-st} \\ &= -\frac{1}{s} \left[t \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-st} dt \right] = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} d(-st) \\ &= -\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s^2} (e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

斜坡函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & t \geq 0 \end{cases}$$

则

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} A t e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{A}{s^2}$$

显然，斜坡函数为单位斜坡函数的 A 倍，而斜坡函数的拉氏变换亦为单位斜坡函数拉氏变换的 A 倍。

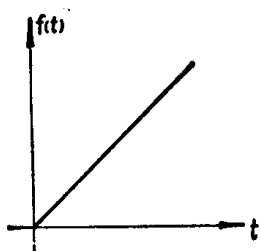


图2-5 单位斜坡函数

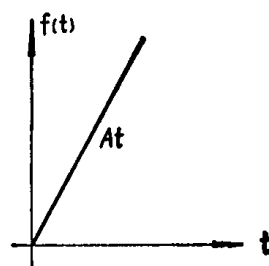


图2-6 斜坡函数

单位正弦函数

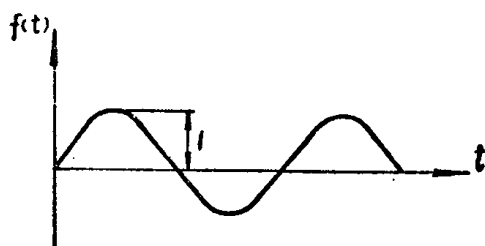


图2-7 单位正弦函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$$

则

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt$$

由欧拉公式

$$\left. \begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos \omega t - j \sin \omega t \end{aligned} \right\} \text{式中 } j = \sqrt{-1}$$

可得

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

即

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \left[\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ -\frac{1}{s-j\omega} \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} d[-(s-j\omega)t] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s+j\omega} \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} d[-(s+j\omega)t] \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ -\frac{1}{s-j\omega} e^{-(s-j\omega)t} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s+j\omega} e^{-(s+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \times \frac{s+j\omega - s+j\omega}{s^2 - (j\omega)^2} = \frac{1}{2j} \times \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

正弦函数

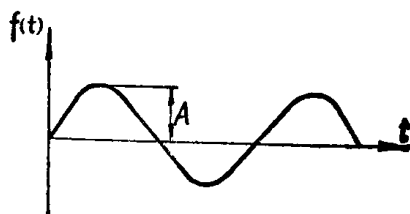


图2-8 正弦函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$$

则

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} A \sin \omega t \cdot e^{-st} dt = A \int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

同理, 正弦函数为单位正弦函数的 A 倍, 正弦函数拉氏变换亦为单位正弦函数拉氏变换的 A 倍。

2-3 常用拉氏变换基本定理

线性定理 若 $F_1(s) = L[f_1(t)]$ $F_2(s) = L[f_2(t)]$ a 和 b 为常数。

则有 $L[af_1(t) + bf_2(t)] = aL[f_1(t)] + bL[f_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$

微分定理 若 $F_1(s) = L[f_1(t)]$ $F_2(s) = L[f_2(t)]$

则有 $L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

式中 $f(0)$ 、 $\dot{f}(0)$ 、 $\dots$ 、 $f^{(n-1)}(0)$ 为 $f(t)$ 及其各阶导数在 $t=0$ 时的值。

积分定理 若 $F(s) = L[f(t)]$

则有 $L\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$

$$L\left[\int\int f(t) dt^2\right] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{f^{-1}(0)}{s^2} + \frac{f^{-2}(0)}{s}$$

$$L\left[\underbrace{\int\int\int\cdots\int f(t) dt^n}_n\right] = \frac{F(s)}{s^n} + \frac{f^{-1}(0)}{s^n} + \dots + \frac{f^{-n}(0)}{s}$$

$$= \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[\int\int\cdots\int f(t) (dt)^k \right], \dots$$

式中 $f^{-1}(0)$ 、 $f^{-2}(0)$ 、 $\dots$ 、 $f^{-n}(0)$ 为 $f(t)$ 的各次重积分在 $t=0$ 时的值。

初值定理 若 $L[f(t)] = F(s)$ 并且 $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在, 则有 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

即原函数 $f(t)$ 在自变量 t 趋于零(从正向趋于零时)的极限, 等于象函数 $F(s)$ 与 s 的乘积在其自变量 s 趋于无穷大时的极限。

终值定理 若 $L[f(t)] = F(s)$ 并且 $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ 存在

则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

即原函数 $f(t)$ 在自变量 t 趋于无穷大时的极限, 等于象函数 $F(s)$ 与 s 的乘积在其自变量 s 趋于零时的极限。

第一平移定理

若 $L[f(t)] = F(s)$

则 $L[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)$

反之若 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

则 $L^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$

第二平移定理

若 $L[f(t)] = F(s)$

则 $L[1(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$

反之若 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

则 $L^{-1}[e^{-as}F(s)] = 1(t-a)f(t-a)$

相似定理

若 $L[f(t)] = F(s)$

则 $L[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

反之若 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

则 $L^{-1}\left[\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\right] = f(at)$

若 $L[f(t)] = F(s)$

则 $L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$

反之若 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

则 $L^{-1}[aF(as)] = f\left(\frac{t}{a}\right)$

卷积定理

若 $L[f_1(t)] = F_1(s) \quad L[f_2(t)] = F_2(s)$

则 $L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = L\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] = F_1(s) \cdot F_2(s)$

反之若 $L^{-1}F_1(s) = f_1(s) \quad L^{-1}F_2(s) = f_2(t)$

则 $L^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

其中 $\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = f_1(t) * f_2(t)$

称为函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积积分, 星号*为卷积运算符号。

乘幂定理

若 $L[f(t)] = F(s)$

则当 $n = 1, 2, 3 \cdots$ 时

有 $L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s)$

反之若 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

则 $L^{-1}[F^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n f(t)$

2-4 拉氏变换的部分分式展开式

对于函数 $F(s)$ 可以化成下列因式分解形式

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$F(s)$ 中只有不同的极点时可展开为

$$F(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_k}{s+p_k} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

而展开式中通项的留数 a_k 按下式确定

$$a_k = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_k) \right]_{s=-p_k}$$

$F(s)$ 中含有多重极点时可展开为

$$F(s) = \frac{b_r}{(s+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{a_{r+1}}{s+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{s+p_{r+2}} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

其中多重极点的各个留数由下列各式确定

$$b_r = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right]_{s=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

$$b_{r-i} = \frac{1}{i!} \left\{ \frac{d^i}{ds^i} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)^r \right] \right\}_{s=-p_1}$$

其余各极点的留数确定方法与上同。

$F(s)$ 中包含有共轭复数极点时可展开为

$$F(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s+p_1)(s+p_2)} + \frac{a_3}{s+p_3} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

α_1 与 α_2 由下式解复数方程而得

$$(\alpha_1 s + \alpha_2)_{s=-p_1} = \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s+p_1)(s+p_2) \right]_{s=-p_1}$$

表 1 常用拉氏变换表

No.	原 函 数 $f(t)$	象 函 数 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n (n=1, 2, 3, \cdots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

续表 1

No.	原 函 数 $f(t)$	象 函 数 $F(s)$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$t^n e^{-at} (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
9	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
13	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
15	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
17	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
19	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
20	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
21	$\frac{1}{(a-b)^2} e^{-at} + \frac{(a-b)t-1}{(a-b)^2} e^{-bt}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)^2}$
22	$-\frac{1}{(a-b)^2} e^{-at} - \frac{b(a-b)t-a}{(a-b)^2} e^{-bt}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)^2}$
23	$\frac{a^2}{(a-b)^2} e^{-at} + \frac{b^2(a-b)t+b^2-2ab}{(a-b)^2} e^{-bt}$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)^2}$
24	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

续表 1

No.	原 函 数 $f(t)$	象 函 数 $F(s)$
25	$-\frac{ae^{-at}}{(b-a)(c-a)} - \frac{be^{-bt}}{(a-b)(c-b)} - \frac{ce^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
26	$\frac{a^2e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{b^2e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{c^2e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{s^2}{(s+a)(s+b)(s+c)}$
27	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$
29	$\frac{1}{\omega^3} (\omega t - \sin \omega t)$	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{\omega^4} (1 - \cos \omega t) - \frac{1}{2\omega^3} t \sin \omega t$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)^2}$
32	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
33	$\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi), \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$
34	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$ $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$

习 题 及 解 答

习题2-1 试求用下面形式定义的函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换:

$$f(t) = \frac{1}{a^2} \quad (0 < t < a)$$

$$f(t) = -\frac{1}{a^2} \quad (a < t < 2a)$$

$$f(t) = 0 \quad (t < 0, 2a < t)$$

并求当 $a \rightarrow 0$ 时 $F(s)$ 的极限值。

解 1: 依拉氏变换定义分段积分

$$\begin{aligned}
 L[f(t)] &= \int_0^a \frac{1}{a^2} \cdot e^{-st} dt + \int_a^{2a} \left(-\frac{1}{a^2}\right) \cdot e^{-st} dt + \int_{2a}^{\infty} 0 \cdot e^{-st} dt \\
 &= -\frac{1}{a^2 s} \int_0^a e^{-st} d(-st) + \frac{1}{a^2 s} \int_a^{2a} e^{-st} d(-st)
 \end{aligned}$$